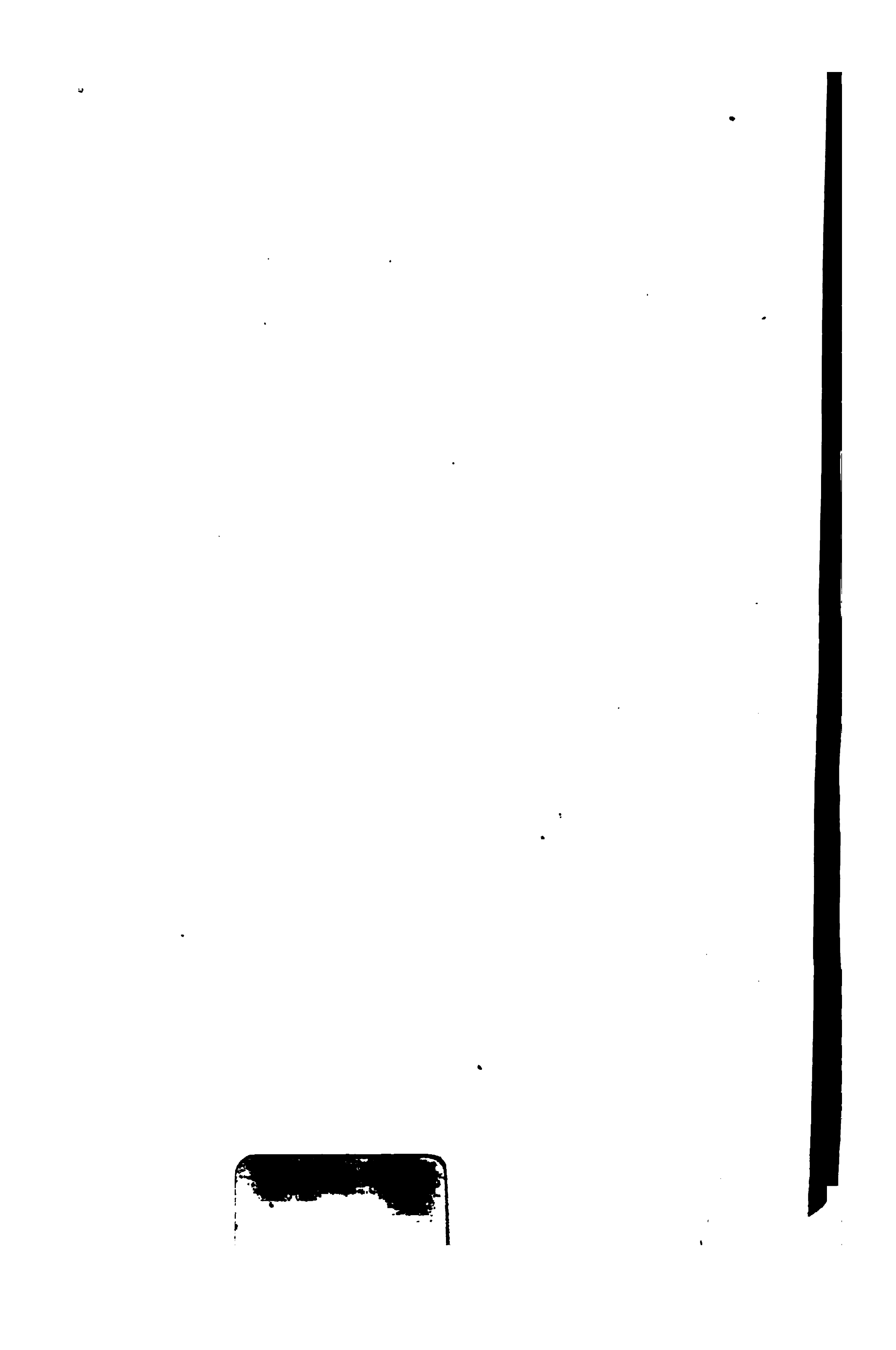
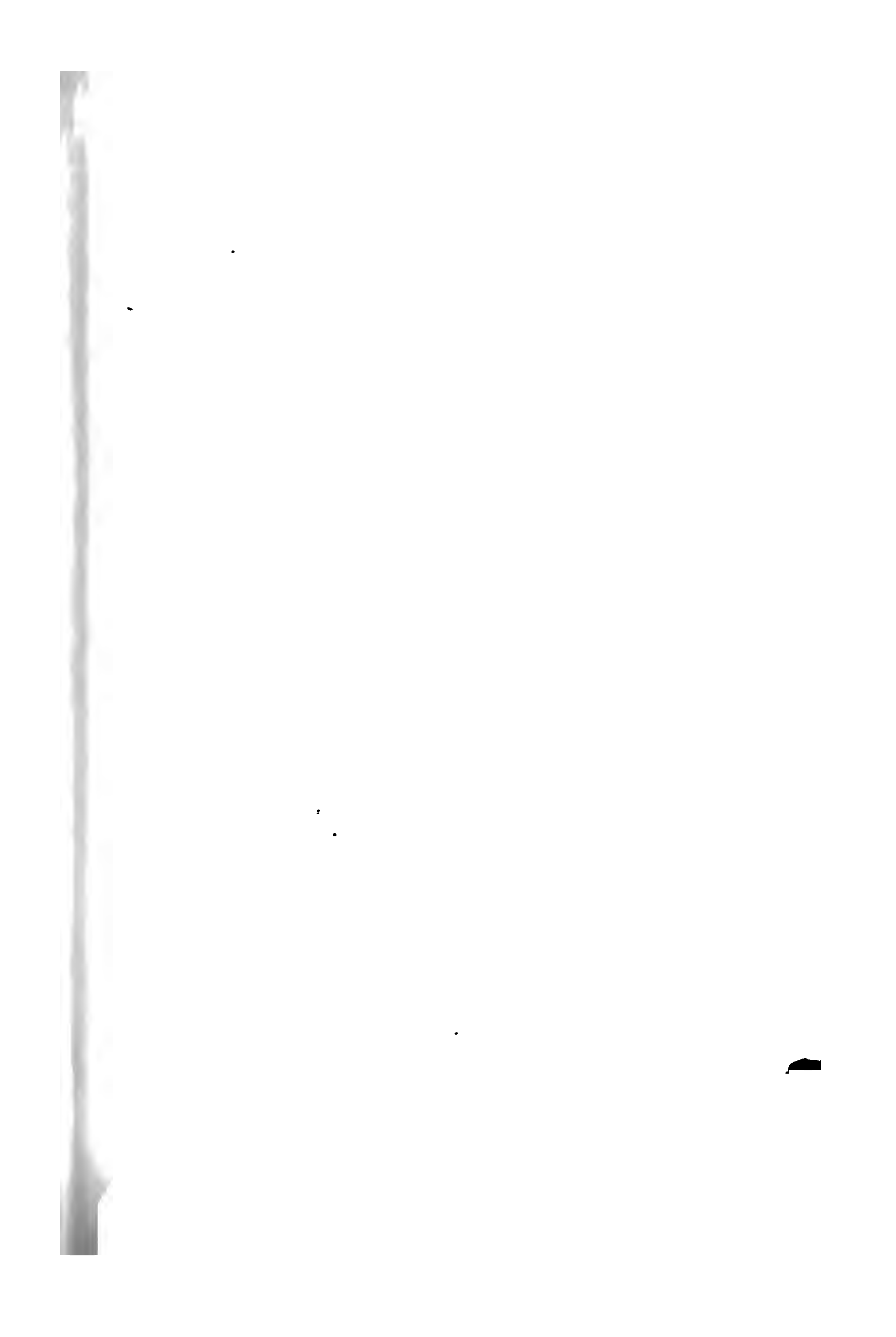

Stanford University Libraries
3 6105 001 362 982





Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. R. Mehmke und **Dr. M. Cantor.**

Supplement zum vierundvierzigsten Jahrgang.

Der Supplemente vierzehntes.

Zugleich der

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik

neuntes Heft.

Mit einem Porträt in Heliogravüre, zwei Tafeln und 55 Figuren im Text.

Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1899.

Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

Neuntes Heft.

Mit einem Porträt in Heliogravüre, zwei Tafeln und 55 Figuren im Text.

Herrn

Hofrat und Professor Dr. Moritz Cantor

bei der 70. Wiederkehr des Tages seiner Geburt am 23. August 1899 dargebracht von seinen Freunden und Verehrern.

Im Auftrage herausgegeben

von

M. Curtze in Thorn.

und

S. Günther in München.

Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1899.

Verehrter Meister, werter Kollege und Freund!

Ein schönes und seltenes Fest ist Ihnen heute zu feiern vergönnt. Wohl mancher erreicht das Alter des Psalmisten, aber es in solch jugendlicher Frische, ohne Zeichen irgendwelchen Nachlassens der geistigen und körperlichen Kräfte, zu erreichen, das ist eine seltene Gabe, über die sich mit Ihnen Alle freuen dürfen, welche Ihnen nahe stehen. Schon seit achtundvierzig Jahren wird Ihr Name litterarisch genannt; aber erst als reifer Vierziger gingen Sie an jene gewaltige Arbeit, deren schönen Abschluſs wir vor kurzem erleben durften, und in einem Alter, welches wohl eher zur Entlastung nach schaffensreichem Leben auffordern würde, schufen Sie das groſse, auf zahlreiche vorbereitende Veröffentlichungen gestützte Werk, welches als umfassendes Handbuch eines noch niemals in dieser Weise behandelten Wissenszweiges für alle Zeiten den Jüngern der exakten Wissenschaften zeigen wird, welch eine Fülle auch der Vergangenheit innewohnt. Eine unermeſsliche Anregung geht von Ihren „Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik“ aus, und alle anderen Völker sehen sich auf das *Standard Work* des deutschen Forschers hingewiesen, ebenso wie auch Ihnen allein die Einbürgerung unserer Disziplin als eines selbständigen akademischen Lehrgegenstandes an den Hochschulen — und zwar nicht bloſs an solchen deutscher Zunge — zu danken ist.

Diese Gemeinsamkeit der wissenschaftlichen Interessen, keine Trennung der Länder und Völker kennend, spricht sich auch aus in der vorliegenden Schrift, welche eine Anzahl Ihrer dankbaren Freunde und Verehrer Ihnen an Ihrem Ehrentage überreichen möchte. Nehmen Sie dieselbe freundlich auf als einen sprechenden Beweis der Thatsache, daſs Ihr Beispiel und Ihre Thätigkeit allenthalben in der gebildeten Welt zur Nacheiferung erzogen haben.

Thorn und München, im August 1899.

Die Herausgeber.

Inhalts-Verzeichnis.

DÉVELOPPEMENT DES PROCEDÉS SERVANTS À DÉCOMPOSER LE QUOTIENT EN QUANTIÈMES.

PAR

V. V. BOBYNIN
À MOSCOU.

Après l'emploi exclusif du calcul fractionnaire sous la forme des nombres concrets la phase suivante du calcul des fractions abstraites est représentée par les quantièmes.[1]) Il n'y a que celles-ci qui soient à la portée des calculateurs de ces temps là de tout le domaine des fractions abstraites. Toutes les autres se fondant pour la forme avec les nombres entiers, si elles apparaissent même au calculateur de l'époque en question, c'est sous une forme si vague pour la raison qu'elle exclue toute possibilité d'opérer dessus des règles d'arithmétique, en dehors du calcul des nombres concrets. Il en resulta le besoin d'exprimer le quotient en quantièmes, en cas d'un reste obtenu. Alors qu'on en était à la connaissance primitive des fractions abstraites sous la forme qui leur était propre et qui ne dépendait pas du calcul des nombres concrets, le procès servant à exprimer la partie fractionnaire du quotient au moyen des quantièmes ne pouvait avoir lieu que d'après un schème fourni par le calcul des nombres concrets. Tel fut le procédé de la division d'un nombre concret par un nombre abstrait. Une fois qu'on y arrive à un reste moindre que le diviseur on est bien forcé de réduire ce reste en unités concrètes des ordres inférieurs, afin de pouvoir continuer l'opération. Le même procédé appliqué à la division des nombres entiers abstraits en rendait évidemment possible la suite du procès après qu'on eut obtenu un reste moindre que le diviseur. Dans ce cas le procédé examiné consistait à transformer le reste obtenu en des subdivisions de l'unité dont le nombre excèderait le diviseur. Nous chercherions en vain, à l'appui de ces reflexions, des indications directes dans le peu de documents que nous offre la littérature mathématique des époques correspondantes. Nous croyons toutefois pouvoir les admettre comme les seules qui s'imposent impérieusement à quiconque ait observé le calcul fractionnaire dans sa marche primitive et détaillée.

La forme du procédé en question était donc ainsi conçue: le dividende inférieur au diviseur ou le reste obtenu par l'action de diviser, était multiplié par le moindre des nombres dont les produits avec lui excèdent le

1) V. Bobynin, Esquisse de l'histoire du calcul fractionnaire. Bibliotheca Mathematica 1896, p. 97—101.

diviseur. Il n'est pas difficile de constater que ce nombre est toujours la partie entière du quotient augmentée d'une unité et provenant de la division du diviseur par le dividende ou par le reste. Le produit de ce nombre avec le dividende une fois divisé par le diviseur donne toujours pour quotient une unité et un reste. Cette unité devant être encore divisée par le nombre qui a servi de multiplicateur au dividende primitif, la division opérée donnera pour la fraction examinée la première des fractions de la décomposition cherchée ou du quotient en quantièmes. La seconde partie en sera formée par la fraction dont le numérateur fait le reste obtenu et le dénominateur — le produit du diviseur avec le nombre dont le dividende avait été multiplié. Si ce reste est l'unité, la seconde partie du résultat de la division répondant également au but poursuivi fera la seconde fraction de la décomposition cherchée en la terminant. Si au contraire le reste n'est pas l'unité, il est soumis aux mêmes opérations que le dividende. On agit de même avec les restes suivants jusqu'à ce qu'on en obtienne un qui équivale à 1, ou qui rende possible l'application de quelque autre procédé. En voici un exemple mis en pratique, tel que nous le présente la décomposition en quantièmes du quotient 13 : 17. Nous en trouvons le résultat dans les tables du papyrus greco-égyptien d'Akhmîm datant du VII ou VIII s. de l'ère chrétienne.[2]) Le procédé en question appliqué 60 fois dans les calculs de ces tables atteste la largeur de son emploi en antiquité. Il devient de moins en moins fréquent dans les époques suivantes ainsi que le prouvent les 50 problèmes du papyrus d'Akhmîm datant d'une époque postérieure à ses tables, et dont les solutions ne le présentent que 6 fois. Nous nous convaincons de son abandon final par ce fait notable que Leonardo Pisano en décrivant en détails tous les procédés servant à décomposer les fractions en quantièmes et connus à la fin du XII s., n'en fait aucune mention dans le célèbre Liber Abbaci.[3])

$$\frac{13}{17} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{68}$$

$$\begin{array}{rll} 13 & & \\ \times\ 2 & & \\ \hline 26 & 17 & \\ 17 & 1 & = \frac{1}{2} \\ \hline 9 & & \\ \times\ 2 & & \\ 18 & 17 & \\ 17 & 1 & = \frac{1}{4} \\ \hline 1 & = \frac{1}{68} & \end{array}$$

C'est aussi le calcul des nombres concrets qui contribua à trouver une autre méthode fondamentale pour décomposer les fractions en quantièmes. Elle eut d'abord un caractère tout privé et ne se généralisa qu'après une application lente et variée à des cas toujours nouveaux. Les

2) J. Baillet, Le papyrus mathématique d'Akhmîm. Mémoires publiés par les membres de la mission archéologique française au Caire. Tome neuvième. 1-er fascicule. Paris 1892, p. 1—89.

3) Scritti di Leonardo Pisano I, p. 77—83.

rapports existant entre les différentes unités des mesures homogènes et permettant d'en remplacer les équivalents d'un ordre inférieur par les unités correspondantes d'un ordre supérieur, donnèrent les premiers exemples nombreux des quotients réduits à des quantièmes et obtenus à la suite de la division d'un nombre quelconque par son multiple ou, ce qui en dit autant, par des fractions dont les dénominateurs sont les multiples de leurs numérateurs. Représentant la conversion des mesures inférieures en mesures supérieures dans son ensemble cette méthode avait un charactère tout général à l'époque où le calcul fractionnaire était exclusivement figuré par celui des nombres concrets. Lorsque l'emploi exclusif de cette forme eut disparu et que le calcul des fractions abstraites apparut en se développant en dehors d'elle, le procédé en question se trouva seulement appliqué aux fractions dont le dénominateur est le multiple du numérateur. Dans son Liber Abbaci en décrivant les méthodes servant à réduire les fractions en quantièmes, Leonardo Pisano met cette forme primitive et fondamentale en premier lieu sous le nom sousentendu de „prima differentia". Le même livre la cite comme indispensable en affaires de commerce. Nous la trouvons employée dans tous les cas qui s'y rapportent dans le papyrus d'Akhmîm.

Les cas nombreux de la réduction ascendante ayant pour résultat un nombre complexe représentèrent les premiers exemples de l'extension de la méthode précédente au cas où le dividende peut être décomposé en parties équivalentes aux facteurs du diviseur ou leurs multiples. Une telle acception de ces exemples aura pu échapper toutefois aux anciens calculateurs et dut rester, par conséquent, sans influence notable sur l'origine et le progrès de l'extension citée. La simplicité de l'idée fut la force de cette extension, en permettant de la découvrir directement sans d'autres indications. C'est là aussi que nous devons chercher la cause principale, l'unique peut-être, de son origine et de son progrès successif. L'emploi en ayant atteint un degré considérable, l'extension citée en devint un nouveau moyen indépendant servant à exprimer le quotient dans les quantièmes. C'est dans ce sens que nous le trouvons décrit dans le Liber Abbaci sous le nom de la „secunda differentia". Le papyrus d'Akhmîm nous donne aussi une indication détaillée sur la manière de procéder dans les calculs d'après cette méthode appliquée à chaque cas particulier.

Excepté l'application pure et directe dans les cas qui la reclamaient, la nouvelle méthode servit encore largement le premier des procédés fondamentaux primitifs et décrit plus haut toutes les fois que le reste obtenu par la division n'était pas 1 et qu'il ne réalisait point les conditions du second procédé fondamental. Parmi les cas nombreux que nous fournit à

ce sujet le papyrus d'Akhmîm citons comme exemple la multiplication de 15 par $\frac{1}{19}$ (voyez cidessus).

Le premier des procédés fondamentaux primitifs cités plus haut et qu'on pourrait appeler celui de la division n'est pas toujours employé dans la simplicité de sa forme originaire. Les écartements en consistent à multiplier le dividende par un nombre plus grand que ne le réclamait le procédé. Ils s'expliquent tout d'abord par la conception vague qu'on avait de sa nature et de ses qualités. Plus tard les calculateurs qui avaient compris la chose eurent recours à ces écartements dans le but d'obtenir des décompositions du quotient en quantièmes plus commodes pour eux. Or la décomposition était à cette époque d'autant moins commode que les dénominateurs de plusieurs ou de l'une des fractions en étaient plus grands. Un trop grand nombre de membres formant la décomposition était aussi envisagé comme un empêchement quoique moindre que le premier. Le papyrus d'Akhmîm nous présente 16 cas d'écartements semblables et tous ayant pour but de trouver des décompositions mieux adaptables. A quel point cependant un grand nombre de membres était considéré comme un empêchement moindre pour la décomposition que ne l'était la présence d'une fraction à un grand dénominateur, le papyrus d'Akhmîm le prouve suffisamment, dans l'exemple donné par la décomposition provenant de la multiplication de 12 par $\frac{1}{19}$. Opérée suivant la méthode de la division dans la simplicité de sa forme originaire, ainsi qu'on le voit dans l'exemple ci-joint, la décomposition n'a que 3 membres dont le moindre est $\frac{1}{152}$. Opérée suivant l'écartement admis dans le papyrus, elle en a 5 dont le moindre est $\frac{1}{114}$. Les nombres servant à multiplier le dividende ou l'un des restes dans ces écartements excèdent ceux qu'en exige la forme pure de la méthode ordinairement de 1, et seulement dans trois cas sur seize de 2. Une augmentation si insignifiante du nombre employé comme multiplicateur fait que le quotient à trouver n'excède pas 2, et que dans 6 cas il est 1. Les fractions des décompositions fournies par les quotients équivalents à 2 sont tantôt réduites en quantièmes à

$$\begin{array}{l} 15 \\ \times 2 \\ \hline 30 \mid \frac{19}{1} = \frac{1}{2} \\ 19 \\ \hline 11 \\ \times 2 \\ \hline 22 \mid \frac{19}{1} = \frac{1}{4} \\ 19 \\ \hline 3 = \frac{3}{76} = \frac{2+1}{76} \\ \frac{15}{19} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{38}\ \frac{1}{76} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12 \\ \times 2 \\ \hline 24 \mid \frac{19}{1} = \frac{1}{2} \\ 19 \\ \hline 5 \\ \times 4 \\ \hline 20 \mid \frac{19}{1} = \frac{1}{4} \\ 19 \\ \hline 1 = \frac{1}{152} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12 \\ \times 2 \\ \hline 24 \mid \frac{19}{1} = \frac{1}{2} \\ 19 \\ \hline 5 \\ \times 6 \\ \hline 30 \mid \frac{19}{1} = \frac{1}{12} \\ 19 \\ \hline 11 = \frac{6+3+2}{12 \cdot 19} \end{array}$$

l'aide de la seconde des deux méthodes fondamentales citées plus haut et qui peut être appellée (tout court) celle de la réduction par le numérateur (ou celle de la division des termes de la fraction par le numérateur), tantôt elles équivalent à $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire à la seule des fractions au numérateur excédant 1, qui ait été à la portée des calculateurs anciens et par là admise dans les décompositions cherchées.

En comparant les procès des calculs exigés par la décomposition du seul et même quotient suivant la méthode de la division employée dans sa forme pure et simple, avec l'admission des écartements cités plus haut, on ne peut s'empêcher de remarquer que ces derniers diminuent le nombre des divisions successives et abrègent ainsi le procès. Non obstant le désir bien naturel d'obtenir dans la décomposition des formes plus commodes, cette circonstance devait pousser les calculateurs à une admission toujours plus fréquente et plus consciente des écartements en question. Le besoin de décomposer à leur tour les quotients obtenus avec ces écartements et représentés par les fractions aux numérateurs excédant 1, en atténuait toutefois le profit, dans certains cas jusqu'à l'anéantir. Les cas où il était possible d'appliquer à ces quotients la méthode de la réduction par le numérateur, des cas analogues à ceux que nous trouvons dans le papyrus d'Akhmîm, forçaient les calculateurs, afin de réaliser cette possibilité, d'employer pour multiplier le dividende et les restes, des nombres non premiers et cela avec un succès d'autant plus grand que le nombre de facteurs premiers qui les composaient était plus considérable. Avec plus de clarté et à cause d'un emploi fréquent dans la méthode de la division sous toutes ses formes, avec plus de force encore, la méthode de décomposer le numérateur en parties équivalentes aux facteurs du dénominateur, démontrait l'utilité et le besoin urgent d'employer dans le but indiqué les nombres non premiers renfermant le plus grand nombre possible de facteurs premiers. Parfois quand le nombre non premier était adroitement choisi, toute la décomposition du quotient suivant la méthode de division se réduisait dans son procès à l'action de diviser toute seule. La méthode de diviser par le numérateur et celle de décomposer le numérateur en parties équivalentes aux facteurs du dénominateur étaient alors appliquées au quotient et aux restes obtenus. Ces cas de plus en plus fréquents eurent pour résultat final de donner à la méthode de division une forme nouvelle et extérieurement bien différente. D'après la description donnée par Leonardo Pisano dans son Liber Abbaci, non sous une forme générale, mais dans des exemples privés, cette forme qu'il nommait „regula universalis in disgregatione partium numerorum", était ainsi conçue. On

choisissait un nombre non premier renfermant le plus possible de facteurs premiers (par exemple 12, 24, 36, 48, 60 etc.) et restant compris entre la moitié du dénominateur de la fraction à décomposer et le même dénominateur doublé. Ce nombre est multiplié par le numérateur et le produit obtenu divisé par le dénominateur. Le quotient qui suit est divisé par le nombre non premier pris comme multiplicateur, et le nouveau quotient décomposé en quantièmes d'après celle des méthodes examinées qui s'y prête le mieux. Cette règle de LEONARDO PISANO exprimée à l'aide des signes algébriques actuels représente la nouvelle forme de la méthode de division ainsi conçue:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{b} : m = \left(q + \frac{r}{b}\right) : m = \frac{q}{m} + \frac{r}{bm},$$

m étant un nombre tiré de la suite des nombres contenus entre $\frac{b}{2}$ et $2b$ et pouvant se décomposer en le plus grand nombre de facteurs premiers. Cette forme fut développée dans une antiquité profonde, quelques millénaires avant LEONARDO PISANO. Dans le Papyrus de Rhind[4]) nous trouvons en effet que tous les quotients provenant du nombre 2 divisé par les impairs de 5 à 99 sont décomposés en quantièmes au moyen de la méthode de division dans cette forme ci. Les autres méthodes qui y sont employées en même temps se trouvent exclusivement limitées à celle de la division par le numérateur et à celle de la décomposition du numérateur en parties équivalentes aux facteurs du dénominateur. La seule différence, insignifiante toutefois, qui existe entre l'application de la forme examinée dans le Papyrus de Rhind et la description que nous en donne LEONARDO PISANO, consiste en cela, que les nombres non premiers employés dans le premier sont toujours contenus entre le dénominateur entier de la fraction à décomposer et la moitié de celui-ci. La méthode de la division est employée dans cette forme à côté de sa forme primitive à l'époque du Papyrus de Rhind et même beaucoup plus tard. Par exemple, nous la notons 8 fois dans les tables du papyrus d'Akhmîm. Ainsi que dans celui de Rhind elle s'y trouve appliquée toutes les fois que le nombre 2 est divisé par les impairs de 5 à 19, en en exceptant deux $\left(2 \cdot \frac{1}{13} \text{ et } 2 \cdot \frac{1}{19}\right)$, où la décomposition suit la forme primitive de la méthode de la division, c'est-à-dire dans 6 cas seulement. Les deux derniers cas sont figurés par la multiplication du nombre 3 par $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{13}$. Dans l'espace de temps écoulé entre les tables d'Akhmîm et le

4) A. EISENLOHR, Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter. (Papyrus Rhind des British Museum.) Erster Band (Leipzig 1877), p. 30—48.

Liber Abbaci l'emploi de la méthode de la division dans sa forme examinée en avait fait disparaître la forme primitive au point que LEONARDO PISANO dut l'ignorer. C'est la seule raison du reste qui en explique l'absence dans son Liber Abbaci.

Ainsi que la méthode de la division elle-même, sa forme examinée tout à l'heure et pouvant s'appliquer également à tous les quotients ou fractions, possède une généralité parfaite. C'est pourquoi l'épithète „d'universelle" qui lui a été donné par LEONARDO PISANO la caractérise entièrement. Nous ne savons pas que la méthode de la division ait fait des progrès au delà.

Les deux méthodes fondamentales servant à décomposer le quotient en quantièmes, voire celle de la division et celle de la réduction par le numérateur, ont une différence essentielle dans le caractère tout général de la première et tout privé de la seconde. A la suite de cette différence chacune des deux méthodes se développa à sa manière, dans une direction dissemblable à l'autre. Effectivement, tandis que le progrès de la première consistait à simplifier et à abrèger le procès du calcul, celui de la seconde s'occupait exclusivement à répandre son procédé sur de nouveaux genres de fractions, afin d'arriver à une forme également applicable à toutes les fractions. C'est dans cette direction que se développa la seconde méthode elle-même et le premier cas de son extension ou la méthode de la décomposition du numérateur en parties équivalentes aux facteurs du dénominateur. Nous suivrons d'abord le progrès de la méthode elle-même pour passer ensuite à son extension première. Il est à remarquer pour le premier cas que nous pouvons en observer le développement exclusivement à l'aide des connaissances fournies par le Liber Abbaci, c'est-à-dire dans les formes du calcul fractionnaire qui en ont remplacé la forme primitive, représentée par le calcul des nombres concrets.

Le moyen le plus grave, le seul peut être, de répandre la méthode de la réduction par le numérateur sur les groupes des fractions qui ne donnent pas lieu à son application immédiate, fut fourni par une observation toute simple. Elle montrait qu'en augmentant le dénominateur de 1, la différence entre la première fraction et la seconde est toujours équivalente au quotient provenant de la division de l'une par le dénominateur de l'autre. Dans des cas particuliers, lorsque le dénominateur augmenté de 1 devient le multiple du numérateur, la fraction transformée ainsi que la différence entre elle et sa première forme sont représentées, une fois la réduction par le numérateur opérée, comme des quantièmes. De cette manière l'observation indiquée permet de décomposer la fraction en une somme de deux quantièmes amenés à cette forme par l'application de la

méthode de la réduction par le numérateur. Autrement dit, elle en répand l'application sur tout le groupe des fractions, dont les dénominateurs augmentés de 1 deviennent les multiples de leurs numérateurs. Leonardo Pisano décrit la règle exprimant cette nouvelle forme de la méthode de la réduction par le numérateur en troisième lieu et sous le nom de la „tertia differentia disgregationis".

Cette nouvelle extension de la méthode de la réduction par le numérateur appliquée aux fractions n'appartenant point au groupe qui en admettait l'application aboutit naturellement à des calculs manqués. Les calculateurs firent alors connaissance des fractions qu'on amenait à ce groupe en en diminuant le numérateur de n'importe quel nombre, ou, ce qui veut dire la même chose, d'un groupe de fractions dont les dénominateurs augmentés de 1 deviennent les multiples de la différence entre le numérateur et un nombre quelconque. En séparant de chacune des fractions de ce groupe la part qui avait le nombre indiqué pour numérateur, on décomposait la fraction primitive en deux, nommément celle qui représentait la partie séparée et celle qui avait pour numérateur la différence entre le numérateur primitif et celui de la partie séparée. La seconde de ces fractions, appartenant aux fractions du groupe examiné plus haut, admet toujours l'application de la méthode de la réduction par le numérateur. Quant à la première elle ne l'admet que dans les cas où son numérateur équivaut à l'un des facteurs du dénominateur. Les fractions possédant cette qualité particulière forment évidemment un groupe nouveau, admettant l'application de la méthode de la réduction par le numérateur à leur complète décomposition en quantièmes, c'est-à-dire sans recourir à l'aide des autres méthodes. Cependant, à l'époque de la phase du calcul fractionnaire en question, les calculateurs ne connaissaient pas encore ce groupe de fractions dans sa forme générale, telle que nous venons de la représenter. Ils n'en connaissaient que les plus simples représentants, et ceux-là aussi dans un nombre fort limité, trois à peine, ainsi que le prouve l'oeuvre de Leonardo Pisano. Suivant ce dernier ils savaient qu'en augmentant le dénominateur de 1 on le rendait multiple: 1) de la différence entre le numerateur et l'unité au dénominateur, représenté par un nombre premier; 2) de la différence entre le numérateur et le nombre 2 au dénominateur qui est un nombre pair; 3) enfin de la différence entre le numérateur et le nombre 3 au dénominateur qui est le multiple de 3. Les règles servant dans ces cas à décomposer les fractions en quantièmes à l'aide des procédés indiqués tout à l'heure sont exposées dans le Liber Abbaci sous les titres correspondants de „quarta differentia disgregationis", „quinta differentia" et „sexta differentia".

Des observations du même genre sur les qualités des fractions ont pu amener à étendre la méthode de la réduction par le numérateur seulement sur un petit nombre de groupes des fractions, qui n'en admettaient point l'application immédiate. Ils n'étaient pas à même de donner à la méthode de la réduction par le numérateur la généralité désirée, et l'on obtint celle-ci à l'aide d'une toute autre voie. Les cas de l'application manquée de la méthode de la réduction par le numérateur avaient montré aux calculateurs attentifs qu'en divisant le numérateur et le dénominateur d'une fraction inférieure à l'unité par son numérateur, on obtient 1 pour numérateur, et pour dénominateur un nombre entier avec une fraction inférieure à l'unité. En rejetant celle-ci on avait une fraction plus grande que la première, au contraire, en l'augmentant jusqu'à 1, on en avait une plus petite. Cette dernière ayant l'unité pour numérateur pouvait être envisagée comme le premier membre de la décomposition en quantièmes de la fraction donnée. Pour en obtenir les autres membres il n'y avait qu'à soumettre à la même décomposition la différence entre la fraction donnée et celle qu'on acceptait comme le premier membre de sa décomposition. Le même procès, définissant comme nous venons de le voir, le premier membre de la décomposition aura évidemment pu être appliqué à cette différence d'abord, à la différence suivante plus tard, etc. jusqu'à ce qu'on en arrivât enfin à la différence représentée par un quantième, ou réduite à cette forme à l'aide de l'une des méthodes préalablement connues. Le nouveau procédé de décomposer les fractions en quantièmes, découvert ainsi par les calculateurs attentifs, conduit possible d'appliquer à toutes les fractions sans exception la méthode de la réduction par le numérateur — ou, ce qui est plus précis, le procès du calcul qui la composait — et répondait de cette manière au but d'en généraliser l'application, auquel tendait le progrès de la méthode elle-même. Leonardo Pisano dans son Liber Abbaci représente ce nouveau procédé, ou plutôt la règle qui en exprime le procès du calcul, dans une description détaillée et sous le nom de la „septima differentia". Nous y trouvons d'abord la remarque qu'il faut l'employer dans les cas où les procédés qui le précédent dans le cours du livre se trouvent inapplicables. Nous lisons ensuite que son application aux fractions décomposées, suivant les règles du deuxième, quatrième, cinquième et sixième de ces procédés nous amène à de meilleurs résultats que n'en donne l'application de ces mêmes règles. A l'époque de Leonardo Pisano, ces procédés ci épuisaient justement pour la méthode de la réduction par le numérateur tous les cas connus de son extension. Par conséquent, on ne peut s'empêcher de voir que l'endroit cité du Liber Abbaci témoigne, par le fait même de son existence, que si la décomposition des fractions en quantièmes n'est

pas abandonnée dans l'avenir, tous ces procédés seront remplacés dans la pratique du calcul par la septième règle toute seule, comme donnant les résultats les plus commodes. La généralité de son application n'aurait sans doute fait que d'en hâter l'accomplissement.

Le progrès initial du procédé de décomposer le numérateur en parties équivalentes aux facteurs du dénominateur, suivant la manière citée plus haut et représentant le premier cas de la réduction par le numérateur dans son extension, ne nous est donné que par le papyrus d'Akhmîm. Tout en étant très complet le Liber Abbaci ne contient pas d'indications à ce sujet. Cela tient peut-être à ce que les résultats du progrès en question ont été abandonnés à l'époque où ce livre fut écrit, ou à ce que l'emploi en devint si rare, que Leonardo Pisano ne fut pas à même de les connaître. Quoiqu'il en soit nous constatons le manque de ces résultats dans des manuscrits antérieurs au papyrus d'Akhmîm, et nous en constatons la présence justement dans celui-ci, appartenant à la littérature mathématique grecque et postérieur de deux ou trois siècles seulement à Diophante d'Alexandrie dont l'activité marque le point culminant du progrès de l'arithmétique en Grèce. Cela nous amène à croire que ces résultats ne sont pas atteints d'une manière empirique, c'est-à-dire en faisant la connaissance des propriétés des quotients ou des fractions, comme la plupart des procédés cités plus haut, mais par une voie spéculative, à l'aide des transformations du quotient ou de la fraction dans un but déterminé. C'est ce qui arrive en effet. La méthode servant à décomposer le dividende en parties équivalentes aux facteurs du diviseur dans les deux cas de son extension employés dans le papyrus d'Akhmîm pour les sortes de la division qui n'en admettent point l'application immédiate, est facilement déduite de l'invariabilité du quotient alors que le dividende et le diviseur sont multipliés par un seul et même nombre. Le premier et le plus grave de ces cas se rapportait à la forme de la division où la somme des facteurs du diviseur faisait le multiple du dividende. Afin que celui-ci l'égalât, autrement dit: afin d'amener la division dans le cas examiné à la forme qui permettrait l'application du procédé que l'on voudrait répandre, il n'y avait qu'à multiplier le dividende et le diviseur par le quotient provenant de la somme des facteurs du diviseur, divisée par le dividende. Cette transformation et celles qui la suivent exprimées dans les signes algébriques actuels nous donnent les identités que voici, représentant le cas de l'extension à examiner:

$$a : bc = aq : bcq = (b + c) : bcq = \frac{1}{cq} + \frac{1}{bq},$$

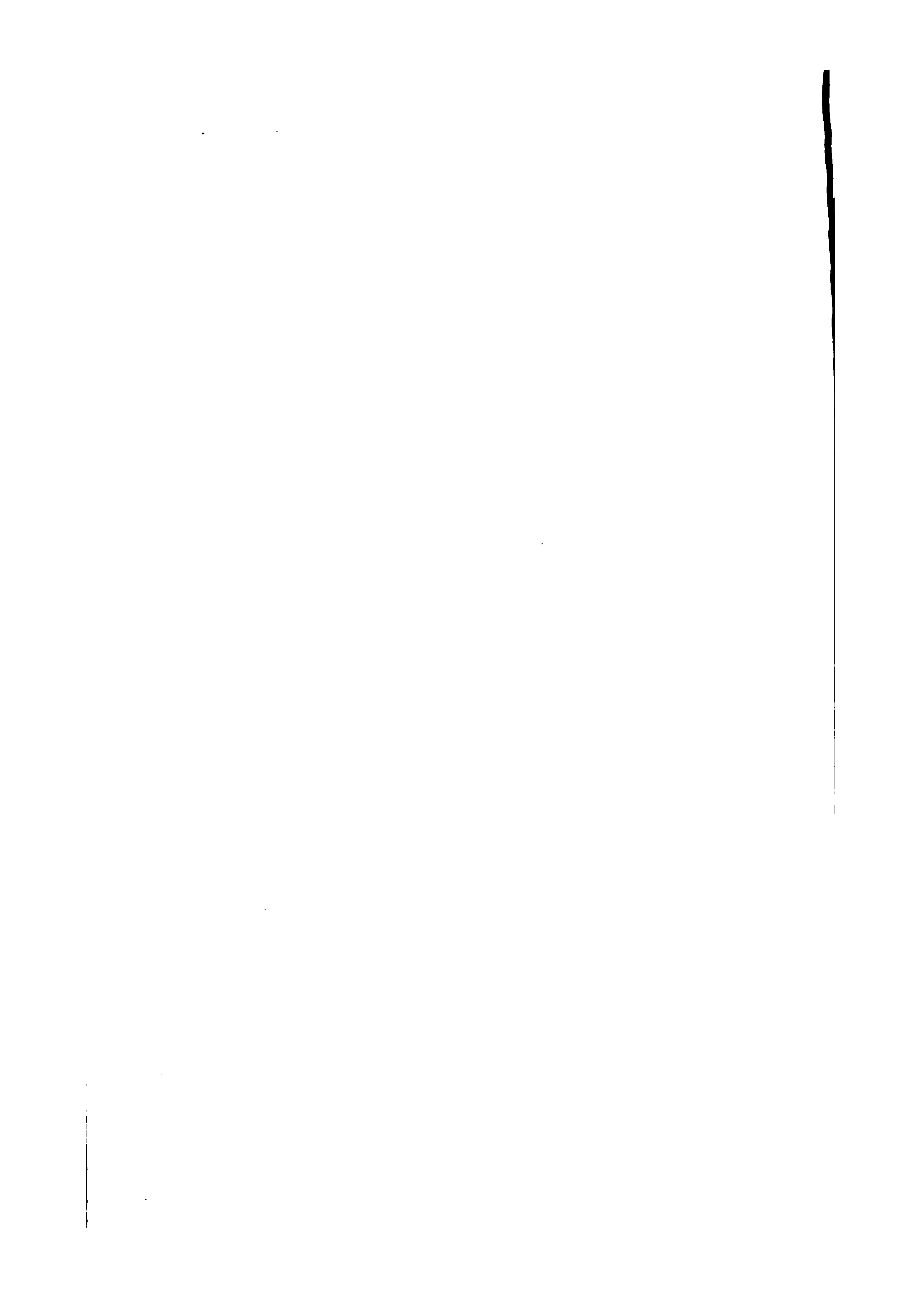
où $b + c = aq$. Le second cas de l'extension, cité dans le papyrus

d'Akhmîm, consiste dans l'application immédiate du procès des calculs fixé par le premier cas, à la transformation des cas de la division, dans lesquels le nombre, provenant de l'addition de quelques facteurs du diviseur aux multiples de ses autres facteurs, devient le multiple du dividende. Cette application figurée en signes algébriques actuels nous donne les identités suivantes

$$a : bc = aq : bcq = (b + mc) : bcq = \frac{1}{cq} + (m : bq),$$

où $b + mc = aq$. La seconde partie de l'expression obtenue demande à son tour la décomposition en quantièmes d'après l'un des procédés connus. Le calcul ne peut se passer de cette opération que dans le cas particulier, lorsque le nombre m est un des facteurs du diviseur bq. Dans les exemples que nous fournit ce cas particulier dans le papyrus d'Akhmîm, m est toujours l'un des diviseurs du nombre b. Excepté ces exemples le même papyrus nous en donne d'autres pour le cas général.

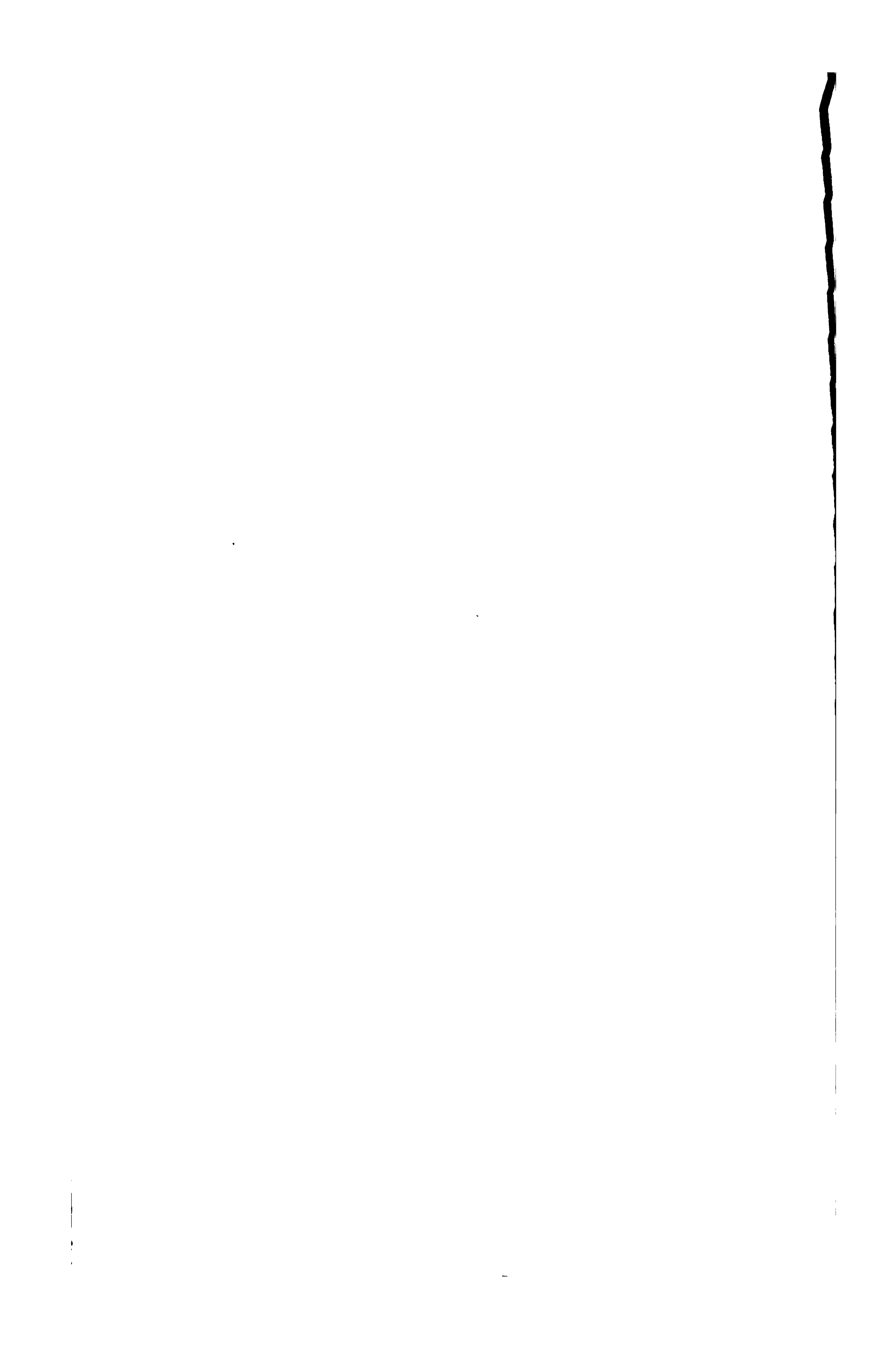
Appartenant à l'époque où les mathématiques grecques se trouvaient en décadence, le papyrus d'Akhmîm ne renferme aucune description des procédés que nous y trouvons employés pour exprimer le quotient en quantièmes. On n'y voit que des opérations successives faisant partie des procès du calcul qui représentent ces procédés, mais sans explications. Il faut ajouter que les exemples, auxquels est appliquée dans les deux cas de son extension donnés par le papyrus, la décomposition du numérateur en parties équivalentes aux facteurs du dénominateur, doivent être cités au nombre des plus simples. Cela tient à ce qu'ils ne font usage que de la décomposition du dénominateur en deux facteurs, ainsi que nous l'avons introduit dans les formules générales précédentes, afin de les faire accorder avec l'original.



ZUR GESCHICHTE DER PROSTHAPHAERETISCHEN METHODE IN DER TRIGONOMETRIE.

VON

A. v. BRAUNMÜHL
IN MÜNCHEN.



Herr M. CANTOR hat an mehreren Stellen[1]) seiner Geschichte der Mathematik darauf aufmerksam gemacht, welche Bedeutung die Methode der Prosthaphäresis vor Erfindung der Logarithmen für die Astronomen besafs, und ihre geschichtliche Entwickelung in allgemeinen Umrissen mit gewohnter Meisterschaft gezeichnet. Vielleicht bietet es daher etwas Interesse, wenn ich hier einige spezielle Bemerkungen über ihren Gebrauch, sowie einige Belege zu ihrer Entstehungs- und Entwickelungsgeschichte mitteile, die mir bei einem eingehenden Studium der trigonometrischen Methoden jener Zeit begegneten.

In einer kleinen Abhandlung, die 1896 in der *Bibliotheca mathematica* (105—108) erschien, glaube ich den Nachweis geführt zu haben, dafs der Erfinder dieser Methode im Abendlande der bekannte JOHANN WERNER von Nürnberg ist, wie dies, allerdings ohne zwingenden Beweis, schon MONTUCLA[2]) behauptete. Da aber WERNER's Schrift *„De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis libri V“*, in deren drittem Buche er die Prosthaphäresis auseinandersetzte, nie im Drucke erschien, so geriet die Methode in Vergessenheit uud tauchte erst am Ende des 16. Jahrhunderts wieder von Neuem auf, wo sie ihre volle Ausbildung erfuhr. Über diese Wiedererfindung wollen wir uns etwas näher verbreiten.

Um das Jahr 1584 kam an den Hof des Landgrafen WILHELM IV. von Hessen, der Kassel zu einem Zentralpunkt astronomischer Forschung gemacht hatte, ein gewisser PAUL WITTICH (1555?—1587) aus Breslau, welcher sich von 1580—1581[3]) bei TYCHO BRAHE auf der Insel Hveen aufgehalten hatte, und blieb daselbst längere Zeit. Von ihm berichtet

---

1) Bd. II, 417, 590, 658.

2) *Histoire des Mathématiques*. I, 584. Im *Cod. lat. mon.*. 24101, f. 18 finde ich nachträglich noch eine Bestätigung meiner Ansicht, indem daselbst JOH. PRAETORIUS WERNER direkt als den Erfinder bezeichnet.

3) Diese Datumsbestimmung ergibt sich aus dem Briefwechsel TYCHO's mit HAGECIUS und SCULTETUS. FRIIS, TYCHONIS BRAHE *epistolae ab anno 1568 usque ad annum 1587*. Hauniae 1876—86 in 4°. Aus dem Briefe TYCHO's vom 4. Nov. 1580 an HAGECIUS geht (p. 55) hervor, dafs WITTICH um diese Zeit schon auf Uranienburg war, und aus dem Schreiben an SCULTETUS vom 12. Okt. 1581 (p. 58—59), dafs er die Insel Hveen bereits wieder verlassen hatte.

Raymarus Ursus[4]) (Reimers), „er habe den ersten Fall der sogenannten prosthaphäretischen Methode den Kasseler Astronomen als eine Rechnungsmethode gezeigt, welche schon längere Zeit auf der Uranienburg bei astronomischen Rechnungen angewendet werde, ohne jedoch einen Beweis dafür anzugeben. Jobst Bürgi, der damals Hofuhrenmacher des Landgrafen war, habe dann dafür einen so fruchtbaren Beweis gefunden, dafs aus ihm die anderen prosthaphäretischen Fälle und sein (des Ursus) Beweis, ja die Auflösung aller Dreiecke durch diese Methode vermittelst der Sinusse, Tangenten und Sekanten hergeleitet werden können. Hiervon habe dann Jacob Curtius dem Clavius Nachricht gegeben, der diese Erfindung erweitert und auch dem Tycho 1590 darüber geschrieben habe."

Untersuchen wir die Richtigkeit dieser Erzählung etwas genauer, so haben wir zuerst die Erfindung der Prosthaphäresis auf der Uranienburg zu besprechen. Die Stelle[5]), an welcher Werner mit Hinweis auf seine Dreiecksbücher die prosthaphäretische Methode anwendet, um die Länge der *Spica virginis* zu finden, kannte Tycho Brahe nachweisbar, denn er spricht oft von Werner's Schrift *„De motu octavae sphaerae"* und greift speziell dessen Beobachtung der Spica an[6]). Doch konnte ihn der Wortlaut jener Stelle nur auf die Existenz eines praktischeren Rechnungsverfahrens, als das gewöhnliche ist, aufmerksam machen, das Verfahren selbst war absolut nicht daraus zu entnehmen. Dagegen ist es nicht unmöglich, dafs Tycho in die Dreiecksbücher Werner's direkt Einsicht bekam, als er 1575 Deutschland durchreiste und speziell in Wittenberg war. Denn dieselben waren nach Werner's Tode in die Hände Hartmann's in Nürnberg und von diesem an G. J. Rhaeticus gekommen, der längere Zeit in Wittenberg gelehrt hatte, und in dessen Nachlasse (er starb 1576) sie sich noch fanden, als sie Christmann in Heidelberg erhielt.[7]) Doch abgesehen von dieser wohl kaum mehr beweisbaren Vermutung ist es sicher, dafs

4) Scheibel teilt in seiner Einleitung zur mathem. Bücherkenntnis, 7. Stück, Breslau 1785 mit (p. 17 ff.), dafs Reimers das Angeführte in dem Werke *Tractatus de astronomicis hypothesibus.* Pragae 1597 in 4°. angebe; aber auch in desselben Autors Schrift *Fundamentum astronomicum* 1588 in 4°. finde ich p. 16 den Wittich erwähnt.

5) Dieselbe steht in Jo. Werneri *de motu octavae sphaerae tractatus primus. Propositio II.* Norimbergae 1522. Vgl. Cantor, Geschichte der Mathematik II. 418 ff.

6) Z. B. in seinem Briefe vom 20. Januar 1587 an Rothmann. T. Brahei *Epistolarum astronom. libri.* Norimb. 1601 in 4°. p. 76, ferner in *Astronomiae instauratae Progymnasmata* 1602. p. 221.

7) M. Cantor, Geschichte der Mathematik. II 417 und 555, sowie Christmann, *Theoria lunae ex novis hypothesibus et observationibus demonstrata.* Heidelbergae 1611 fol. p. 124.

TYCHO im Verein mit WITTICH schon 1580 die prosthaphäretische Methode ausarbeitete.

Dies geht zunächst aus jenem Briefe desselben vom 4. November 1580 an HAGECIUS hervor, der den WITTICH an TYCHO empfohlen hatte, indem hier TYCHO ausdrücklich sagt, dafs er sich im Verein mit WITTICH (*communicata opera*) viel mit der Ausbildung der Prosthaphäresis beschäftigte, die von der unangenehmen Multiplikation und Division befreie, und dafs jener die Grundlagen hierzu gelegt habe, allerdings auf Mitteilungen hin, die er seiner Zeit von TYCHO erhalten habe, als dieser mit ihm in Wittenberg zusammen war (1575).[8]) Auch KEPLER nennt die Prosthaphäresis einmal ein *„artificium Tychonicum“*[9]), dann wieder *„negotium Wittichianum“* und *„regula Wittichiana“;* er nahm also wohl auch an, dafs sie durch Zusammenwirken beider zustande kam, wie es auch am wahrscheinlichsten ist. Übrigens war TYCHO bekanntlich viel weniger gewandt im Rechnen, als im Beobachten und verdankte daher ohne Zweifel dem WITTICH nach dieser Richtung viel. In der That bezeichnet er ihn auch wiederholt als sehr geschickt in der Mathematik[10]). Ein weiteres Zeugnis dafür, dafs TYCHO und WITTICH in gemeinsamer Arbeit die fragliche Methode ausbildeten, gibt uns TYCHO's langjähriger Schüler LONGOMONTAN, indem er in seiner *Astronomia Danica* beide ausdrücklich als die Erfinder derselben bezeichnet.[11])

---

8) FRIIS, a. a. O. 55. *„Nam et ego talibus (triangulorum compendiis) insudavi atque in posterum ulterius, volunte numine, insudabo, quo haec ratio quae per προσθαφαίρεσιν procedit absque taediosa multiplicatione et divisione plenius excolatur et locupleatur, in quibus tamen ille necdum satis est versatus sed assuescet successive. Vicus enim is, quod et sponte fatetur, saltem initia quaedam hic iecisse admonitus iis verbis quae se a me audivisse, dum semel Wittembergam ipso illic studente trasirem et me horum studiorum caussa convenisset, licet ego eorum recordari non potuerim.“*

9) *Opera omnia.* ED. FRISCH II. 439 Anmerkung 94.

10) So sagt er in jenem Schreiben an ROTHMANN vom 20. Jan. 1587 „. . . *ob ingeniosam in Mathematicis praesertim quoad Geometriam attinet sollertiam . . .*“ und in einem Briefe vom 15. August 1588 an denselben (p. 113 ebenda) „. . . *in Geometria et Triangulorum ac numerorum tractatione expeditior et felicior erat*“ als im Beobachten nämlich; endlich kommt er am 14. Jan. 1595 ROTHMANN gegenüber noch einmal auf ihn zu sprechen, indem er sagt, er habe WITTICH's Ehre in keiner Weise verletzt (indem er ihn nämlich beschuldigt, dem Landgrafen vieles als seine eigene Erfindung mitgeteilt zu haben, was TYCHO angehöre) sondern: *„ubi laude dignus erat Wittichius, videlicet in Geometricis, et compendiis quibusdam triangulorum laudavi etc.*“, a. a. O. 296.

11) A. a. O. p. 10 heifst es: *„Si autem de huius compendii inventore opus quaerat . . .; neminem certe habeo, Tychone nostro et Vitichio Vratislaviensi antiquiorem: quorum scilicet mutua opera primum anno 1582, in Huaena, sphaerica*

In der von mir mitgeteilten Erzählung heifst es weiter, Bürgi habe für den ersten Fall der prosthaphäretischen Methode einen Beweis erdacht u. s. w. Bürgi selbst hat hierüber nichts veröffentlicht, aber Reimers teilt in seinem *Fundamentum astronomicum.* 1588. 16ᵛ und 17ʳ die beiden wichtigsten Regeln mit, indem er bezüglich ihrer Ableitung auf beistehende Diagramme verweist, von denen er das erste dem Paul Wittich, das

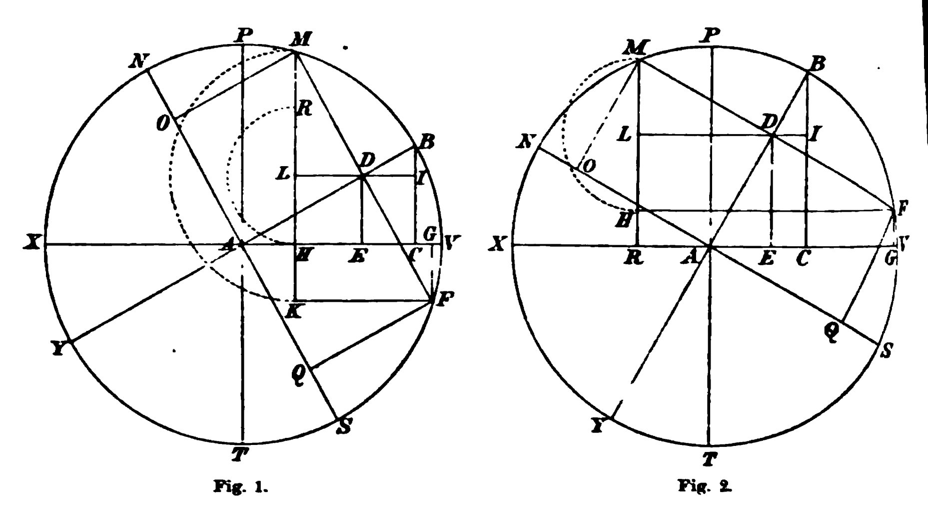


Fig. 1. Fig. 2.

zweite dem Bartholomäus Scultetus widmet, der ein Werk über Sonnenuhren geschrieben hatte. Es sei in beiden Figuren arc $BV = \alpha$, arc $SF =$ arc $MN = \beta$, dann ist in der ersten $\alpha + \beta < 90^0$, in der zweiten $\alpha + \beta > 90^0$. Ferner sei $FDM \perp AB$ und BC, DE, FG, $MH \perp AV$ gefällt, $HK = FG = MR$, bezüglich $HR = FG$ gemacht, und MO und $FQ \perp NS$ gezogen, das $\parallel MF$ läuft; macht man dann noch $JDL \parallel AV$, dann ist in der ersten Figur arc $VM = 90^0 - \beta + \alpha$, arc $VF = 90^0 - \beta - \alpha$, $MH = \sin(90^0 - \beta + \alpha)$, $FG = HK = MR = \sin(90^0 - \beta - \alpha)$. Aber $LH = DE = \frac{1}{2} RH = \frac{1}{2}(MH - MR) = \frac{1}{2}\{\sin(90^0 - \beta + \alpha) - \sin(90^0 - \beta - \alpha)\}$. Ferner ist $BC = \sin\alpha$, $AD = FQ = \sin\beta$ und $AB : AD = BC : DE$, somit für $AB =$ sin tot.

(I) Sin tot: $\sin\beta = \sin\alpha : \frac{1}{2}\{\sin(90^0 - \beta + \alpha) - \sin(90^0 - \beta - \alpha)\}$,

und aus der zweiten Figur folgt durch analoge Überlegungen

(II) Sin tot: $\cos\beta = \cos\alpha : \frac{1}{2}\{\sin(\beta + 90^0 - \alpha) - \sin(\beta - 90^0 + \alpha)\}$.

Nach dem von R. Wolf beigebrachten Beweismaterial[12]) glaube ich,

---

quaedam triangula tali pragmatiae pro studiosis Uranicis sunt subiecta." Das Datum 1582 ist nach dem oben Bemerkten nicht richtig.

12) Astronomische Mitteilungen XXXII 56—59. Vgl. auch Pitiscus, *Trigonometriae libri quinque Ed. secunda.* Aug. Vind. 1608. in 4°. lib. V 159—163.

dafs diese beiden Beweise auf Rechnung Bürgi's zu setzen sind, der sicher auch den III. Fall kannte, welcher für $\alpha + \beta = 90^0$ eintritt und allerdings erst von Clavius publiziert wurde. Dieser, heifst es in unserer Erzählung, habe von Jacob Curtius Nachricht erhalten und die Erfindung erweitert. In der That hat er nicht nur den eben erwähnten Zwischenfall angemerkt, sondern zum erstenmale in einer Druckschrift, in seinem *Astrolabium* von 1593 [13]) eine ausführliche Darstellung der prosthaphäretischen Regeln und ihrer Anwendung auf die Berechnung des ebenen Dreieckes und auf alle sechs Fundamentalgleichungen des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes gegeben.

Kamen dabei Tangenten vor, wie z. B. in der Formel $\sin \text{tot} : \text{tg}\, \delta = \text{tg}\, \varphi : x$, so setzte er $\text{tg}\, \delta = \sin \alpha$, $\text{tg}\, \varphi = \sin \beta$ und wandte die prosthaphäretische Methode auf diese Funktionen an. Dies ging aber natürlich nur so lange, als der Zahlenwert der Tangente den Sinus totus nicht überschritt; war dies der Fall, also etwa $\text{tg}\, \varphi > 10^n$, so dividierte er das betreffende Glied mit 10^n, setzte den Rest $= \sin \beta$ und mufste dann nach Anwendung der Prosthaphäresis auf das Produkt $\sin \alpha \sin \beta$ noch das Produkt aus $\sin \alpha$ und dem Quotienten addieren. Ähnlich im Falle beide Faktoren den Radius der Tafel überstiegen. Stand ferner der Sinus totus nicht an der ersten Stelle der Proportion, z. B. $a : 10^n = b : x$, so dafs $x = 10^n \cdot \frac{b}{a}$ zu berechnen war, so setzte er $a = \text{cosec}\, \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, $b = \sin \beta$, woraus sich wieder $x = 10^n \sin \alpha \sin \beta$ ergab, das auf die angeführte Weise weiterbehandelt wurde. Erst durch diese beiden Erweiterungen, die Clavius [14]) zuerst veröffentlichte, womit jedoch nicht gesagt sein soll, dafs sie nicht auch Bürgi und andere schon in Erwägung gezogen hatten, erhielt die Methode jene Allgemeinheit, die sie zur bequemeren Ausführung von Multiplikationen und Divisionen grofser Zahlen befähigte und namentlich für den rechnenden Astronomen zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel machte, bis sie durch Erfindung der Logarithmen langsam verdrängt wurde. [15])

---

13) *Opera mathematica* Chr. Clavii. Moguntiae 1612. 2°. t. II 94 ff.

14) Clavius verhehlte sich jedoch keineswegs, dafs die Methode durch das Umrechnen an Genauigkeit verliert, wenn statt der Sinusse die übrigen Funktionen eintreten; man suchte jedoch hierbei durch Benutzung vielstelliger Tafeln abzuhelfen.

15) Dafs auch andere diese Ausdehnung der Methode vor der Veröffentlichung des Clavius schon vornahmen, geht aus einem Schreiben des früheren kais. Prokanzlers Jacob Curtius an Tycho vom Jahre 1590 hervor (*Astronomiae instauratae mechanica* 1602 in fol.). Es heifst daselbst: „*Ex N. N. Plagiarii tui* (nämlich des Ursus) *libello, quem Fundamentum astronomicum inscripsit unicoque eius diagrammate, quod* Paulo Wittichio *dedicavit, construxi ego praeteritis*

Etwas später als CLAVIUS, nämlich 1598[16]), hat ein gewisser MELCHIOR JOESTEL, der aus Dresden[17]) stammte und in Wittenberg Mathematik lehrte, diese Methode für alle möglichen Fälle durchgearbeitet und sie auf die Behandlung aller Dreiecke angewandt. Ob sein ausführlicher Traktat im Drucke erschienen ist, weiſs ich nicht, halte es aber nicht für wahrscheinlich; dagegen ist er noch handschriftlich in der Hofbibliothek zu Wien (*Cod. palat.* 10686 Nr. 67) vorhanden[18]), worauf mich Herr MAX CURTZE gütigst aufmerksam machte. Diese Handschrift habe ich eingesehen und mache daraus folgende Mitteilungen. Der erste Traktat, der in dem angeführten Codex enthalten ist, führt den Titel „MELCHIORIS JOSTELII *Logistica Prosthaphaeresis Astronomica*" und umfaſst drei Regeln (auf 16 Folioseiten). Die erste (p. 1—12) gibt in einem Wortlaut für die drei Fälle $\alpha + \beta = 90^0$, $\alpha + \beta < 90^0$ und $\alpha + \beta > 90^0$ die prosthaphäretische Umsetzung des Produktes $\sin\alpha \cdot \sin\beta$. Die Beweise stimmen mit denen, die ich oben mitgeteilt habe, überein, werden an schön und exakt gezeichneten Figuren geführt und durch Zahlenbeispiele erläutert. Dabei mag vorübergehend bemerkt werden, daſs JOESTEL sich im Gegensatze zu anderen zeitgenössischen Schriftstellern, die alles in *extenso* ausschreiben, der abkürzenden Schreibweise st = sinus totus, sr = sin. rectus, T = tangens bedient und dieselbe konsequent beibehält. An die erste Regel schlieſst sich unter „*Notandum*" die Behandlung der Fälle an, in welchen an zweiter oder dritter Stelle der aufzulösenden Proportion eine Tangente, Sekante, ein Sinusversus oder sonst eine beliebige Zahl steht. Hierbei werden wieder drei Fälle unterschieden, je nachdem jedes dieser Glieder kleiner ist

---

diebus . . . novam sphaericorum triangulorum doctrinam, in qua per tabulam sinuum tangentium et secantium omnes tam rectangulorum quam obliquangulorum casus, sine ulla multiplicatione vel divisione per solam additionem et subtractionem facillime perficiuntur. Eam quoque ad te mitterem, nisi scirem te rem totam, solo eo diagramma inspecto facile executurum." Davon wird CURTIUS in jenem in unserer Erzählung erwähnten Briefe wohl dem CLAVIUS Mitteilung gemacht haben.

16) Dieses Datum gibt LONGOMONTAN, a. a. O. 10 „. . . *Cuius rei* (der Prosthaphäresis) *documentum mihi primum anno 1598 vir ille humanissimus, coram velut amico intimo ostendit.*"

17) G. ENESTRÖM, *Bibliotheca mathematica.* Anmerk. *) zu meiner Beantwortung der Anfrage 68.

18) SCHEIBEL teilt in seiner Einleitung zur mathem. Bücherkenntnis, 7. Stück, Breslau 1775 in 8°. p. 19 mit, daſs er sich im Besitze einer Abschrift dieses Traktates befinde. Da aber am Ende derselben steht: *Descripta haec sunt ex ipsius* JOESTELII *Manuscripto Prid. Idus Aug.* CIƆIƆCIX. *m.* DRSS. Wittebergae, das mir vorliegende Manuskript aber gar keine Datumsangabe enthält, so sind sie jedenfalls nicht identisch.

als der Sinus totus, oder eines derselben oder beide den Sinus totus übertreffen. Überall werden Beispiele beigefügt und die Rechnung wird an geometrischen Figuren erläutert. Die zweite Regel (p. 12—15) erstreckt sich auf den Fall, dafs das zweite oder dritte Proportionsglied den Sinus totus enthält, wofür wieder Beispiele gerechnet und an Figuren demonstriert werden. Kommt endlich der Sinus totus in keinem Gliede der Proportion vor, so mufs, wie die dritte Regel (p. 15—17) lehrt, die Prosthaphäresis doppelt angewendet werden. Hat man z. B. x aus der Proportion zu berechnen $a:b = c:x$, so bildet man: $a:b = \sin \text{tot}:y$ und dann $\sin \text{tot}:y = c:x$, und bestimmt zuerst y und dann x mit den vorhergehenden Regeln.

Auf die Anwendungen, die JOESTEL von dieser bis ins Detail ausgearbeiteten Methode macht, werde ich weiter unten zu sprechen kommen, wenn wir seine Vorläufer darin kennen gelernt haben.

Nachdem die Methode einmal als praktisch erkannt war, wurde sie auch sofort auf die verschiedensten Probleme der sphärischen Astronomie angewendet, selbst wo es sich um die Behandlung schiefwinkliger Dreiecke handelte, und REIMERS behauptet,[19]) die Anwendung auf die letzteren rühre ebenfalls von BÜRGI her. Sodann löst er „mit der Methode von BÜRGI" die beiden Aufgaben, die Winkel aus den drei Seiten und aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu berechnen.[20])

Diese Methode ist nichts anderes als die direkt aus der Figur des Analemmas entnommene Umgestaltung des Cosinussatzes mittelst der Prosthaphäresis. Durch Projektion der Kugel auf die Meridianebene gewinnt er direkt aus der Figur als *primum inventum* den Ausdruck[21]) $\frac{1}{2}\{\sin(90^0 - b + c) + \sin(c - 90^0 + b)\}$ und als *secundum inventum*: $\frac{1}{2}\{\sin(90^0 - b + c) - \sin(c - 90^0 + b)\}$, denen sich als *inventum tertium* $\sin(90^0 - a) - \frac{1}{2}\{\sin(90^0 - b + c) - \sin(c - 90^0 + b)\}$ anreiht.

Der gesuchte $\sphericalangle A$ folgt dann aus der Proportion:

$$\cos A : \text{sin. tot.} = \textit{invent. tertium} : \textit{invent. primum},$$

d. h. also in unserer Schreibweise, es wird A aus

19) *Fundamentum astr.* 19v.

20) Es heifst dort: „*Eodemque Byrgiano modo, verumque Byrgianum myrothecium veramque ac genuinam Cassellanam seu Hassiacam Astronomiam redolente artificio solvere docebimus*", und 22r preist er BÜRGI in der überschwenglichsten Weise, indem er sagt: „. . . *atque admirare (lector) Byrgianam solertiam . . . ac denique agnosce, quantis molestiis ac tediis ab ipso summo artefice liberati sumus . . .*

21) Das sphärische Dreieck ist hier mit ABC bezeichnet, seine Seiten, wie gebräuchlich, mit a, b, c.

$$\cos A = \frac{\cos a - \frac{1}{2}\{\cos(b-c) + \cos(b+c)\}}{\frac{1}{2}\{\cos(b-c) - \cos(b+c)\}} \tag{1}$$

berechnet. Um die Einfachheit der Rechnung zu erkennen, beachte man den Gang derselben: Man schlägt zuerst die Sinusse der Summe und der Differenz von c und $90^0 - b$ auf, der erste zum zweiten addiert und die Summe halbiert, gibt das *inv. primum,* dieses von dem ersten Sinus abgezogen, gibt das *inventum secundum,* welches wieder von $\sin(90^0 - a)$ abgezogen, das *inv. tertium* liefert. Die Auflösung der Proportion gibt dann $\sin(90^0 - A)$, zu dem man mittelst der Tafel A bestimmt.

Bei der Lösung der zweiten Aufgabe, welche die Berechnung der Formel

$$\cos a = \tfrac{1}{2}\{\cos(b-c) + \cos(b+c)\} + \tfrac{1}{2}\{\cos(b-c) - \cos(b+c)\}\cos A \tag{2}$$

involviert, ist aber Bürgi, wie Wolf[22]) und nach ihm Herr Cantor[23]) mitgeteilt haben, noch weiter gegangen, indem er auch die letzte noch nötige Multiplikation zu ersparen lehrte und hierzu, wie wir heute sagen, einen Hilfswinkel einführte. Wie dies geschah, ist in dem Werke des Bartholomaeus Pitiscus ausgeführt, der die Methode ausdrücklich als von Bürgi herstammend angibt.[24]) Wir wollen seine Rechnung an dem von ihm mitgeteilten Beispiel erläutern, wobei wir uns genau an die dort gegebene Schreibweise halten, um zu zeigen, wie man damals verfuhr. Es sei in

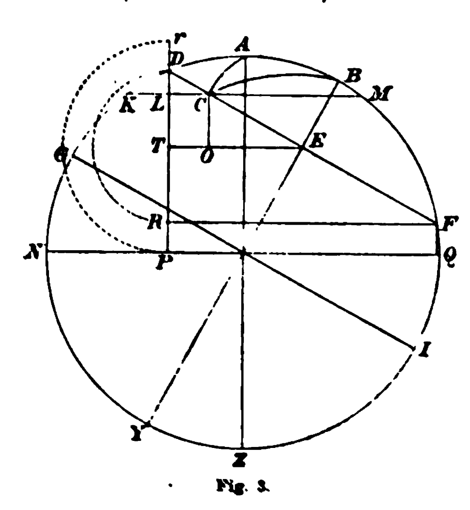


Fig. 3.

Figur 3 gegeben $AB = c = 26^0 20'$, $BC = a = 59^0 58'$, $\sphericalangle B = 50^0 4'$, gesucht $AC = b$.

$26^0\ 20'$ (= arc $GN = c$)
$30^0\ \ 2'$ (= arc FJ = arc $GD = 90^0 - a$)
Summe: $56^0\ 22'$ (= arc DN), Sin. = DP = 8325991
Diff. $3^0\ 42'$ (= arc FQ) Sin. = PR = 645323 (= Dr)
Summe Pr = 8971314
Hälfte TP = 4485657 = *Invent. I*
$PR = Dr$ = 645323
Diff. DT = 3840334 (= $\sin x$).

22) Astronomische Mitteilungen XXXII 61. 23) Cantor II. 590.
24) B. Pitiscus, Trigonometria. Aufl. v. Jahre 1608 133. Aufl. v. 1612 173. Wolf kannte diese Mitteilung des Pitiscus nicht.

Hieraus mittelst der Tafel:

$$
\begin{array}{lll}
 & x = 50^0\ 4' & \\
 & \sphericalangle B = 22^0\ 35'\ \ 1{,}5'' & \\
\text{Summe:} & = 72^0\ 39'\ \ 1{,}5'' & \text{Sin.} = 9545031 \\
\text{Diff.} & = 27^0\ 28'\ 58{,}5'' & \text{Sin.} = 4614841 \\
 & & \text{Diff.} = 4930190
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Hälfte} = CO = LT = 2465095 & = \textit{Invent. II.} \\
4485657 & = \textit{Invent. I.} \\
\text{Summe } LP = 6950752 & = \text{Sin. des Compl. der der dritten Seite.}
\end{array}
$$

Die Rechnung wird in unserer Schreibweise durch die Formel

$$\cos b = \tfrac{1}{2}\{\cos(a-c) + \cos(a+c)\} + \tfrac{1}{2}\{\sin(B+x) - \sin(B-x)\} \quad (3)$$

dargestellt, indem $\sin x = \frac{1}{2}\{\cos(a-c) - \cos(a+c)\}$ gesetzt wird.

M. Joestel hat diese Methode auch noch auf den Fall der Gleichung (1) S. 10 ausgedehnt,[25]) indem er daselbst den Zähler $= \sin x$, den Nenner $= \operatorname{cosec} y$ setzte und dann $\frac{\sin x}{\operatorname{cosec} y} = \sin x \sin y$ wieder prosthaphäretisch behandelte.

So unzweifelhaft es mir ist, dafs diese letzten endgiltigen Ver besserungen, d. h. die Einführung der Hilfswinkel Bürgis, beziehungsweise Joestels Eigentum sind, ebenso bin ich überzeugt, dafs, trotz Reimers' gegenteiliger ausdrücklicher Behauptung, die Anwendung der Prosthaphäresis auf die schiefwinkligen Dreiecke, schon von Wittich und Tycho vollzogen wurde. Um diese Ansicht zu begründen, müssen wir zuerst einen Blick auf ein von Tycho hinterlassenes Manuskript[26]) über Trigonometrie werfen, das zwischen 1591 und 1595 niedergeschrieben wurde. Dasselbe ist nach Angabe des Herausgebers dem sogenannten kleinen Kanon des Rhäticus von 1551[27]) angebunden, und schon dieser Umstand weist darauf

25) In dem oben zitierten Kodex folgt nämlich nach der *Prosthaphaeresis Astronomica* noch ein Traktat: „Melchioris Joestelii *Triangula Astronomica tum sphaerica, tum rectilinea*" (p. 17—58). Obige Methode findet sich daselbst p. 35 und 39 angewendet.

26) Es führt den Titel: *Triangulorum planorum et sphaericorum praxis mathematica,* befindet sich in der k. k. Universitätsbibliothek zu Prag und ist von F. J. Studnička 1886 in Photographotypie herausgegeben worden. Vgl. auch Cantor II 556.

27) Von diesem Kanon, in welchem sich zum erstenmale alle sechs trigonometrischen Funktionen tabellisiert finden, und der schon bald nach seinem Erscheinen zu den gröfsten Seltenheiten zählte, besitzt die Münchener Hof- und Staatsbibliothek ein Exemplar.

hin, dafs es nur Notizen enthält, die Tycho für sich und seine Schüler zum Gebrauche dieses Kanons machte, ohne zunächst an eine Publikation der Schrift zu denken. Diese Ansicht wird noch dadurch bestätigt, dafs die Figuren nur angedeutet, Beweise aber nirgends ausgeführt sind.[28])

In dieser Schrift, die auch sonst manches Interessante enthält, wendet Tycho seine prosthaphäretische Methode auf die Lösung der beiden Aufgaben an, die wir bei Raymarus Ursus fanden (Dogma VI und IX der sphärischen Dreiecke) und zwar ganz in derselben Weise, wie es dieser dem Bürgi zuschreibt, nur kennt er die endgiltige Verbesserung des letzteren noch nicht und behält deshalb die letzte Multiplikation bei. Auch behandelt er in gleicher Weise den einen der polaren Fälle, wobei er jedoch ein falsches Zeichen angibt, da er einfach nur Seiten und Winkel vertauscht (Dogma VII).

Da das vorliegende Manuskript Tycho's frühestens von 1591 stammt, so hätten wir keinen Grund gehabt, oben die von Reimers behauptete Priorität Bürgi's inbezug auf die prosthaphäretische Umgestaltung des Cosinussatzes in Frage zu stellen, wenn nicht verschiedene Stellen in dem uns noch erhaltenen Briefwechsel des dänischen Astronomen darauf hinwiesen, dafs er schon lange im Besitze jener Anwendungen war, ja dafs Exemplare seines Heftes schon früher existierten und sich in den Händen seiner Schüler befanden. Was ich über diesen Punkt auffinden konnte, will ich im Folgenden zusammenstellen.

Anschliefsend an eine Bemerkung Tychos im zweiten Buche seines Werkes „*De Aetherei mundi recentioribus phaenomenis*", wo er p. 281 angibt, dafs man aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel die anderen Winkel und die dritte Seite in einem ebenen Dreieck auch ohne Zerfällung desselben in zwei rechtwinklige berechnen könne, ersucht Magini[29]) den Gellius Sascerides,[30]) er möge ihm dieses Verfahren übermitteln. In seiner Antwort auf diesen Brief[31]) teilt ihm Sascerides mit, an diese Methode könne er sich nicht mehr erinnern, dagegen schreibt er ihm „aus dem Gedächtnis" gerade jene prosthaphäretische Lösung der beiden Aufgaben, aus zwei Seiten

---

28) In einem Briefe an seinen Schüler Gellius Sascerides vom 1./II. 1591 sagt Tycho allerdings, dafs er diese seine Methode im ersten Teile seiner Astronomie veröffentlichen werde. (An. Favaro. *Carteggio inedito di* Ticone Brahe *etc. con* G. A. Magini. Bologna 1886. in 8°. 204.) Das ist aber nicht geschehen.

29) Brief vom 15. Juli 1590. A. Favaro, *Carteggio*. 387.

30) Gellius Sascerides (1562—1612) studierte 1581—87 in Wittenberg und kam dann zu Tycho, wo er bis 1588 blieb. 1589 lernte er Magini in Padua kennen, mit dem er in lebhaften Briefwechsel trat.

31) *Carteggio*. p. 358 ff.

und dem eingeschlossenen Winkel und aus drei Seiten in einem sphärischen Dreiecke die übrigen Stücke zu finden, die TYCHO in seinem VI. und IX. Dogma gibt und sagt, dafs er sie früher einmal bei TYCHO gelernt habe.[32]) Im weiteren Texte seines Briefes sagt er dann, dafs diese Regeln wohl 1588 von URSUS veröffentlicht worden seien, aber dem TYCHO angehörten; URSUS habe sie, wenn nicht durch TYCHO selbst, bei dem er sich früher ebenfalls aufgehalten, so doch durch den Landgrafen von Hessen erfahren, dem sie ein gewisser PAUL WITTICH mitgeteilt habe. Endlich verspricht er MAGINI, sich wegen der fraglichen Aufgabe über das ebene Dreieck an TYCHO selbst zu wenden. Das thut er denn auch und teilt TYCHOS' Antwort dem MAGINI in einem Briefe vom 1./II. 91 wörtlich mit.[33]) Die für uns wichtige Stelle in diesem Antwortschreiben lautet: „Wie man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel in einem (ebenen) Dreieck das Übrige ohne Benützung der Höhe leichter findet, als gewöhnlich, kannst du ihm aus meinem (TYCHO's) IV. Dogma[34]) über die ebenen Dreiecke erklären, damit er zufrieden ist. Auch ist es mir nicht unangenehm, wenn du ihm die Operationen mittelst des VI. und IX. Dogmas unserer Sätze mitteilst, zumal da ich sehe, dafs gegenwärtig die Beweise für diese und ähnliche Sätze von anderen, die sich mit fremden Federn schmücken, verbreitet werden. Die Sache verhält sich nämlich so, dafs jener Plagiator URSUS[35]) jene Beweise und kompendiosen Zahlenrechnungen inbezug auf die Dreiecke, welche er für die seinigen ausgab, von dem Automatenverfertiger des Landgrafen JUST BÜRGI erhielt, der sie von WITTICH erlangt hatte. Dem WITTICH aber hatte ich, als er vor deiner (SASCERIDES) Ankunft bei mir, einige Zeit hier verweilte, über diese und andere auf leichtere Behandlung der Mathematik bezüglichen Dinge rückhaltlos Mitteilungen gemacht, und dieser verbreitete manche derselben . . ., als er von hier zu dem Landgrafen von Hessen sich begeben hatte. Diese werden nun von anderen schamlos mit frecher Stirn als ihre eigenen Erfindungen ausgegeben, so dafs dem eigentlichen Erfinder fast keine Ehre mehr bleibt . . ."

Da nun bekanntlich TYCHO kein sehr glaubwürdiger Zeuge ist, wenn

---

32) *„Et cum mihi de reliquis non constet, illam supputationem triangularem, cuius facit mentionem* (TYCHO nämlich), *quam ipse aliquando a clarissimo* TYCHONE *accepi, lubens tecum, quantum memoria suppeditat, communicabo.* a. a. O. 388.

33) A. a. O. 200—204.

34) Dieses Dogma enthält den von THOMAS FINK in seiner *Geometria rotundi* 1583 p. 282 und 292 zum erstenmale veröffentlichten Tangentensatz.

35) Auf URSUS war TYCHO schon deshalb sehr erbost, weil jener behauptete, das Tychonische Weltsystem zuerst erfunden zu haben.

es gilt, seinem eigenen Ruhme zu dienen, so möchte ich die Richtigkeit der hier ausgesprochenen Behauptung, seine Sätze seien ganz seine eigene Erfindung, in Zweifel ziehen,[36]) zumal diese Behauptung mit jener weiter oben angeführten Briefstelle, nach welcher WITTICH nicht nur die Grundlagen der Theorie schuf, sondern auch bei ihrer Ausarbeitung stark beteiligt war, nicht übereinstimmt. Dagegen gestattet die angezogene Stelle im Zusammenhalt mit den Aussagen des SASCERIDES wohl den Schlufs, dafs seit WITTICH's Anwesenheit auf Uranienburg jene vereinfachenden Rechnungsmethoden in ihrer ganzen Ausdehnung, also auch auf die schiefwinkligen Dreiecke, daselbst in Anwendung kamen, und die Aufzeichnungen schon existierten, die wir aus TYCHO's Manuskript kennen.

Zum Schlusse meiner Betrachtungen will ich noch kurz auf jenen in Anmerkung 25 zu S. 11 erwähnten zweiten Traktat des MELCHIOR JOESTEL eingehen, weil dieser die vollkommenste Durcharbeitung der Anwendung der Prosthaphäresis auf die Lösung sämtlicher Dreiecksfälle bietet, die damals geleistet wurde, und überdies noch keine Besprechung von Seite eines Geschichtsschreibers erfahren hat.

Anschliefsend an RHAETICUS (das *Opus Palatinum* desselben war 1596 erschienen) gibt er zunächst (p. 18—21) eine Unterscheidung der verschiedenen „Spezies" oder *„Formae"*, wie sie RHAETICUS nennt, der sphärischen Dreiecke, indem er für die rechtwinkeligen sechs, für die schiefwinkeligen 10 Fälle unterscheidet. Es war dies damals noch nötig, da man ja die Funktionen negativer Winkel oder von Winkeln gröfser als 90° (mit Ausnahme des Sinus eines Winkels im zweiten Quadranten) nicht zu bilden verstand. Zur Lösung der bekannten Fundamentalaufgaben der Dreieckslehre gibt er dann 13 Theoreme an, wobei er sich bestrebt, nur die Funktion Sinus zu benützen, da er alle Lösungen mit der prosthaphäretischen Methode behandelt und, wie CLAVIUS, sehr wohl weifs, dafs hierzu die Sinusse am verwendbarsten sind. Die von ihm mitgeteilten Theoreme waren damals sämtlich längst bekannt, neu war nur ihre Formulierung im Sinne der Prosthaphäresis mit Einschlufs aller möglichen Fälle. Gerade dieses Hineinpressen aller Möglichkeiten in den Wortlaut eines einzigen Satzes macht aber die Theoreme äufserst schwerfällig. So nimmt z. B. der Wortlaut des Cosinussatzes eine ganze Folioseite (34) ein.[37]) Dagegen sind die zahlreichen numerischen Beispiele, die jeder Regel beigegeben sind,

---

36) WITTICH gegenüber brauchte sich TYCHO damals auch nicht mehr in Acht zu nehmen, da derselbe bereits 1587 gestorben war.

37) Das Gleiche gilt von dem Cosinussatze für die Winkel (p. 38), der übrigens im Gegensatze zu TYCHO für alle einzelnen Fälle richtig angegeben wird.

in eleganter und übersichtlicher Weise durchgerechnet, ähnlich wie wir das in dem Beispiele aus PITISCUS' Trigonometrie sahen.[38])

JOESTEL's Abhandlung ist weit über die Grenzen Wittenbergs hinaus bekannt geworden, wenn sie auch kaum jemals im Drucke erschienen sein dürfte, und hat jedenfalls dazu beigetragen, daſs sich die Prosthaphäresis noch lange nach Erfindung der Logarithmen erhielt. So schloſs sich LONGOMONTAN in seiner schon erwähnten *Astronomia Danica* 1622 völlig an JOESTEL an und gab der Methode in dieser ausgebildeten Form noch den Vorzug vor den ihm wohlbekannten Logarithmen, „weil nach seiner Ansicht die Lehre von den Logarithmen zu sehr von dem beständigen Einblick in den Gang des Beweises ablenke, der doch den Lernenden ganz besonders notwendig sei" (ebenda p. 10). Dieses Urteil stand damals nicht vereinzelt da und hatte auch eine gewisse Berechtigung, da die Theorie der Logarithmen noch keineswegs so fest fundiert war, wie es heute der Fall ist.

Ein Beweis dafür, wie schwer sich die Astronomen von der liebgewonnenen Methode trennten, ist, daſs noch 1634 der Hamburger FROBENIUS in seinem *„Clavis universae trigonometriae"* neben den Logarithmen sich ihrer bedient, und 1636 der jüdische Astronom EMANUEL PORTO in Padua in seinem *„Porto Astronomico"* an JOESTEL's Abhandlung sich anschlieſsend die prosthaphäretische Methode *in extenso* entwickelt.[39])

---

38) Die drei Theoreme, mit denen die ebene Trigonometrie behandelt ist, bieten kein weiteres Interesse.

39) Vgl. WERTHEIM, Monatsschrift für Geschichte und Wissenschaft des Judenthums. 41. Jahrgang. 616 ff.

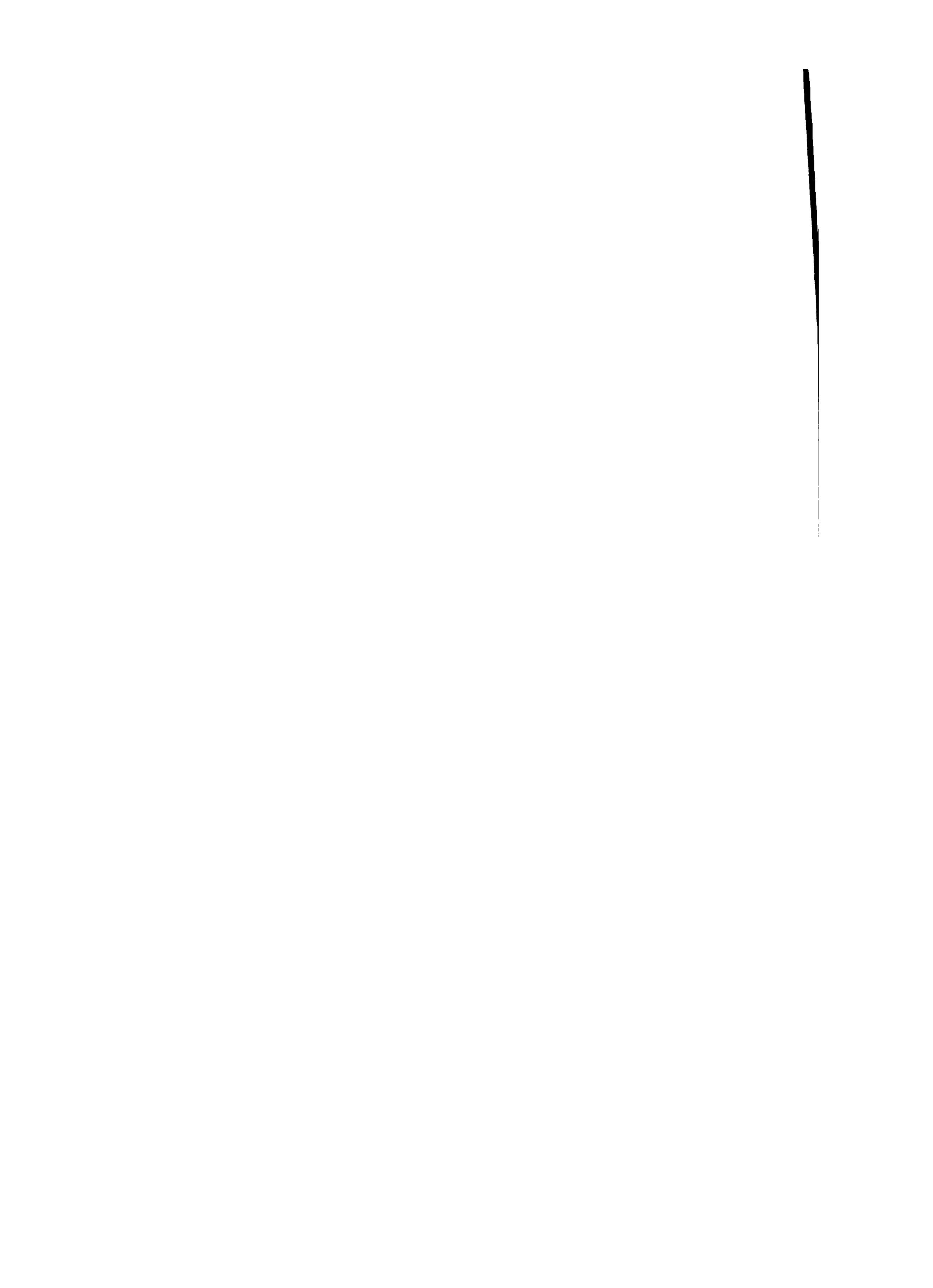
NOTES

ON THE HISTORY OF LOGARITHMS

BY

FLORIAN CAJORI,

COLORADO SPRINGS, COLO., U. S. A.



In this paper we shall consider two points in the history of logarithms:

(1) the origin and prevalence, during the seventeenth and eighteenth centuries, of the error regarding the identity of natural logarithms and those published by NAPIER in his *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* of 1614;

(2) the earliest publication of a table of natural logarithms.

The *theory* of natural ("hyperbolic") logarithms apparently first suggested itself to mathematicians engaged in the mensuration of spaces between the hyperbola and its asymptotes. About a quarter of a century later, in 1695, EDMUND HALLEY discarded geometrical figures and published a remarkable article containing a purely arithmetical theory of logarithms.[1]) In this original and meritorious investigation he lays great stress upon what we now call the "modulus". By NAPIER's logarithms HALLEY understands those which give BRIGGS's logarithms, when divided by 2.302 585 or when multiplied by 0.43429448. From this statement it appears that HALLEY considered NAPIER's logarithms to be identical with natural logarithms, and we must look upon him as one of the first (perhaps the first) to commit this error. That the two systems are not identical is shown by the following formula[2]):

$$\log_N x = 10^7 \log_e \frac{10^7}{x}, \qquad \text{I.}$$

During the eighteenth century this misunderstanding regarding the two systems does not appear to have been as wide-spread as it was later. On consulting mathematical dictionaries and other books of the seventeenth and eighteenth centuries, which are accessible to me, I find that VITALI[3]) and OZANAM[4]) do not touch the point in question, for the former directs

1) *Phil. Trans.*, 1695, No. 216. His article is known to me only through the account of it given in HUTTON, *Math. Tables*, 5th ed., London, 1811, pp. 107—110; M. CANTOR, *Gesch. d. Math.*, III., pp. 80—82; R. REIFF, *Gesch. d. unendlichen Reihen*, Tübingen, 1889, pp. 38—40; E. STONE, *New Mathematical Dictionary*, 2nd ed., 1743, article "Logarithms".

2) Consult S. GÜNTHER, *Vermischte Untersuch.*, Leipzig, 1876, pp. 271—278.

3) HIERONYMO VITALI, *Lexicon Mathematicum*, Parisiis, 1668, article "Logarithmi".

4) M. OZANAM, *Dictionaire mathematique*, Paris, 1691, p. 50.

his remarks to common logarithms, while the latter devotes only six lines to the whole subject of logarithms. A fuller treatment is given by E. STONE.[5]) He speaks of NAPIER's and of natural logarithms without confusing the two, though, to be sure, he nowhere distinctly contrasts the two systems. SAVERIEN[6]) briefly describes NAPIER's logarithms. "NEPER appelle 0 le sinus entier, de sorte que les logarithmes vont en décroissant, pendant que les sinus vont en croissant, & qu'ils deviennent par-là négatifs, c'est-à-dire moins que rien, pendant que les tangentes deviennent plus grandes que le raïon, c'est-à-dire qu'elles vont au dessus de 45 dégrés. Ainsi ces logarithmes sont tous différens de ceux dont nous nous servons aujourd'hui." But the author contradicts himself, for on the very same page he says that the "logarithmes de NEPER ... ont une forme différente de ceux de BRIGGE dont on fait communément usage. Cependant un de ces logarithmes est à un logarithme correspondant de BRIGGE, comme 2.302585092994[7]) est à 1000000000000". The author does not explain how it is possible for NAPIER's logarithms to increase as the sine decreases, and at the same time to be derivable from BRIGGS's in the manner specified. The confusion appears to have arisen from the desire to associate NAPIER's name with logarithms, at a time when logarithms of the kind published by him were becoming obsolete and his books on logarithms were very scarce, while tables of natural logarithms were not usually accessible.

The confusion marked in the writings of HALLEY and SAVERIEN spread among French writers. MONTUCLA, the great mathematical historian of the eighteenth century, made the same mistake;[8]) BOSSUT helped to perpetuate the error.[9]) In England CHARLES HUTTON, who in 1785 published the first edition of his *Mathematical Tables* (which includes an elaborate and in many respects excellent history of logarithms) describes NAPIER's logarithms correctly,[10]) but subsequently (p. 85) he speaks of "the right-angled hyperbola, the side of whose square inscribed at the vertex is 1, gives

---

5) *Op. cit.*, article "Logarithms".

6) Monsieur SAVERIEN, *Dictionnaire Universel de Mathématique et de Physique*, Paris, 1753, Tome second, article "Logarithme". In CANTOR's *Gesch. d. Math.*, III., p. 490, the date of this dictionary is erroneously given as 1752.

7) The decimal point in this number is evidently a misprint. It should have been omitted. SAVERIEN's inaccuracy as a writer is illustrated by his statement that NAPIER took the sinus totus equal to zero. As a matter of fact, NAPIER took the *logarithm* of the sinus totus equal to zero.

8) MONTUCLA, *Histoire des mathématiques*, Tome II., Paris, 1758, p. 21.

9) CHARLES BOSSUT, *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*, Paris, 1802, Tome I., pp. 268—271.

10) HUTTON, *op. cit.*, 5th ed., pp. 25—27, 42—49.

NAPIER's logarithms". DE MORGAN carefully explains the difference between NAPIER's and natural logarithms in the article "Tables" in the *English Cyclopaedia,* but in DE MORGAN's *Budget of Paradoxes* (p. 70) GÜNTHER has found a passage which is inaccurate.[11])

Of german books, we have consulted CHRISTIAN WOLFF,[12]) who speaks of NAPIER's and BRIGGS's logarithms, but does not mention the natural. It is a pleasure to find that KÄSTNER presents the subject in a way free of error. In his *Geschichte*[13]) he refers to an article, which he had written, setting forth the exact relation between the two systems. Nevertheless the misconception became prevalent in Germany also. So wide-spread was this error in Europe that WACKERBARTH was induced to make the following statement:[14]) "Dans presque tous les ouvrages élémentaires anglais, français et allemands, dont on fait usage dans l'enseignement des mathématiques, il est dit que les logarithmes naturels ou hyperboliques sont identiques aux logarithmes népériens."

Proceeding to the question relating to the earliest publication of tables of natural logarithms, we meet the name of JOHN SPEIDELL, who, in 1619, brought out his *New Logarithmes,* only five years after NAPIER's publication of the *Descriptio.* SPEIDELL's book received little attention, either during his life-time or since. It would seem as if the earliest publication of a table of natural logarithms should be mentioned in histories of mathematics, but, so far as I know, no general history by a German, French, or British author, takes notice of SPEIDELL. The great English *Dictionary of National Biography,* now being completed, does not give his name, although it mentions old writers of elementary arithmetics, such as HODDER and HUNT. However, SPEIDELL's *New Logarithmes* has been described in at least three special historical articles. HUTTON speaks of it in the "Introduction" to his *Tables;*[15]) AUGUSTUS DE MORGAN makes a careful study of his book in the article "Tables" in the *English Cyclopaedia;* J. W. L. GLAISHER gives a brief account of SPEIDELL's work in the report on "Tables" in the *British Association Report,* 1873, pp. 1—175.

I have tried for a long time to secure a copy of SPEIDELL's work, but have failed. Through the kindness of Dr. GARNETT of the British Museum I have before me photographs of the title-page of the edition of 1622 and of one page of the tables. The title-page is as follows:

---

11) GÜNTHER, *op. cit.*, p. 273.

12) *Mathematisches Lexicon,* Leipzig, 1716, article, "Logarithmus".

13) KÄSTNER, *Gesch. d. Math.* 3ter Band, 1799, p. 87.

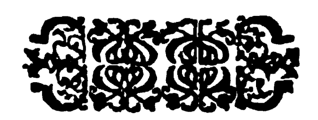
14) *Les Mondes,* Tome XXVI, p. 626.

15) *Op. cit.*, 1811, p. 30.

NEW LOGARITHMES.

THE
First inuention whereof, was, by the Honourable Lo: IOHN NEPAIR Baron of Marchiston, and Printed at Edinburg in *Scotland*, Anno: 1614. In whose vse was and is required the knowledge of Albraicall Addition and Substraction, according to + and —

These being Extracted from and out of them (they being first ouer seene, corrected, and amended) require not at all any skill in Algebra, or Cossike numbers, But may be vsed by euery one that can onely adde and Substract, in whole numbers, according to the Common or vulgar Arithmeticke, without any consideration or respect of + and —



By IOHN SPEIDELL, *professor of the Mathematickes*, and are to bee solde at his dwelling house in the Fields, on the backe side of *Drury Lane*, betweene *Princes* streete and the New Playhouse.

The 4. Inpression.
1622.

The title of this book is of interest because it contains about all the information we possess regarding SPEIDELL's profession, place of residence and motive in modifying NAPIER's logarithms. His sole object was to simplify matters for persons unacquainted with the use of negative quantities. Just what changes were made may be seen best by comparing the following specimens of NAPIER's and SPEIDELL's tables.

From NAPIER's *Tables.*

Gr. 0   0   + | −

min.	Sinus	Logarithmi	Differentiae	Logarithmi	Sinus	
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562746	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
27	78539	48467431	48467122	309	9999692	33
28	81448	48103763	48103431	332	9999668	32
29	84357	47752859	47752503	336	9999644	31
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30

| 89

From SPEIDELL's *Tables.*

Deg. 0.   Nombers for the

M.	Sine.	Comp.	Tangent.[16])	Comp.	Secant.	Comp.	
30	525861	999996	525865	474135	4	474139	30
31	529140	999996	529144	470856	4	470860	29
32	532315	999996	532320	467680	4	467685	28
33	535392	999995	535397	464603	5	464608	27
34	538377	999995	538382	461618	5	461623	26
35	541276	999995	541281	458719	5	458724	25
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
57	589934	999986	589947	410053	14	410066	3
58	591783	999986	591797	408203	14	408217	2
59	593492	999985	593507	406493	15	406508	1
60	595172	999985	595188	404812	15	404828	0
	Comp.	Sine.	Comp.	Tangent.	Comp.	Secant.	M.

Nombers for the   89. Deg.

16) This period is omitted in the original work.

SPEIDELL did not advance a new theory. He simply aimed to make all the logarithms in his table positive. To achieve this he subtracted NAPIER's numbers from 10^8 and then discarded the last two digits. NAPIER gave *sin.* $30' = 87265$ (the radius being taken 10^7 units) and the *log. sin.* $30' = 47413852$. Subtracting this logarithm from 10^8 leaves 52586148. SPEIDELL gives in his table *log. sin.* $30' = 525861$. In both NAPIER's and SPEIDELL's tables the logarithms appear as integral numbers. The same is true of the values for the sines in NAPIFR's tables: *Sin.* 30′ is really equal to 0.0087265. The natural logarithm of this fraction is $\bar{5}.25861$. Hence it follows that SPEIDELL's number is the natural logarithm of 0.0087265 with 10 added to the characteristic, the decimal point being omitted. That SPEIDELL's process of subtracting NAPIER's logarithms from 10^8 will, in all cases, yield natural logarithms of x' with the charakteristic in excess by 10 and with the decimal point left out, follows at once from the examination of Equation I. For, subtracting $10^7 \log_e \frac{10^7}{x}$ from 10^8 gives $10^7 (10 + \log_e x')$, where $x' = \frac{x}{10^7}$. Strictly speaking SPEIDELL's logarithms, as they stand, are *not* logarithms to a constant quantity taken as a base. But, if the decimal point is inserted after the characteristic, then we have natural logarithms to the base $e = 2.718\ldots$, with the characteristic (in all cases except for the secants and the latter half of the tangents) increased by 10.

The later editions of SPEIDELL's tables include also logarithms (to six places) of numbers 1 (1) 1000. As before, the decimal point is left out. In this table, as none of the characteristics are negative, he did not add 10. For 770 he gives 6646388, the natural logarithm being 6.646388.

Editions of SPEIDELL's tables appear to have been issued in 1620, 1621, 1622, 1623, 1624, 1627, 1628. Baron MASERES, in his *Scriptores Logarithmici,* 1791—1807, reprinted the logarithms of numbers from the "tenth inpression", dated 1628. DE MORGAN says that SPEIDELL, in his *Briefe Treatise of Sphaericall Triangles,* mentions and complains of those who had printed his work without an atom of alteration, and yet dispraised it in their prefaces for want of alterations. To them he says:

> "If thou canst amend it,
> So shall the Arte increase:
> If thou canst not: commend it,
> Else, preethee, hould thy peace".

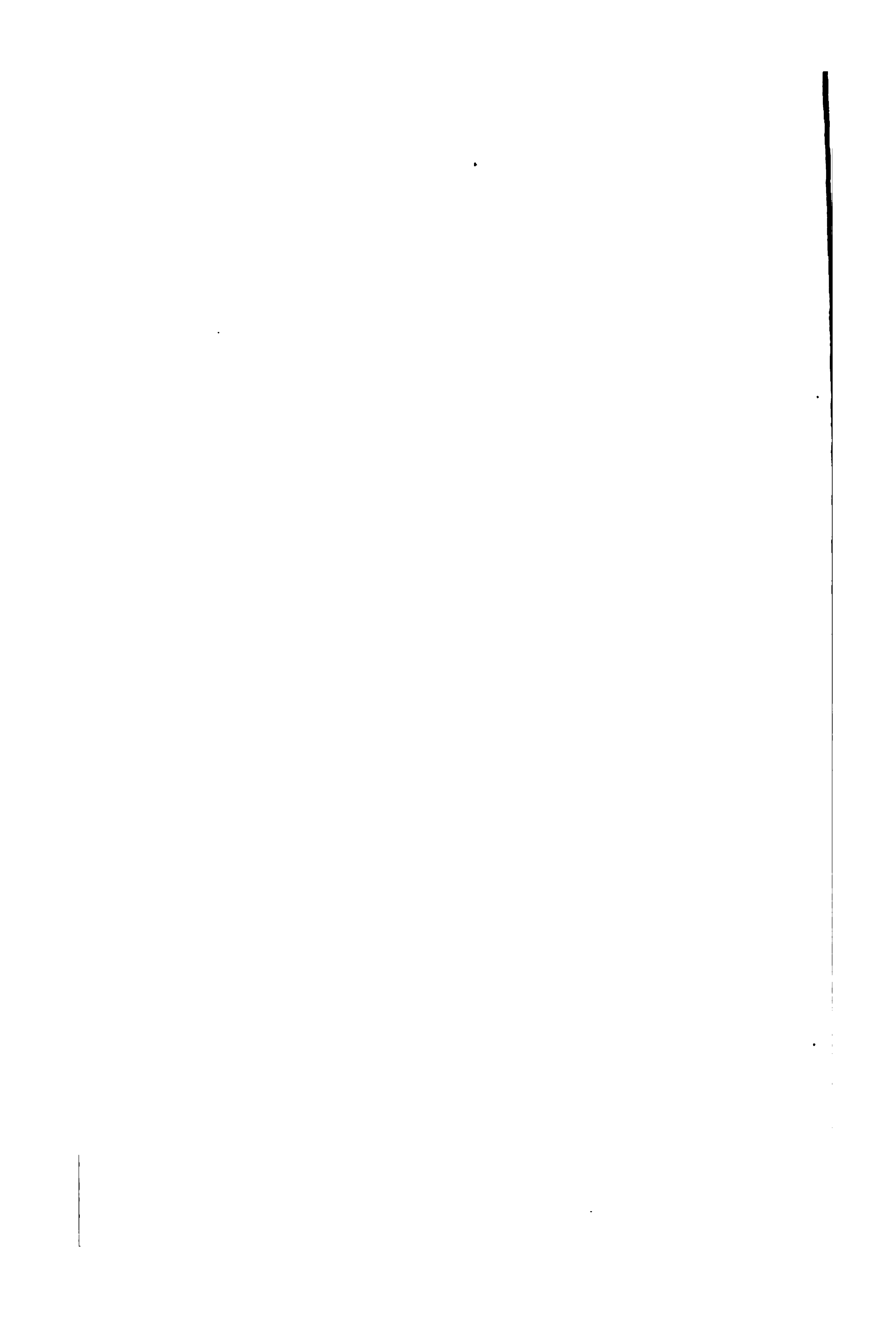
This unfair treatment of himself SPEIDELL attributes to his not having been at Oxford or Cambridge — "not hauing seene one of the Vniuersities."

De Morgan was not able to find a trace of the smallest reproduction by another hand and he doubts the truthfulness of Speidell's statement.

The question to what extent Speidell influenced later writers is an interesting one. According to De Morgan, he was very little known; Continental writers seldom mention him; Wallis knows nothing of him. I myself have examined the works (previously mentioned in this article) by Vitali, Ozanam, Wolff, Stone, Saverien, Montucla, Bossut without finding Speidell's name. His influence seems indeed to have approached the limit zero.

An inspection of the list of tables in the article "Tables" in the *English Cyclopaedia*, as well as the list in the *British Association Report* of 1873 has failed to reveal the publication of tables of natural logarithms between the time of Speidell and that of J. H. Lambert. The latter included in his *Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen*, 1770, natural logarithms, to seven places, of 1 (1) 100 and 1 (.01) 10; also of 1 (1) 10, to 25 places. The smaller range of these tables and the larger number of decimal places to which they are computed lead us to believe that they were constructed independently of Speidell's. Directly after the publication of Wolfram's elaborate tables of natural logarithms, in 1778, such tables became more fashionable.

Colorado College, Colorado Springs, Colo.



DER TRACTATUS QUADRANTIS DES ROBERTUS ANGLICUS IN DEUTSCHER ÜBERSETZUNG AUS DEM JAHRE 1477.

HERAUSGEGEBEN VON

MAXIMILIAN CURTZE

IN THORN.

Herr Paul Tannery hat Ende 1897 das lateinische Original einer Abhandlung über den Quadranten eines gewissen Robertus Anglicus aus Montpellier zugleich mit einer mittelgriechischen Übersetzung derselben in den „*Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale*" veröffentlicht.[1]) Er hat darin nebenbei darauf hingewiesen, daſs ich im *Codex germanicus Monacensis 328* eine deutsche Übersetzung dieses Tractatus gefunden habe.[2]) Diese Übersetzung dürfte etwa aus der Zeit von 1477 stammen, von welcher andere gleichartig geschriebene Stücke der Handschrift datiert sind. Mathematische deutsche Handschriften sowohl wie Druckschriften aus so früher Zeit gehören, wie allgemein bekannt ist, zu den gröſsesten Seltenheiten, und ich glaube daher der Kenntnis deutscher Mathematik des XV. Jahrhunderts einen Dienst zu erweisen, wenn ich im Nachfolgenden einen Abdruck dieser Übersetzung veröffentliche.

Der *Cgm. 328* ist ein Folioband von 285 mm Höhe und 200 mm Breite und enthält ein ungezähltes und 174 gezählte Blätter. Unsere Abhandlung umfaſst davon Blatt 62r bis 73r. Dem Übersetzer ging es mehr um die praktischen Anwendungen des Quadranten als um die Beschreibung der Einrichtung eines solchen. Als er nämlich in seiner Übersetzung zu dieser Darlegung gelangt, schreibt er sehr naiv: „Wie man den quadrantten machen sol, das hat vil geschrift, die ich vnder wegen lasz vmb kürcz willen, wann die figur des quadranten jn dem bůch gemalt das aigentlichen auszweist." Nach dem Schlusse des Textes der Arbeit Robert's fügt unser Autor aber noch die Übersetzung eines weitern Traktates hinzu, welcher sich mit der Messung der Gröſse der Himmelskörper: Mond, Sonne, Planeten und Fixsterne beschäftigt, die Gröſse des Erdhalbmessers als Einheit genommen. Hierbei erwähnt er Ptolemaeus, Geber, Alfraganus und einen gewissen Maximones, der nach dem Zusammenhange des Chalif Mamûn (um

1) *Le traité du quadrant de Maitre* Robert Anglès *(Montpellier, XIIIe siècle). Texte latin et ancienne traduction grecque. Publiés par* M. Paul Tannery. *(Tiré des Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Nationale et autres Bibliothèques Tome XXXV, 2e partie). Paris Imprimerie Nationale.* MDCCCXCVII. 2 Bltt., 80 S. 4°.

2) A. a. O., p. 10, Anm. 2.

800 n. Chr.) sein mufs. Seine Mafse sind eben die des Chalif Mamûn, nach welchen ein Grad des Himmels auf der Erde einer Entfernung von $56^2/_3$ Meilen à 4000 Ellen entspricht, so dafs der Gesamtumfang der Erde 20 400 Meilen beträgt. Daraus ergiebt sich der Durchmesser nahezu zu 6500 Meilen, „vil nach" sagt unser Übersetzer.

Die Angaben über die Durchmesser der Himmelskörper und ihres Inhaltes lassen sich nicht gut mit einander vereinigen. Sie scheinen aus verschiedenen Quellen genommen zu sein. Interessant ist jedenfalls die Bemerkung, man könne rings um die Erde von Ost nach West oder umgekehrt herumfahren, aber nicht nach Norden oder Süden. Nach der einen Richtung hindere die grofse Kälte, nach der andern die grofse Hitze. Auch die Notiz über die Gegenfüfsler ist der Beachtung wert.

Die Übersetzungen der mathematischen Kunstausdrücke ist ebenfalls nicht ohne Interesse. So übersetzt unser Verfasser *gradus* mit Staffel, *differentia* und *distantia* mit Zwiestand, *cursor* mit Louffer, *perpendiculum* in der Bedeutung Bleiloth mit Richtklocz, *cenith* mit gleichmafs der Nacht, *polus* mit des Himels Nab. *Linea circumferentialis* ist ihm die „umfürige" Linie; *radius visualis* wird durch Schein des Gesichts gegeben. Ganz natürlich ist *umbra recta* und *versa* für ihn der rechte und der verkehrte Schatten; *conus* giebt er einmal durch Knopf ein andermal durch Ort, d. h. Ecke, wieder. *Satis curialiter* übersetzt er mit gar hoffentlichen; *multiplicare* heifst ihm gemert; *circumferentia* die umbgebende Zarg; *area* ist die hofstat; *linea perpendicularis* eine gericht lini; *capacitas* aber die begrifflichkeit. Durch eine Saul wird *columna* wiedergegeben, ein *modius rotundus* ist ein schibloten schefel, wie denn auch die Rundung des Himmels und der Erde durch schiblechtikeit wiedergegeben wird. *Dolium* ist eine kuf, dagegen wird *vas* durch vasz übersetzt.

Nachdem P. Tannery die nötigen Erklärungen des Textes auch in mathematischer Hinsicht gegeben hat, erübrigt es sich für mich, hier nochmals auf dieselben zurückzukommen. Besseren Verständnisses halber habe ich jedoch die Figuren des *Codex lat. mon. 10662*, welcher das lateinische Original der Abhandlung enthält, einfügen zu müssen geglaubt.

Thorn, 13. Dezember 1898.

M. Curtze.

| *Geometria* ist ain kunst von messung des erttrichs, vnd hat zwai tail 62, I. *theoricam* vnd *practicam*. *Theoricam* (!) ist, die allain mit der gedechtüsse beschawung die gleichnusse der grösze vnd ir messung ansicht; *practica* ist, wann wir ains dings vnbekannten groſs mit begriflicher bewårung messen. Aber der künstlichen messung, die genant ist *practica*, synt drei gestaltnus: *altimetria*, *planimetria*, *steriometria* *Altimetria* ist, wann wir allein ains hochen dings leng sůchen; *planimetria* ist, wann wir ains eben dings praite sůchen; *steriometria* ist, wann wir ains dings lenge, praite vnd tieffe sůchen. Mit der ersten masz sůchen wir vnd messen

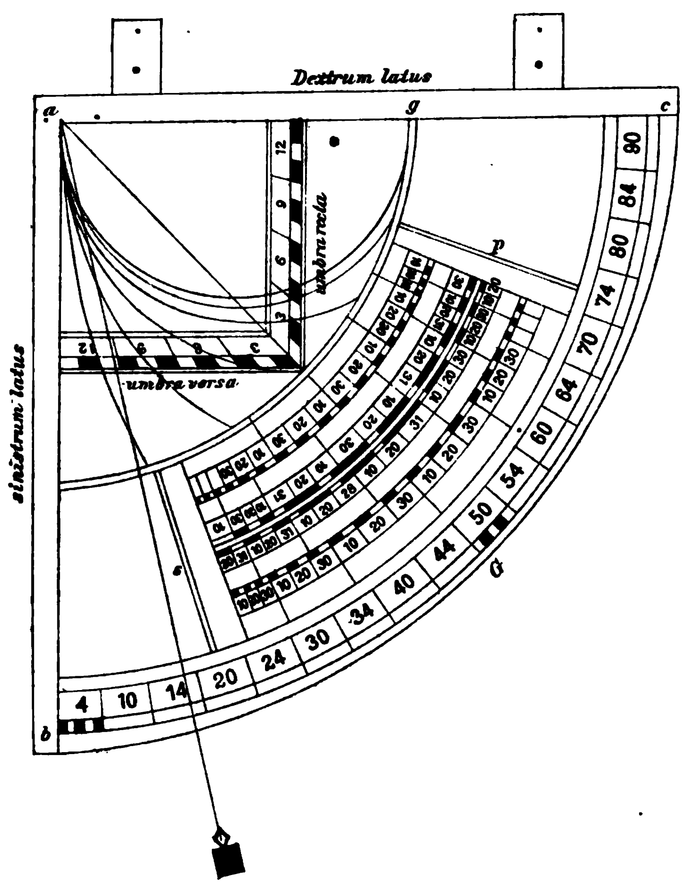


Fig. 1.

die linigischen messung; mit der andern die bődinischen messung; mit der dritten die leiplichen messung.

Darumb tailen wir das půch, darjnn wir aller ding messung leren, jn zwai tail, nachdem vnd es zů der infůrung der kunst gehört. In dem

ersten tail lernen wir von ains quadranten zůsamenseczung, der genant ist von ainem vierden tail ains zirckels, den er hat. In dem andern tail von dem werck, das dadurch geůbt wirt, vnd seiner nuczung.

Darumb ain quadrant ist ain werk gezüg, der da hat ain vierden tail ains zirckels vnd etlicher bůchstab züge, dadurch wir staffel[3]) der sunnen vnd jr naigung vnd der steren hȏche mügend genemen, stund der zeit entscheiden, der ding hȏche, der stette zwystand[4]), der land lengerung vnd der brunnen tiefung erfindung. Wie man den quadrantten machen sol, das hat

62, II. |vil geschrift, die ich vnder wegen lasz vmb kurcz willen, wann die figur des quadranten jn dem bůch gemalt das aigenlichen auszweist. (Fig. 1 a. v. S.)

62', I. | 1. Wann du den quadranten hast, vnd wilt wissen die hȏchin der sunnen dadurch in aller stund, secz den punct des quadranten *a* gen der sunnen, vnd den punct *c* gen dir, vnd lasz dein schein durch baide lȏcher der zwair tabeln, die gelȏchert sind, schinen, vnd sich, wȏlchen staffel ausz den stafeln in dem saum[5]) des quadranten die meszschnůr abschnid, vnd sich die zal des stafels darob genomen, vnd die selb zal der stafel weiset die hȏche der sunnen etc.

In welchem stafel die sunn sey.

2. Wiltu wissen, in wie mången stafel des zaichens die sunn sey

62', II. durch den louffer,[6]) sich, jn | welchem monat vnd jn wie mangem tage des selben monacz, vnd leg den faden mit dem richtklocz[7]) auf den tag jn dem louffer, vnd merck auf wȏlches zeichen vnder demselben monat vnd auf welchem staffels des zeichens der velt, wann in dem zaichen vnd jn dem staffel ist dye sunn.

Von der naigung der sunnen.

3. Wiltu wissen die neigung der sunnen, vnd wie jr zwystand sey von der glychnusz der nacht durch den louffer, so leg den faden auf den anfang des widers vnd der wage, vnd merck den staffel jn den saum, darauf der richtklocz velt. Darnach leg anderweit den faden auf den staffel, dar jnn die sunn ist, nach der gecz gesagten kunst, vnd merck aber den staffel

63, I. jn dem saum, darauf der richtklocz | velt, vnd rechen in dem saum, wie manch staffel sey von dem ersten gemerckten bisz zů dem andern gemerckten, denn also grofz wirt die naigung der sunnen die selben zeit.

Von der praite des landes.

4. Wyltu wissen die praite des lands, das ist der zwistand[8]) des puncten ob deinem haubt von der gleichnufze der nacht[9]) oder die hȏchin

3) *gradus.* 4) *differentia.* 5) *limbus.* 6) *cursor.* 7) *perpendiculum.* 8) *distantia.* 9) *cenith.*

des hymels nab[10]), das des gleichen ist, so nim die hŏchin der sunnen jn mittemtage, als sy in dem wider oder in der wage ist, vnd dieselben hŏch zeuch ab von 90 staffeln, und das v̈brig wirt braite des lands oder hŏchin des hymels nab.

5. Oder also: Nim die hŏchin der sunnen in mitemtag als vor, vnd von der hŏchin der sunnen wirt abgezogen jr naigung desselben tages, ist sy jn wester zaichen, oder wirt hin zů | getan, ist sy jn mittags zaichen, 63, II. vnd was nach dem abziechen oder zů tůn v̈ber pleibt, sol abgezogen werden von 90 staffeln, so hastu die praite des lands oder die hŏch des hymels nab.

6. Oder also: Nim die hŏchy ains ståten steren der merklich sey bei des hymels nab, wann er ist in der grŏsten hŏch des nachtes, vnd die hŏch desselben steren, wann er ist in der minsten hŏch der selben nacht oder ainer andern, vnd die minder hŏch sol abgezogen werden von der grŏſsern hŏchin, vnd der halbtail des vnderschaids sol zů getan werden der mindern hŏch, vnd was davon bekŏmbt, ist die hŏch des hymels nab oder braite des landes.

Von den stunden.

7. Wiltu aber wissen die stunden des tags jn allem land, so sich die braite des | lands oder hŏchy des hymels nab, als vorgesagt ist, die ist auf 63', I. dem perge pesselan[11]) 44 staffel vil nach vnd gleich im 48 staffel, und rechen also vil staffel jn dem saum des quadranten anzeheben an der syten, do die gelŏcherten tabeln aufgeheft synd, vnd wa dy zal ain end hat bey, bewege den louffer bisz der anfang des widers velt gerichcz vnder den richtklocz, vnd die selb stat der zeit jn dem quadranten wirt des lands.

8. Oder also: Nym die hŏchin der sunnen in mittemtage vnd bewege den richtklocz nicht von der stat, darein er velt, vnd bewege den louffer als lang, bisz der tag, in des mittage du genomen hast die hŏchi, velt vnder den richtklocz, vnd das die ewig stat des landes. Darumb wann der louffer also geschickt ist | so leg den richtklocz auf den tag, des stund wilt haben, 63', II. und zůch den margariten als lang, bisz das er velt auf die umbfůrigen lingen, die letzten, die da ist ain end der 6 stund. Darnach lasz den schein der sunnen gen durch beide lŏcher, vnd merck die stat des margariten jn den stunden, wann die zaigt dir die stand des tags, darin du bist. Wann velt sy auf die ersten vmfůrigen linigen,[12]) so wirt die erst die stund erfült, auf der andern die ander, vnd also für sich aus.

9. Wiltu aber das haben durch den quadranten an den louffer, nim in 4 tafeln des quadranten stafel der sunnen, vnd mit stafel der sunnen

10) *polus.* 11) *In Montepessolano.* 12) *linea circumferentialis.*

in der tabeln der naigung nym jr naigung vnd zaich die ab von praite des lands, dar jnn du bist, ob die sunn ist in wester zaichen, oder dü die hyn zů, ob die | sunn ist in mittags zaichen; vnd was nach dem abziechen oder zů tůn v̈ber pleibt, das behalt, vnd also vil stafel rechen in dem saum von der sayten des quadranten, darauf die gelöcherten tabeln geheft sind, vnd leg den richtklocz, da die zal ain end hat, und bewege den margariten zů sölichem tage. Dann lasz den schein der sunnen gen durch baide löcher, vnd merck die stat, da der margariten hin velt, so chastu die stund als vor.

Von der höchin ze messen.

Nachmöglichen[13]) ist zesagen von den messungen, des ersten der ding die erhöcherung.

10. Darumb wiltu wissen die höch ains grofsen dings, da man zü komen mag, sich die höchin des dings durch beide löcher mit ainem | auge, vnd gang zü dem ding oder von dem ding als vil, bis der richtklocz velt auf die miteln linigen des quadranten, das ist auf 45 stafel. Darnach nym die höchin deins augen bis zü der solen des füsz vnd nim als vil hinder dich, als vil die höchin deins augen ist zü der erden, vnd merck die stat. Darnach misz, wie vil schüch seyen zwischen dem selben marck vnd der grundfest des durns oder ains andern dings, das du messen wilt, so hastu die höchin. (Fig. 2.)

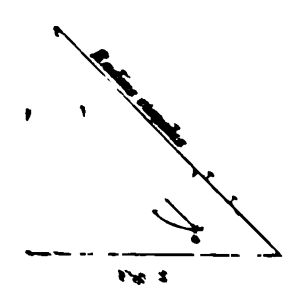


Fig. 2.

11. Ist aber das ding nicht auf ainer eben stat, so sych ainen puncten an dem dings, das du messen wilt, das der richtklocz vall auf die linigen a), die ist in der lingen syten des quadranten, vnd merck den puncten, den du angesechen hast, vnd nim dann nicht die höchin von deinem augen zü der erden, sonder die [illegible] höchin sol sein die höchin des gemerckten puncten von der erden. Darnach als vil ist zwischen deinem füsz vnd dem ding, das du messen wilt, als vil ist die höchin von dem gemerckten puncten über [illegible] zü der selben höchin. [illegible] die höchin des gemerckten puncten von der erden, so hastu das [illegible]. (Fig. 3.)



Fig. 3.

a) [illegible]

12. Oder also: Sich an die höchin ains dings durch baide löcher als vor, vnd merck auf welche stat des quadranten der richtklocz vall; vnd bestätt er auf der seitten des rechten schatten, das ist in der rechten seytten, so nym die zal des rechten schatten [14]) anzusehen, auf wie manig punct der richtklocz velt. Ist aber, das er velt auf die syten des verkerten schaten,[15]) so nim die | zal des verkerten schaten, vnd mit derselben puncten zal tail 144, vnd was darausz get nach der tailung, das nim. Darnach misz den zwistand zwischen dir vnd dem turen, vnd was in dem zwystand wirt, das mer mit zwölfen, vnd was dauon wirt, das tail mit der zal der schaten puncten vorgenomen, vnd was darausz get, auf das tů, wie vil deiner höchin ist, vnd was also pleibt, das wirt die höch des durens. (Fig. 4.)

64', II.

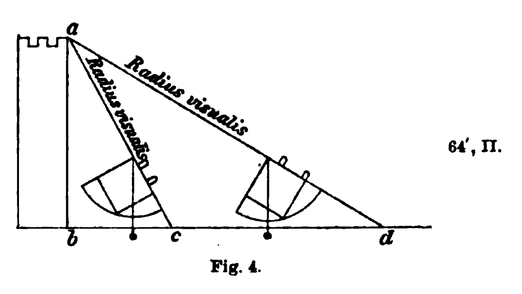


Fig. 4.

Von der sunnen höchin.

13. Item das selb wirt, wann die sunn scheint, durch den schatten also. Du solt baiten, bis die sunn wirt jn der höchin 45 staffel, so ist der schatt ain yetlichen dings dem ding gleich. Den misz den schatten, so hastu die höchin des dings.

14. Aber in den andern stunden, so wirt die gleichnüs des schaten ain yetlichen dings zů | dem ding, als in derselben stund ist die gleichnus der zal der punct des rechten schatten zů 12. Also wer es 6 puncten in dem rechten schatten, die sind der halbtail von 12, denn wirt der schatt das halbtail des dings in der höchin, vnd also von der andern zal. (Fig. 5.)

65, I.

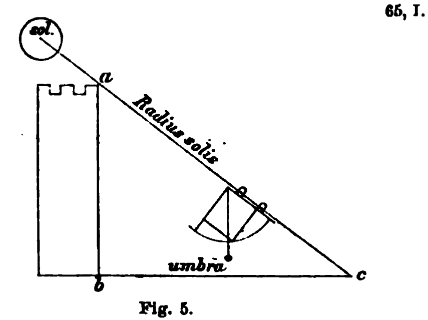


Fig. 5.

14. Aber darzu, das du wissest alle stund die schatten zenemen, so mustu den rechten schaten in den verkerten vnd herwider vmb verwechseln. Darumb wiltu aus dem verkerten schatten hab die zal der zal puncten des rechten schaten, so tail mit der zal des verkerten schaten in 144, vnd was daraus get nach der tailung, das wirt die zal der puncten des rechten schatten. Wiltu wissen die verkerten schatten durch die rechten, so tail

14) *umbra recta.* 15) *umbra versa.*

65, II. 144 mit der zal der puncten des rechten schatten | so get ausz der tailung die zal der puncten des verkerten schaten.

Von der turen höchin.

15. Ist aber der turen, das man nicht dar zů komen mag, den man messen will, so sich sein höchin durch beide löcher der quadranten, vnd sich an die zal der puncten des rechten schatten als vor, vnd leg ain zaichen an die stat, da du gestanden bist in stund der merckung; vnd wiss, das die löcher gar eng söllen sein, durch die der schein des gesichts[16]) zů begriffung[17]) des dings gen sol, oder es wirt bald irrung in der kunst. Darnach ge ferner von dem turen oder nächer zů hin zů nach der rechten linigen, vnd sich die höchin des turens anderwet an, vnd sůch die zal der puncten des rechten schaten zů dem stand, da du zů dem andern

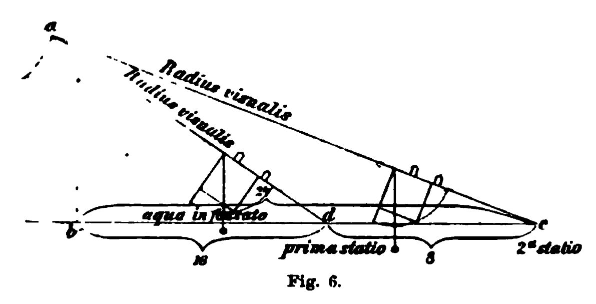


Fig. 6.

65', I. mal | stest, vnd leg aber ain zaichen an die selbe stat, vnd misz, wie vil schůch seien zwischen der zwaier zaichen, vnd behalt dieselben zal. Darnach zeuch die mynnern zal des rechten schaten von der grösseren vnd behalt die vnderschaid, vnd den zwystant zwischen der zwair zaichen gemer mit 12, vnd was davon kompt, das tail mit der vnderschaid vorgenomen, vnd dem, das darausz get, dů dein höchin zů, vnd was da bleipt, wird die höchin des durns. (Fig. 6.)

16. Ist aber, das du stest in ainem tal vnd ains turens höchin, die auf ainem perg stet, messen wild, so merck des ersten die höchin des bergs

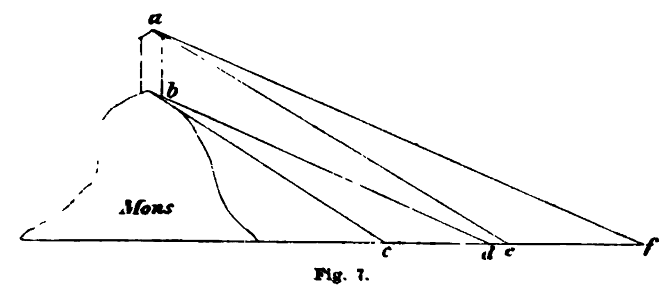


Fig. 7.

mitt zwain stenden jn masz, als vor gesagt ist. Darnach merck die höchin des berges vnd des turns mit ainander, vnd zůch die höchin des bergs

16) *radius visualis.* 17) *comprehensio.*

von | der gansz gesammten höchin mit ainander, vnd was ṽbrig bleibt, das ist die hŏchin des durns auf das genewest. (Fig. 7.) 65'. II.

An den quadranten.

17. Ist aber, das du nit ainen quadranten hast, vnd uilt mesen die hŏch ains dings, so nim ain rů̊ten, die aufgericht werd an ainer eben stat krad ṽber sich, vnd das sy hab ain mercklich leng, vnd leg dich denn mit deinem augen zů̊ der erden vnd ruck dich mit dem haupt her vnd dar, bisz der schein des gesichts ṽber die hôchin der rů̊ten get ṽber die höchsten stat des durns. Darnach merck, wie vil ist zwischen der stat, da dein aug gelegen ist, als du die hŏchin gemerckt hast, bis an die vndersten stat des turens, vnd die selben gemer mit der zal der rů̊ten leng, darüber du

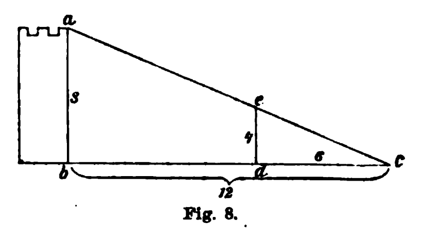


Fig. 8.

gesechen hast, vnd das alles, | was davon kompt, tail mit dem zwistand zwischen des augen vnd der rů̊ten, das sind die zwů̊ stet, ain da dein aug auf der erden ist gelegen, vnd die ander, da die rů̊t gesteck ist in der abmerckung, so get daraus die höch des turns durch die zal die da haist quociens, das ist, wie oft in dem tail ain zal von der andern gezogen. (Fig. 8.) 66, I.

Von dem schatten.

18. Item das selb anders durch der ding schatten. Wann ain ding, des hŏchin du uilt wissen, schatten macht auf ainer eben, so nim ain aufgereckt rů̊ten auf ainer eben gerad ṽber sich bei dem end des schatten des dings, das du messen wilt, jn vŏllicher nächi, das ain tail der rů̊ten velt in den schaten vnd das ander tail ausz dem schatten, vnd merck die stat in der rů̊ten, da der | schatt an hebt die rů̊ten zerüren, vnd mit der leng der rů̊ten, die da ist zwischen der 66, II

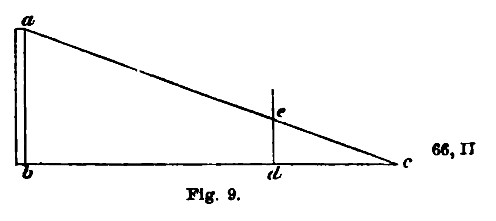


Fig. 9.

rürung des schaten vnd der eben, sol gemert werden die leng des ganczen schatten, der da ist zwischen dem vndertail des dings, das du messen wilt, vnd den knopf[18]) des schatten, vnd was davon kompt, das tail mit der leng des schatten, die da ist zwischen den knopf des schatten vnd der rů̊ten, vnd darausz get die hŏchin des dings, das zemessen ist. (Fig. 9.)

18) *conus*.

Von dem spiegel.

19. Item anders vnd gar hofflichen[19]). Es werd ain spiegel gelegt auf ainer eben, vnd gang her vnd dar, bis du sichest die höch des dings jn dem spiegel; vnd mit der höchin dains augen von der eben sol gemert[20]) werden der zwistand zwischen den vndern tail des dings vnd dem spiegel, vnd was davon kumpt, sol getailt werden mit der zwistand zwischen deinem füsz vnd dem spiegel; vnd daraus got die höchin des dings, das man miszt. (Fig. 10.)

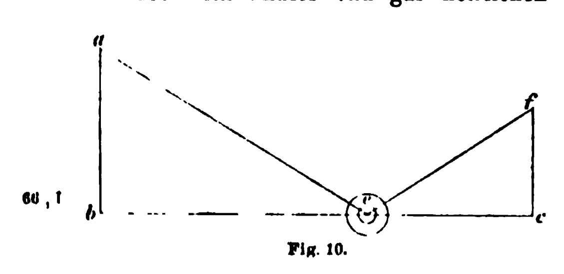


Fig. 10.

Das ander tail der messungkunst, die da haist planimetria, hat zwai tail. Das erst von der kunst zemessen das eben allein jn die leng, das ander ist von der kunst zemessen jn die leng vnd jn die braite. Von dem ersten ist vor ze sagen.

Von der leng.

20. Wann du wilt messen die leng ains eben dings mit dem quadranten, so stand an ainem end des eben vnd sich an das ander end durch baide lecher, vnd halt das ort[21]) des quadranten, daran der faden mit dem nagel geheft ist, gen dir zu den augen, vnd das ort, da des laufers tabel jnn get, halt gen der eben, die ze | messen ist, vnd so das end also gesechen ist, dann wirt genomen die zal des rechten schatten, vnd die höchin von deines augen zu dem füsz wirt gemert mit 12. Was dauon kompt, das wirt getailt mit der zal des rechten schatten vorgenomen, so get darausz die leng der eben, die gemessen ist. (Fig. 11.)

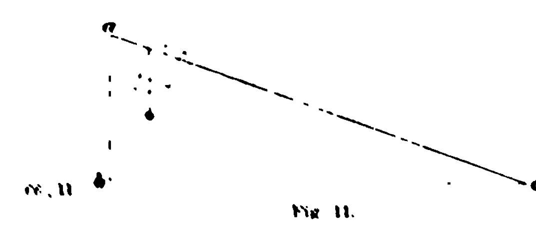


Fig. 11.

Von ainer rutt.

21. Oder also on quadranten. Es wirt ain rut gerad auf gericht an ainem ende der eben, es sei ertrich oder waser, vnd zu ainem ebenbild, das es dester pas verstentlich werd, so si die eben geheisen bc, vnd die

19) [illegible] 20) [illegible] 21) [illegible]

aufgericht *ab*. Vnd an der auf gerichten růten sei ain ander růt mit geleicher zwistand dem eben, die da machent sy ainen rechten winckel mit der růt *ab*, vnd sy die ander rut *cd*. Darnach bei der aufgerichten růten | wird gehabt dein aug, vnd wird angesechen do ander end der eben, vnd wirt gemerckt der punct jn der ruten *cd*, darnach der schein des gesichts get, vnd derselb punct in der lini der růten *cd* sy der punct *d*, durch den get der schein. Darnach mit der leng *cd* gemer die leng *ab*, vnd was dauon kompt, das tail mit der leng *ac*, vnd daraus get *cb*, die leng, die gesucht ist. (Fig. 12.)

67, I

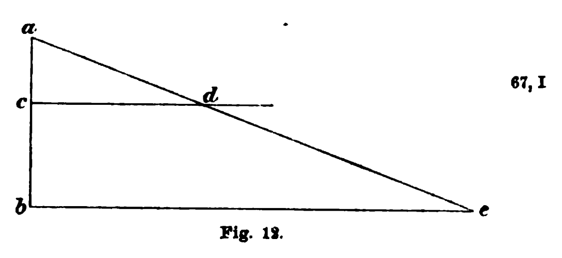


Fig. 12.

Von dem spiegel.

22. Dasselb wirt mit ainem spiegel, der vor ward verstanden die ober figur ligend in der eben, wird hir verstanden, die aufgerecht sei, vnd | die lini, die dort bedeit hat die hôch, wird nu bedeiten die lengi der eben, vnd die ander die bedeit vor hat die eben, sy nun die lini, die gerichcz an stat der leng in der eben. Darein sol gelegt werden der spiegel aufgericht auf sainer seiten ein; vnd du wirst sten zwischen dem spiegel vnd dem end der eben, vnd wirst darnach wircken als vor. Vnd merck, das der spiegel sol clain sein, vnd sol alweg mitten in dem spiegel sechen das end der hôch oder der leng. (Fig. 13.)

67, II

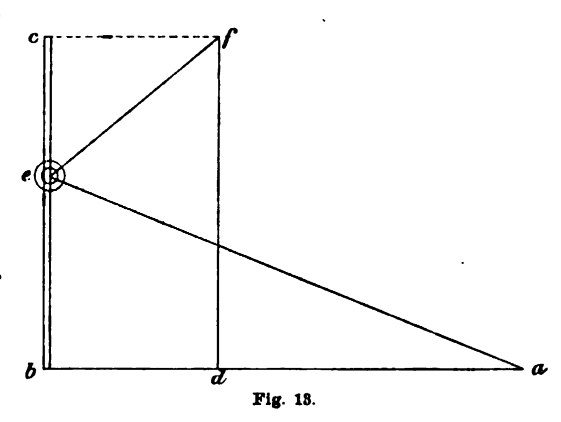


Fig. 13.

Von eben vnd praite.

23. Wiltu aber messen die eben in leng vnd jn praite, so wirt denn die eben aintweders zircklis[22]) oder wincklis.[23]) Ist sy zircklis, so wirt das halbtail des dyameters gefiert in den halbtail der vmbgenden zarg,[24]) vnd

22) *circulare.* 23) *angulare.* 24) *circumferentia.*

das davon kumpt, gibt die hoffstat der ganczen zircklichen eben. Aber die grösz der vmbgenden zarg | wirt als gehabt. Der dyametter sol getribliert

67', I.

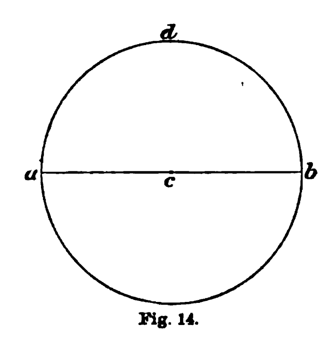


Fig. 14.

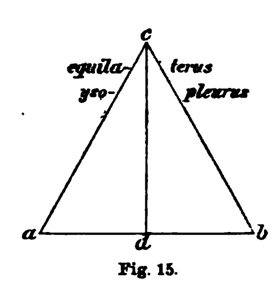
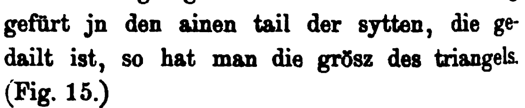


Fig. 15.

werden, vnd der sibendtail sol jm zůgetan werden; was dauon kumpt, gibt die grösz der vmbgenden zarg. (Fig. 14.)

24. Ist aber der boden triwincklis,[25]) sint dan dy sytten glich, so wirt also gemessen. ain tail des dryangels wird getailt in zwai glich tail, vnd von dem puncten der tailung wirt gezogen ain recht lini zů dem winckel da gen ṽber, vnd die lini also gezogen wirt mit der zal irer leng


gefürt jn den ainen tail der sytten, die gedailt ist, so hat man die grösz des triangels. (Fig. 15.)

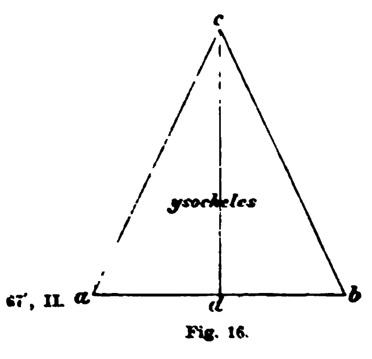


Fig. 16.

67', II.

25. Ist aber, das der driangel allain zwo glych seiten hat, vnd die dritt vnglich ist, so tail die selben in zwai glyche tail, vnd von dem puncten der tailung züch ain lini zů dem gegen ṽber, vnd der ain halbtail der getailten seyten sol gefürt werden jn die | lini, die gezogen ist von dem puncten in dem winckel, vnd was davon kumpt, gibt die hoffstat.[26]) (Fig. 16.)

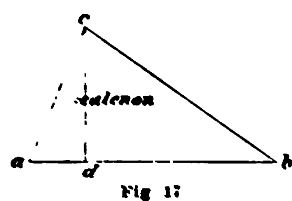


Fig. 17.

26. Ist aber der dryangel von dry vnglychen seitten, so sol aus ainem winckel ain glich gericht lini[27]) gezogen werden zů der seiten dar get gegen ṽber, vnd die selb seit, darauf die gleich gericht lini felt, sol gefürt werden jn die selben lini, vnd was dauon kumpt, des halbtail gibt die hoffstat. (Fig. 17.)

---

25) *triangula*. 26) *area*. 27) *linea perpendicularis*.

Von der fierung.

27. Wiltu aber ainen geuirten boden[28]) messen, so für ain seyten in die ander, vnd dauon kompt die hofstat, das ist, so die vier seiten gleich sind. (Fig. 18.)

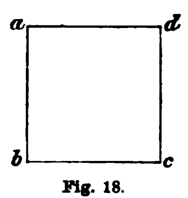


Fig. 18.

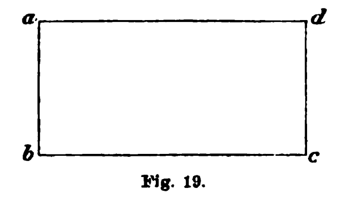


Fig. 19.

Von den wincklen.

28. Sint sy aber winklis,[29]) so fier die mindern seiten in die merern, vnd was davon kompt, gibt die hofstat. (Fig. 19.)

Von den 5 orten.

29. Wiltu aber ains 5 orten[30]) boden hofstat haben, ist er glycher syten, so sol | ain seit in sich selber gefůrt werden, vnd das dauon kompt, sol mit dreyen gemert werden, vnd von der summ, die darausz kompt, sol abgezogen werden ainest die grŏfz ainer seiten, vnd der halbtail der v̈brigen gibt die hofstat. (Fig. 20.)

68. I.

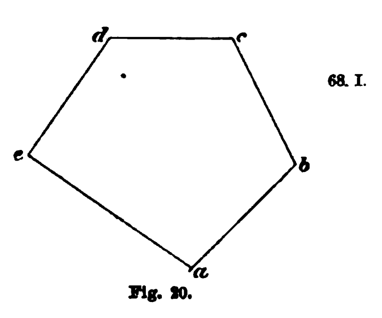


Fig. 20.

Von der prunnen messung.

Es ist gesagt von der messung der ding hŏch vnd eben, nun wŏllen wir von der prunnen tief vnd jr begrifflichait sagen.

30. Darumb ob du ains prunnen tief wilt messen, so sich mit dem quadranten von der ainen syten des brunnen oben hin ab das end der andern seiten gegen v̈ber jn der tieffi des prunnen, vnd vor an sol gemerckt werden grŏsz des dyameters der praite des prunnen. Darumb jn der stund der merckung sol genomen werden die zal der puncten des schat | ten in der sitten des quadranten; vnd gemer die grŏfz des dyameters braite des prunnen mit 12, vnd tail das mit der zal der puncten des schatten, vnd daraus get die tiefe des prunnen. (Fig. 21.)

68, II.

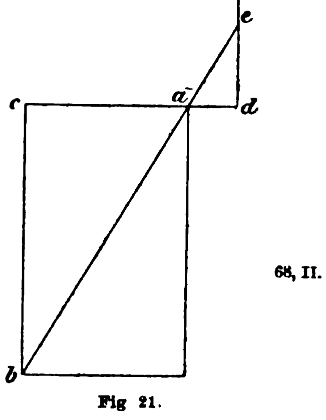


Fig 21.

28) *quadratum*. 29) *quadrangulum*. 30) *pentagonum*

31. Wiltu aber des prunnen begrifflichhait[31]) haben, durch die hofstat also funden, als vorgesagt ist, gemer die tiefe des prunnen, vnd was dauon kumpt, gibt sein begriffenlichhait, dz ist, wie vil darin get, das er vol werd.

Von ainer saul.

32. Wiltu aber grösz ainer saul[32]) sůchen, so nym die grösz der praite der saul vnd fůr die jn sich selber, so hastu die hofstat. Mit derselben hofstat gemer ain seyten der saul, vnd waz dauon kompt, gibt die grösz der saul. (Fig. 22.)

Von der synwel.

68', I. 33. Wiltu aber aines schibloten schefels[33]) begrif | lichenhait wiszen, so sol genomen werden der dyameters des boden jn dem schefel vnd der dyameters oben an dem brait, vnd süllen gelycht werden, vnd der halbtail

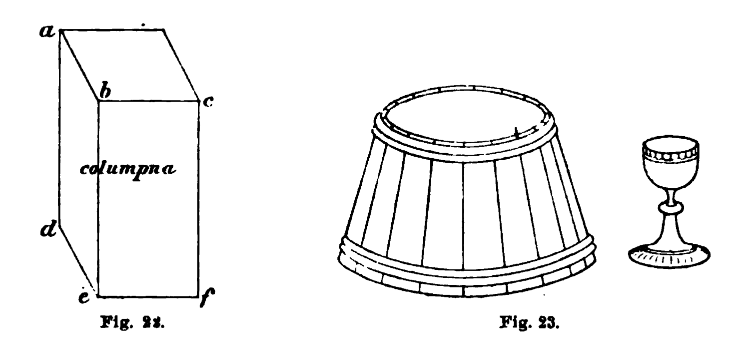


Fig. 22. Fig. 23.

des vbertreffens an dem groszern getan zů dem clainern, so wirt den funden die hofstat des boden, als vor gesagt ist von dem zirckel; vnd wie vil die hofstat hat, damit sol gemert werden die höch des scheffels, so hastu, das gesucht ist. (Fig. 23.)

Von der masz.

34. Ist, das du hast ain clain masz, dz das ains pfenning oder zwaier wert weins fassent ist, so sol die grösz des schöffels tailt werden mit der zal des clainen masz grösz, vnd die zal quociens wist, wie oft die clain masz in dem schöffel begrifen ist. Vnd also, ob dz clain hat ains pfennings wert weins, so wirt man wisen, wie fil pfennings wert[34]) in dem schöffel 68', II. sint. | (Fig. 23.)

---

31) *capacitas.* 32) *columpna.* 33) *modii rotundi.* 34) *denariatus.*

Von ainer kuͦf.

35. Wiltu aber ainer kuͦf[35]) begriffenlichait haben, so soltu des ersten vinden die hofstat des bodens der kuͦfen mit seinem dyameter, als vor ge-

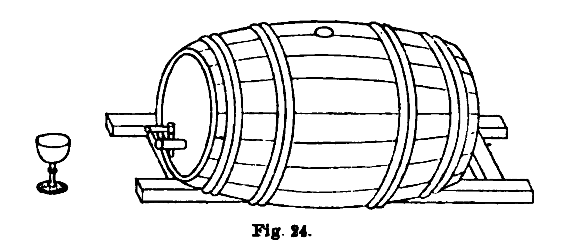


Fig. 24.

sagt ist. Darnach nym die leng nach des weins begriffenlichait, vnd mit der leng sol gemert werden die hofstat, vnd was davon kompt, gibt der kuͦfen begrifenlichait. (Fig. 24.)

Von ainer masz.

36. Ist aber, das du hast ainen scheffel, vnd wilt wisen, wie oft die kuͦf den schefel begrif, so nim sein grösz durch das vorgesagt, vnd die grösz der kuͦfen so getailt werden mit der grösz des scheffels, so wiszt die zal quociens, wie oft der schöffel in der kuͦfen begrifen wirt. Also ob der scheffel ains pfenning wert begryft, so waistu dabei, wie vil pfenning wert in der kuͦfen synd.

Vieregget.

37. Wiltu aber ains vier | winckligen vasses[36]) begriffung wissen, so sol genomen werden die hofstat des bodens nach der vorgesagten kunst, 69, I.

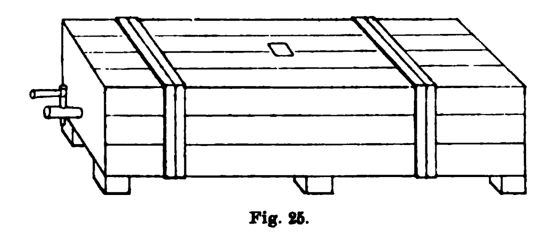


Fig. 25.

vnd die hofstat sol gemert werden mit der höche des fases, vnd was dauon kompt, das gibt sein begrifung. (Fig. 25.)

---

35) *dolium*. 36) *vas*.

Von ainem vasz.

38. Wiltu aber wisen ains fases begriffung, das nicht rechter seiten hat, das in der mitti weiter ist, so sol die mittel braite gelycht werden mit der braite der aussern tail mit der vorgenanten kunst. Die selb brait also gelycht vnd jn die leng des fasz gefůrt gibt sein begriffung.

Von dem messen des erttrichs vnd des gstirens.

39. PTHOLOMEUS vnd die andern weisen haben geseczt den lyb[37]) der erden ain gemain masz, dar mit der planeten lyb gemesen wurden, vnd
69, II. haben geseczt den halben tail der erden dyamet | ters ain gemain mas, damit sy die dieselben steren zwistand von dem center der erden mesen haben.

Von dem erttrich.

40. Es was möglich mit der erden dyameter ze messen, wann erklärt sey, das der erden center jn der sper ist des himels center. Darumb ist notturft, das die schyblechtigkait[38]) der erden sei in gleichem zwistand mit der schyblechtigkait des hymels. Darvmb so wir giengen auf dem boden der erden vnder aines mittaglichen gemerck fürwar, so wurd dem, der da gieng gen den tail vor dem zů getan in der erhöchung des hymels nab von dem orizon, vnd dem, der da gieng gen den tail des mittags, wurd dauon gemindert. Vnd durch das also haben wir funden die grösz vnsz
69′, I. abnemung | auf der erden die glychsamkeit sey der glaichung ains stafels von der schyblechtikait des hymels, ob wir weren meszen ain spacium zwischen zwaier stet, die an der erhöchung mit ainer stafel vnderschaid hatten. Wann du die selben grösz gemerst mit 360, das ist die zal der stafel des hymels, so get darausz ain zirckel, der tailen ist die sper der erden in zwai halb. Und wenn wir dz halb tailen mit $3^1/_7$, das ist die gleichung der vmbfůrung zů dem dyameter, was darausz get, wirt der dyameter der erden sper.

41. Es ist bewärt zů den zyten MAXIMONIS[39]), das glichung ains stafels von der schyblechtikait der erden hat 56 mil vnd 2 tercz ainer mil, mit dem masz, da durch die mil hat 4000 elenpogen nach der geometry, der
69′, II. yetlicher hat ainen schůch vnd ainen halben, | darvmb wann du gemerst die glichung ains stafels mit 360, das ist die sum der schyblechtikait des himels, so wirt gesamdt schyblechtikeit der erd, die hat 20400; vnd wann die schyblechtikait getailt wirt mit $3^1/_7$, so get daraus die grösz des dyameters der erden, der hat 6500 myl vil nach.

---

37) *corpus.* 38) *rotunditas.* 39) Soll den Chalif MAMÎN bedeuten.

Von dem maun.

42. PTHOLOMEUS beweist von dem maun, das der dyameter seins leibs, wann er stet jn der lengern leng seiner kraisz, ist glich dem dyameter des libs der sunn in dem angesicht. Er beweist auch, das der dyameter des libs der sunnen bekomet von dem zirckel 31 minut vnd ainen drittail ains minuts, das ist 20 secund vil nach. Darnach spricht er, das die leng der sunnen von dem halbtail | des dyameters der erden ist ains, vnd die 70, I leng der ausern tails der schůl des schaten von dem zenter der erden ist 368 mit der selben grösz, vnd das die leng des zenters in dem kurczen zirckels des mauns von dem zenter der erden, wann der selb zenter wer jn dem aux seins epizickels, ist 59 der selben grösz.

43. Darumb spricht GEBER, es ist dadurch bewyst die glychung yetlicher zwaier liechter dyameter zů dem dyameter der erden. Darumb ist die glichung des mauns diameter zů dem dyameter der erden ain gleichung fünfer vnd ains halben zu ainem. Aber die glichung der sunnen dyameter zů des mauns diameter ist 18 vnd 35 vnd ains halben zu ainem.

44. Es hat auch GEBER gesproch, | das aus den glidmasen, da durch 70, II glychung des mauns lib zů dem lib der erden ist als ain glichung ains zů 39 vnd ainen viertail vil nach, vnd glichung der sunnen lib zů dem lib der erden ist glichung 166 zů ainem vil nach, vnd glichung der sonnen lib zů des mauns lib ist glichung 6644 vnd ains halben zů ainem.

45. PTOLOMEUS hat bewyszt das mas zwaier lib, als ist der sunnen vnd des mauns, aber er hat nicht gesagt das, was der andern steren derselben avisen ist licht nach der glichnis, damit er gewirckt hat jn der sunnen vnd jn dem maun, als ist auch licht ze wissen von den andern stern ir lib.

Von den 7 liben der 7 planeten.

46. Der diameter des libs mercurii jn dem angesicht, nach dem als be | wert ist vnd wirt, ist das 15tail der sunnen dyameters; vnd der dya- 70', I. meter veneris ist das 10tail der sunnen dyameters; vnd der dyameter marcis ist dz 20tail der sunnen dyameters; vnd der dyameter jouis ist das 12tail der sunnen dyameters; vnd der dyameter saturni ist das 18tail des sunnen dyameters; vnd ains yetlichen stäten steren 15tail des dyameters der erden ist das 20tail des dyameters jn angesicht der sunnen.

Von den 7 diameter der 7 planeten zů dem erttrich zemesen.

47. Aber irer dyameter grőſz nach dem dyameter der erden sint also. Der dyameter des libs mercurii ist das 18tail der erden dyameters; des

70', II. veneris ist dz 3tail ains 3tails; vnd der dyameter | marcis ist glich der erden dyameter vnd das 6 vnd vil nach ains 7tails. Der dyameter jouis ist glich der erden dyameter; saturni ist glich dem dyameter der erden ainen 4tail vnd ain halbes vnd ain clain minder; der dyameter ain yetlichen stäten stären der gröszern ist glich der erden diameter vnd ain viertail vnd ain halbs.

Aber von den liben der 7 planeten.

48. Darumb ist dz mas der lyb derselben steren also. Der lib mercurii ist ain tail von 21000 des libs der erden; der lib veneris ist das 37tail der erden; der lib jouis ist glich der erden zů 95 malen; vnd saturnus ist glich der erden 90mal vnd ainest. Aber der steten steren ain yetlicher der grösten ist glich der erden 108 mal. Aller stäten steren leng 71, I. von | dem zenter der erden ist ain, aber ir grösz sind vnglich.

49. Von der ersten grösz 15 steren. Die grösz ist gesagt 15 der groszen, die in der ersten grösz sint.

In der andern grösz. Darumb der, die da sint jn der andern grösz, ist yetlicher glich der erden.

In der driten grösz. Und yetlicher der, die da sint jn der dritten grösz, ist glich der erden 70mal zwirnd.

Die vierd grösz. Und yetlicher der, die da sint in der vierden 71, II. grösz, ist glich der erd 50mal vierstund. |

Die fünft grösz. Und yetlicher der, die da sint in der fünften grösz, ist glich der erden 30mal.

In der sechsten grösz. Und yetlicher der, die da sint in der sechsten grösz, ist glich der erden 18mal, vnd welcher clainer sind, werden nit gesechen.

Von dem diameter der stillstenden steren zemesen zů den diameter der erden.

50. Dauon mag gehabt werden das masz irer dyameter zů dem diameter der erden. Darumb wirt der dyameter der steren, die da sind in der andern grösz, zů dem dyameter der erden zeglichen als der erden dya-71', I. meter zů | molen vnd ein halbs, vnd das ist ains clainen dings minder denn des saturnus dyameter. Aber der steren in der dritten grösz zu viermalen vnd ain 6tail vil nach; der jn der vierden zů 3 vnd 4 molen vnd ain 5teil vil nach; der in der fünften zů 3 vnd 4 vnd 18 ains mals vil nach; der sechsten zů 2 vnd 4 vnd 8 ains mals.

Von den mylen.

51. Der halbtail der erden dyameters, damit der steren leng gevrsacht wirt, ist 3250 meil, wann die nächer leng des mauns von der erden sy 33mal vnd ain halbs glych dem halben tails der erden dyameters, daz ist 10937 myl vnd ain halb mil, vnd die lenger leng des mauns ist 66 mal vnd ain 6tail ains mals glich dem halben tail der erden dyameters, das ist 542750 meil. Aber | die leng veneris, die da ist die nächer gen der lengern leng der sunnen, ist 608 mal glych dem halben tail der erden dyameters vnd ain halbs vil nach, das ist 1965000 myl; vnd die lenger leng, die da ist die nächer leng marcis, ist 1220 mal glych den halben tail der erden dyameters, das ist 3965000 meil; vnd die länger leng marcis, die da ist die nächer leng jouis, ist 8876 mal glich den halben tail der erden dyameters, das ist 2887000 meil; aber die lenger leng jouis, das ist die nächer leng saturni ist 410045 mal glich dem halben tail der erden dyameters, das ist 46816250 myl; vnd die lenger leng saturni, die da glich ist den stäten steren lengerung, ist zů 2000100 malen glich dem halben tail der erden dyameters, das ist 65357500 stafel, die werden | milen von ALFRAGANO auszgezogen in dem 9 capitel, wann daselbst hat er gesprochen dz 56 meil vnd 2 tercz ainer mil antworten glych ainem yetlichen stafel des himels.

71', II.

72, I.

Von den 7 climat.

52. Darumb wirt gesechen, wie vil stafel sind in der braite des ersten lantschafts. Also wirt erhöcht des hymels nab, als gesagt wirt in dem Anfang des ersten, mit 12 staffeln vnd aines halben vnd ainem viertail ains staffels. Aber jn dem end mit 20 stafeln vnd ainem halben. Nun so wir daz miner von dem grössern ziechen, so werden in der vnderschaid 7 staffel vnd ain halber vnd ain viertail, das ist die leng des ersten lantschafts nach den stafeln des hymels; darnach yetlichs stafel 56 meil, mit 7 zů gemeren, so bekomen 392 | meil. Darnach von ietlichs stafels terczen werden 14 quart, vnd der halbtail des stafels gewint 28 myl vnd ain tercz, die werden zů den ersten getan, myl zů mylen vnd tercz zu terczen, so werden darausz 420 meyl vnd 15 terczen, vnd ist vbrig 14 mail vnd ain halb tercz, der wirt nicht geacht. Aber die myl werden zů den ersten getan, so wirt dar ausz 434 myl, vnd wann 15 tercz tůnd 5 gancz, so werden dafür genomen 5 myl vnd zů den ersten getan, so wirt dar ausz 439 myl, die sind in rechter warhait jn dem ersten lantschaft. Aber so nicht mer denn ains gebricht von 440, das ain gerümpt zal ist, so tůt man das ain darczů, vnd wirt vollkomenlich die selb zal.

72, II.

Von der andern lantschaften.

72', I. 53. Von den andern | lantschaften wirck desglichen alweg ainen stafel zegeben 56 vnd 2 tercz, den halben tail 28 vnd ain tercz, den viertail 14 vnd ain halb tercz, vnd dem dritt ains stafels 19 in masz als vor, so gewinnest du yetlich braite.

Aber des andern lantschafts braite ist in dem hymel allain 7 staffel, den sayen glich nach der vorgeschrieben ler 392 mil, die recht zeglichen mit den terczen gebricht nicht mer denn 3 von 400, das ain gerümpt zal ist, die wirt vollkomenlich aufgelegt.

Die dritt lantschaft. Aber die braite des dritten lantschafts in dem hymel ist 6 stafel vnd ain halb tercz ains staffels, die thůn auf der erden 350 myl.

Die vierd lantschaft. Aber die braite des vierden lantschafts ist 72', II. in dem hymel 5 stafel vnd ain tercz, die thůnd auf der erd | en 293. Das ist nicht ain gerümpt zal, aber mit den terczen zeglichen gebricht mit 7 von 300; die wirt aufgelegt.

Die fünft lantschaft. Aber die braite des fünften lantschafts ist in dem hymel 4 staffel vnd ain halber, die thůnd auf der erden 252 meil.

Die sechst lantschaft. Aber die braite des sechsten lantschafts ist in dem hymel 3 stafel vnd ain halber, thůnd auf der erden 196 myl; so die mit den terczen gelichet werden, seczt man die verümpten zal 200.

Die sybend lantschaft. Aber der 7 lantschafts braite ist in dem hymel 3 stafel vnd ain viertail, die thůnd auf der erden 184 myl. Aber die zal ist nicht jn der schrift, sunder die nächst gröser zal darnach, das ist 185, wann es was ain clain v̄ber bleiben.

Von den leiten von orient vnd occident.

73, I. 54. Merck, das die leit by dem aufgang sint widerfüszig | den leiten bei dem vndergang. Dort get die sunn allweg auf, da get sie allweg vnder.

Von dem center der welt.

55. Es ist wunder, zu dem center der welt velt, was swer ist, wann da schecz ich, sey dz vnderst jn der grösern zwystand, dauon ist müglich, dz kain bosz smack zů den höchsten mũg v̄berfaren, so das swer abvelt. Aber zů dem firmament auf stigen die allerlychtesten ding, wann zů dem vndersten ist der fal lychtlich zů tůn, aber zů dem obersten ist swarlich aufzstygen. Darumb ist der weg zů der hell lycht vnd eben, vnd der weg zů dem himel eng vnd swer; gar vil gand hyn ab, es stigen aber gar wenig hinauf.

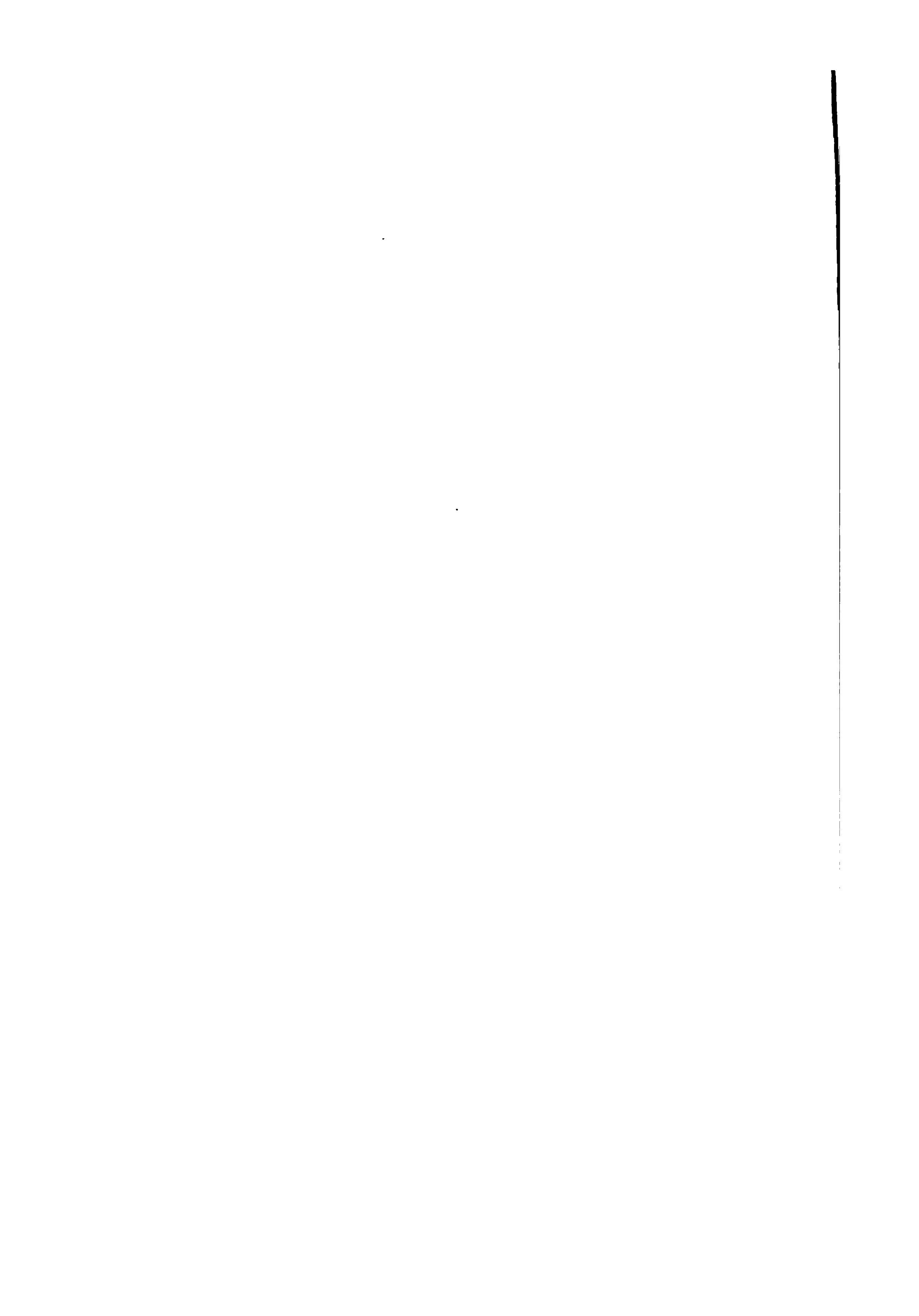
Von dem vmbgang des ertrichs.

56. Der mensch möcht von dem aufgang der sunnen vmb gen von ainem end | zů dem andern vnd hyn wider an die selben stat auf dem land 73, II. oder ze wasser jn schiffen, dz er jn glycher masz des wasers kem von orient gen occident vnd des glych hin wider vmb; aber nicht gen norden, wann da vönter die ewigen kelti, vnd och nicht gen mittemtage, wann da fünd er die ewigen hicze.

Von dem himel ächsen oder naben.

57. Die himelsnaben sind nicht vest noch stet; wann sy wancken vnd zittern auf vnd ab als ain schif auf dem mer, als dz an der sper mag gesechen werden.

Das hat ain end.

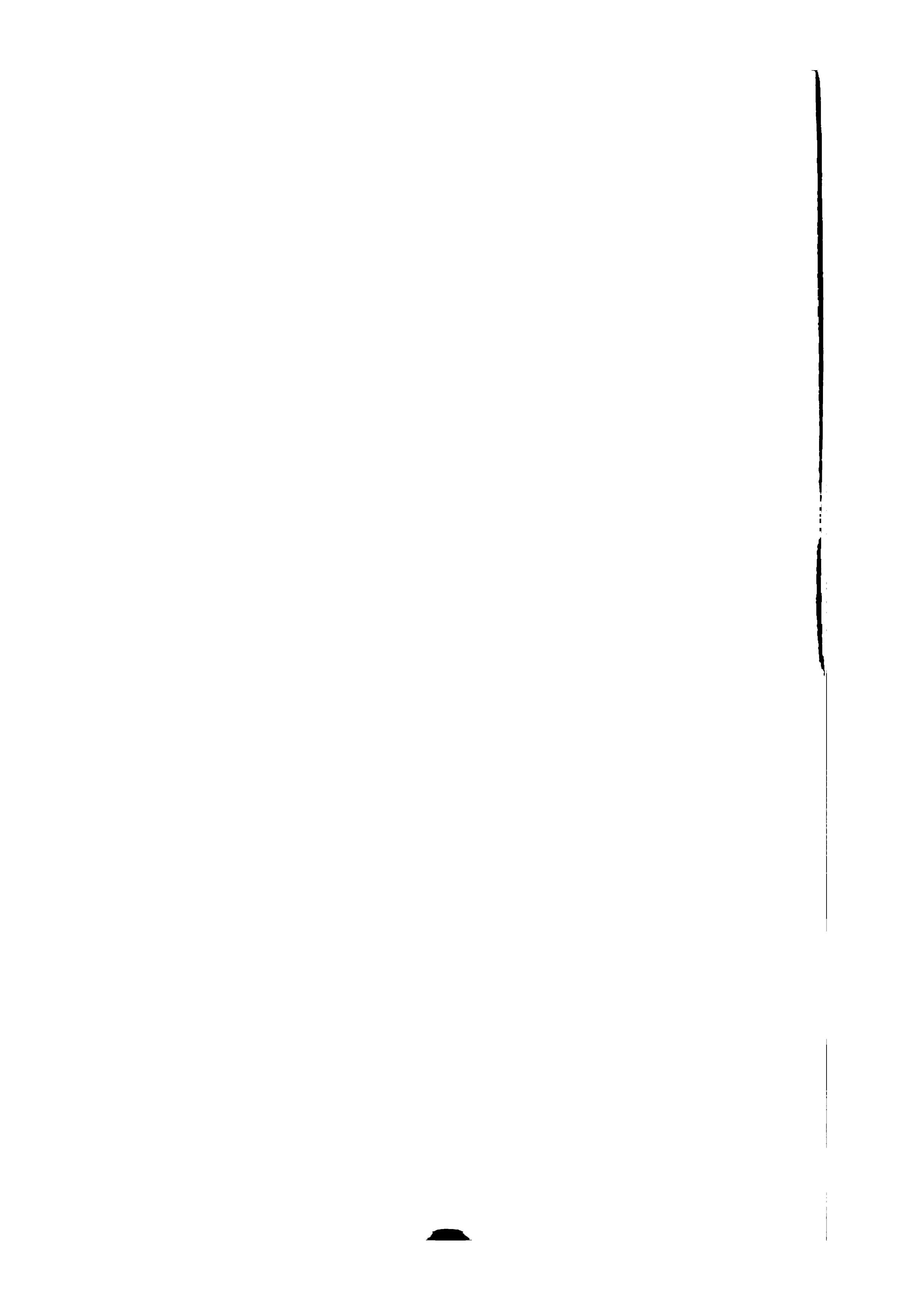


ZUR GESCHICHTE DER PRINZIPIEN DER INFINITESIMALRECHNUNG.

DIE KRITIKER DER „THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES" VON LAGRANGE

VON

S. DICKSTEIN
IN WARSCHAU.



Die Grundlagen der höheren Analysis nach den verschiedenen Auffassungen von LEIBNIZ, NEWTON, EULER und d'ALEMBERT schienen den nach Klarheit der Prinzipien strebenden Mathematikern des XVIII. Jahrhunderts von der Strenge der Alten sehr entfernt und in eine dunkle Metaphysik eingehüllt zu sein.[1]) Man suchte eine Methode und glaubte eine solche finden zu können, welche von Infinitesimal- oder Grenzbetrachtungen ganz frei wäre, und die Grundlagen der höheren Analysis auf dieselbe Weise entwickele, wie die gewöhnliche Analysis ihre Sätze über endliche Gröſsen.[2])

Den ersten Gedanken zu einer solchen Umbildung erfaſste LAGRANGE in einer Abhandlung, die in den Memoiren der Berliner Akademie unter d. Titel: *„Sur une nouvelle espèce du calcul relatif à la différentiation et l'intégration des quantités variables"* im Jahre 1772[3]) erschien. Hier giebt LAGRANGE einen neuen, rein formalen Beweis für die Taylor'sche Reihe[4]),

---

1) S. M. CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III. B. 1898. p. 714—718; M. SIMON, Zur Geschichte und Philosophie der Differentialrechnung in den „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik" VIII. Heft. 1898. — LAGRANGE bespricht in der Einleitung zu seiner *„Théorie des fonctions analytiques"* die oben genannten Methoden und auch LANDEN's *„Residual Analysis"* und sagt: *„Ces variations dans la manière d'établir et de présenter les principes du calcul différentiel et même la dénomination de ce calcul montrent, ce me semble, qu'on n'avait pas saisi la véritable théorie quoiqu'on eût trouvé d'abord les règles les plus simples et les plus commodes pour le mécanisme des opérations"* (3. ed. 1847. p. 4. 5). Vgl. auch LAGRANGE's *„Leçons sur le calcul des fonctions, Leçon première"* (Ausgabe vom J. 1806. p. 1—3).

2) S. *Calcul des fonctions* S. 5

3) *Oeuvres.* t. VII, p. 324—328.

4) Der Beweis besteht in der Annahme, daſs, wenn u eine Funktion von x ist, dann:

$$u(x+\xi) = u(x) + p\xi + p'\xi^2 + \cdots$$

Setzt man erstens $x+\omega$ an Stelle von x, zweitens $\omega+\xi$ an Stelle von ξ, so erhält man zwei Entwickelungen für $u(x+\xi+\omega)$. Der Vergleich derselben führt zu Relationen zwischen den Coefficienten der Reihe für $u(x+\xi)$, aus welchen sich die erwünschte Form ergiebt. Vgl. REIFF, Geschichte der unendlichen Reihen 1889. p. 150.

und macht die Bemerkung, dafs dieselbe zur Grundlage einer neuen Methode der Infinitesimalrechnung gemacht werden könne.[5])

Die Ausführung dieses Gedankens schien damals so wichtig, dafs mehrere Mathematiker durch diese Bemerkung von LAGRANGE angeregt oder vielleicht auch unabhängig von ihm, dieses Ziel zu erreichen bestrebt waren. Bekannt sind die bezüglichen Versuche von CONDORCET[6]), ARBOGAST[7]), PASQUICH[8]),

---

5) *„Le calcul différentiel considéré dans toute sa généralité consiste à trouver directement et par des procédés simples et faciles les fonctions* $p, p' p'' \cdots q, q', q'' \cdots$ *derivées de la fonction* u*, et le calcul intégral consiste à retrouver la fonction* u *par le moyen de cette dernière fonction. Cette notion des calculs différentiel et intégral me paraît la plus claire et la plus simple qu'on n'avait encore donnée; elle est comme on voit, indépendante de toute métaphysique et de toute théorie des quantités infiniment petites ou évanouissantes"* (Abhandl. aus d. J. 1772).

6) Über CONDORCET's Versuch berichtet LACROIX in seinem *Traité du cal. diff. et int.* (3e ed. p. XXII).

7) ARBOGAST hat der Pariser Akademie im Jahre 1789 eine Abhandlung vorgelegt, die den Titel hatte: *„Essai sur des nouveaux principes du calcul différentiel et intégral, indépendants de la théorie des infinement petits et des limites"* (s. die Vorrede zu dem *„Calcul des dérivations"* desselben Verfassers, Strafsburg 1800). LAGRANGE erwähnt diese Arbeit in der Einleitung zu seiner *„Théorie des fonctions analytiques"*; sie wurde nicht gedruckt. Vgl. LACROIX, *Traité de calcul différentiel et intégral. Préface* p. XXIX.

8) PASQUICH, Anfangsgründe einer neuen Exponentialrechnung, im VIII. Hefte des Hindenburg'schen Archivs der reinen und angewandten Mathematik 1798. S. 386—424. Diese Schrift war uns nicht zugänglich, aber die Hauptzüge der darin entwickelten Methode von PASQUICH entnehmen wir aus dem kurzen Berichte über dieselbe, der in der Schrift v. JOHANN SCHULZ: „Sehr leichte und kurze Entwickelung einiger der wichtigsten mathematischen Theorien" (Königsberg 1803) enthalten ist. PASQUICH postuliert die Form der Entwickelung $y = Az^a + Bz^b + Cz^c + \cdots$; wenn man in dieser Reihe jedes Glied mit seinem Exponenten von z multipliziert, so hat man das sogenannte Exponential von y, welches durch εy bezeichnet wird. Es ist also:

$$\varepsilon y = aAz^a + bBz^b + cCz^c + \cdots$$

Hieraus ergeben sich die Hauptsätze:

$$\varepsilon \cdot xy = y \cdot \varepsilon x + x \cdot \varepsilon y; \quad \varepsilon \cdot x^n = nx^{n+1} \cdot \varepsilon x; \quad \varepsilon \cdot \frac{x}{y} = \frac{y \cdot \varepsilon x - x \cdot \varepsilon y}{y^2}, \cdots$$

Die Grundoperationen der Exponentialrechnung sind also mit denen der Differentialrechnung einerlei. Allein PASQUICH — so lesen wir weiter — ist von der Absicht durch seinen Calcul den Leibnizischen verdrängen zu wollen, selbst so weit entfernt, dafs er im „Intelligenzblatte der Allg. Litt. Zeitung" 1798, N. 99 ausdrücklich erklärt, wie er jeden neuen Calcul, wodurch man das zu ersetzen suche, was der schlecht abgehandelten Differentialrechnung fehlt, für ganz entbehrlich halte. — Aus derselben Quelle entnehmen wir noch, das GRÜSON's neue

SERVOIS[9]) u. a. Die „*Théorie des fonctions analytiques*" ist aber die bedeutenste auf diesem Gedanken fußende Arbeit, in welcher LAGRANGE nicht nur das Ganze der Differential- und Integralrechnung nach einer einheitlichen Methode darlegt, sondern auch die Anwendungen der Analysis auf geometrische und mechanische Probleme nach derselben Betrachtungsweise behandelt.[10])

Den Prinzipien der Lagrange'schen Methode liegen folgende zwei Behauptungen zu Grunde:

1) Eine jede Funktion ist im allgemeinen in eine unendliche nach ganzen positiven Potenzen des Arguments fortschreitende Reihe entwickelbar.

2) Infinitesimal- oder Grenzbetrachtungen sind zur Begründung der höheren Analysis gar nicht nötig; dieses ganze Gebiet der Wissenschaft kann man sehr einfach auf algebraische Weise aus dem in der ersten Behauptung ausgedrückten Satz entwickeln.

„Expositionsrechnung" (*Mémoire sur le Calcul d'Exposition inventé par* JEAN PHILIPPE GRUSON, *professeur royal des mathématiques,* Berlin 1802) mit der Pasquich'schen Exponentialrechnung im Wesentlichen übereinstimmt.

9) SERVOIS hat zwei Abhandlungen über die Prinzipien der höheren Analysis der Pariser Akademie in den Jahren 1805 und 1809 überreicht. Dieselben wurden nicht gedruckt. Der in den „*Annales de Mathématiques*" V, p. 93—141 (1814—1815) publizierte Aufsatz: „*Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel*" ist ein Auszug aus jenen Arbeiten. Die Differenzen und Differentiale von Funktionen werden hier vom Standpunkte der Theorie der Operationen betrachtet („*La différence et la différentielle possèdent deux propriétés en commun: d'être distributives et commutatives entre elles*"). SERVOIS' Standpunkt in Betreff der Infinitesimalmethode charakterisiert der folgende Passus, den wir aus seinem zweiten in demselben Bande der „*Annales de Mathématiques*" (p. 141—170) und hauptsächlich gegen WROŃSKI's Philosophie des Unendlichen (s. unten) gerichteten Artikel: „*Réflexions sur les divers systèmes d'exposition des principes du calcul différentiel et particulièrement sur la doctrine des infiniment petits*" entnehmen: „*Je suis convaincu que la méthode infinitésimale n'a ni ne peut avoir de théorie qu'en pratique; c'est un instrument dangereux entre les mains des commençants qui imprime nécessairement et pour longtemps un caractère de gauchérie, de pussilanimité à leurs recherches dans la carrière des applications. Enfin anticipant à mon tour sur le jugement de la postérite j'ose prendre que cette méthode sera un jour accusée et avec raison d'avoir rétardé le progrès des sciences mathématiques.*"

10) Das Werk erschien im Jahre 1797 unter dem Titel: „*Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniments petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*" (2e Aufl. 1813, 3e besorgt durch SERRET im Jahre 1847, auch *Oeuvres* IX). Ein wichtiger Kommentar dazu, zum Teil auch ein selbständiges Werk sind die „*Leçons sur le calcul des fonctions*" (zweite Auflage 1806, *Oeuvres* X).

Die erste Behauptung sucht LAGRANGE auf folgende Weise zu rechtfertigen. Ist $f(x)$ eine Funktion der Variablen x und setzt man $x+i$, wo i eine beliebige Gröfse ist, an Stelle von x, so wird die Funktion $f(x+i)$ in der Form einer Reihe $f(x)+pi+qi^2+ri^3+\cdots$ darstellbar; $p, q, r\cdots$ sind Funktionen von x, die von i unabhängig sein sollen. Diese Voraussetzung, sagt er, wird durch die Entwickelungen bekannter Funktionen bestätigt, aber niemand suchte bisher dieselbe a priori zu begründen. Die Begründung soll darin bestehen, dafs für allgemeine (unbestimmte) Werte von x und i obige Reihe keine gebrochenen und negativen Potenzen von i enthalten dürfe. Enthielte sie nämlich gebrochene Potenzen, so würde die Anzahl der verschiedenen Werte der Reihe für $f(x+i)$ — LAGRANGE hat hier mit Wurzelgröfsen behaftete Funktionen im Auge — gröfser sein als die Anzahl der verschiedenen Werte der Funktion $f(x)$; was ungereimt ist.[11]) Enthielte aber die Entwickelung für $f(x+i)$ negative Potenzen von i, so würde $f(x+i)$ für $i=0$, also die Funktion $f(x)$ selbst, unendlich, was nur für einzelne Werte von x stattfinden kann.

Ist die Entwickelung der Funktion $f(x+i)$ in die Reihe

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+\cdots$$

auf diese Weise begründet, so ist damit auch die zweite Behauptung gerechtfertigt. Die Coefficienten $p, q, r, \cdots$ der Reihe sind Funktionen von x; nennt man den ersten Coefficienten p die derivierte Funktion der primitiven Funktion $f(x)$ und bezeichnet sie durch $f'(x)$, so wird — wie leicht zu beweisen ist — $2q$ gleich der Derivierten von p, $3r$ gleich der Derivierten von q u. s. w. Auf diese Weise erhält man die aufeinander folgenden Derivierten der gegebenen Function: die erste $f'(x)=p$, die zweite $f''(x)=2q$, die dritte $f'''(x)=2\cdot 3\cdot r$ u. s. w. Diese Derivierten oder Ableitungen der gegebenen Funktion sind mit den nach der Infinitesimal- oder Grenzmethode erhaltenen Differentialquotienten identisch, aber scheinbar ganz ohne Grenzbetrachtungen hergeleitet. Somit werden nach LAGRANGE in der weiteren Entwickelung der ganzen Lehre Infinitesimalbetrachtungen entbehrlich.

Die grofse Autorität des Namens LAGRANGE hat der *„Théorie des fonctions analytiques“* schnelle Verbreitung und grofsen Einflufs gesichert.

11) *„Cette démonstration“* — sagt LAGRANGE — *„est générale et rigoureuse, tant que x et i demeurent indéterminées; mais elle cesserait de l'être, si l'on donnait à x des valeurs déterminées; car il serait possible que ces valeurs détruissent quelques radicaux dans f(x) qui pourraient néanmoins subsister dans f(x).“* (*Théorie des f.* 3e. ed. p. 9.) Einige Fälle, in welchen *„la règle générale est en défaut“* untersucht LAGRANGE im Kapitel V seines Werkes.

Man bewunderte den Reichtum des Inhalts und die Vorzüge der vortrefflichen Darstellung, während man der Begründungsweise der Prinzipien der Methode zuerst weniger Aufmerksamkeit schenkte.[12])

CARNOT in seiner bekannten Schrift: *„Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal"* betrachtet die Lagrange'sche Methode als eine Art der *„Méthode des indéterminées"*. Ihre Grundlage ist ihm ganz

---

12) In dem *„Rapport historique sur le progrès des sciences depuis 1789 et sur leur état actuel"* (Paris 1810) lesen wir folgendes: „M. LAGRANGE *dans son mémoire célèbre avait déposé une de ces idées fécondes qui n'appartiennent qu'aux génies de premier ordre; il avait indiqué les moyens de ramener au calcul purement algébrique les procédés du calcul infinitésimal en écartant soigneusement toute l'idée de l'infini. Frappés de ce trait de lumière plusieurs géomètres cherchaient des développements que nul ne pouvait donner aussi bien que l'inventeur.* M. LAGRANGE *ayant accepté les fonctions d'instituteur de l'École polytechnique y créa sous les yeux de ses auditeurs toutes les parties dont il a depuis composé son Traité des fonctions analytiques, ouvrage classique dont il serait bien superflu de faire aujourd'hui l'éloge et qu'il suffit d'avoir cité etc."* CRELLE (Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Gröfsen, Bd. I 1813 p. 39 u. ff.) schreibt: „In dem ganzen Umfange der Prinzipien der Entwickelung, ja selbst der Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Gröfsen innerhalb des Calculs findet sich auch nicht eine Spur von der Notwendigkeit der Idee des sogenannten Unendlichen, die die Dunkelheit in diesem Teile des Calculs hervorgebracht zu haben scheint... Zwar giebt es allerdings einen Ort, wo die Idee des Unendlichen notwendig gewesen, oder vielleicht noch jetzt mehr oder weniger notwendig sein kann (nämlich die Anwendung des Calculs auf Raumgröfsen), allein dieser Ort liegt nicht innerhalb des Calculs... Was die Schwäche auf der Stelle der Anwendungen des Calculs betrifft, so ist bekanntlich auch diese in der That schon gehoben, denn derselbe grofse Mann, dem man die Berichtigung der Ideen über die Rechnung des Veränderlichen überhaupt verdankt, hat auch hier bewiesen, dafs die Ideen des Unendlichen wenigstens entbehrlich und der Übergang vom Calcul zur Anwendung vermittelst Vorstellung möglich sei, die an Strenge und Eigentümlichkeit den geometrischen Vorstellungen der Alten gleichen."

Über LAGRANGE's Methode haben auch früher JOHANN SCHULZ (l. c.), E. G. FISCHER (Über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis, Berlin 1808) sehr günstig geurteilt.

Um auch Philosophen zu citieren, sagen wir, dafs COMTE in seinem *„Cours de philosophie positive"* (I vol. 1829) die Lagrange'sche Methode *„la plus rationnelle et la plus philosophique de toutes"* nennt; nur für die Anwendungen scheint sie ihm zu kompliziert zu sein. HEGEL's Logik, (nach C. FRANTZ: „Die Philosophie der Mathematik 1842) erklärte die Methode von LAGRANGE als die am meisten wissenschaftliche.

Den Taylor'schen Satz, welcher die Grundlage der Lagrange'schen Methode bildet, suchte man auf verschiedene Weise zu begründen. Die bezügliche Litteratur findet man in KLÜGELS Mathem. Wörterbuch, 5er Teil 1er Band 1831 Artikel „Taylor's Lehrsatz"; vgl. auch REIFF l. c. p. 156 u. ff.

sicher[13]), die eigentliche Schwierigkeit zur Annahme dieser „lichtvollen Methode" sieht er nur in der Neuheit des Lagrange'schen Algorithmus, dessen Anwendung eine völlige Umarbeitung der gesamten bezüglichen Litteratur nach sich ziehen müfste.[14]) Eine eigentliche Kritik der Prinzipien der Lagrange'schen Methode finden wir bei Carnot nicht.

Lacroix sucht in seinem grofsen *„Traité du calcul différentiel et intégral"* den Taylor'schen Satz auf induktive Weise d. h. für besondere Klassen von Funktionen zu begründen. Die ihm bekannten Beweise des Satzes befriedigen ihn nicht, weil sie zu abstrakt sind und nicht von der Pflicht befreien die Ausnahmefälle einer besonderen Betrachtung unterziehen zu müssen.[15]) Im dritten Bande seines Werkes, vielleicht durch einige dazwischen erschienene Kritiken, von welchen gleich die Rede sein wird, beeinflufst, scheint er manche Zweifel an der Begründungsweise der ersten Behauptung von Lagrange zu hegen[16]), aber ein bestimmtes und sicheres Prinzip an deren Stelle giebt er nicht.

Merkwürdigerweise sind die ersten Zweifel an der Richtigkeit der

---

13) *„Afin de conserver, dans tout le cours de ses opérations, l'exactitude rigoureuse dont il s'est fait la loi de ne jamais s'écarter,* Lagrange, *qui fait aussi usage des différentielles, sous une autre dénomination et sous une autre notation, les considère comme des quantités finies, indéterminées. En conséquence, il ne néglige aucun terme et prend ses différentielles comme on le fait dans le calcul aux différences finies. C'est à quoi il parvient par le théorème de Taylor, dont il fait la base de sa doctrine, et qu'il démontre directement par l'analyse ordinaire, tandis qu'avant lui on ne l'avait encore demontré que par le secours même du Calcul différentiel"* (5. Aufl. S. 156).

14) *Ainsi, par exemple, il faudrait refondre toutes les collections académiques, tous les écrits d'*Euler *et ceux de* Lagrange *lui-méme"* (l. c. p. 158).

15) Seconde édition 1810. I Vol. p. XXI. *„Ces propositions"*, sagt er, *„si générales en apparence, ont plus d'éclat que d'utilité, puisqu'elles ne dispensent, par de l'examen des cas où elles sont en défaut; il vaut mieux ne montrer ces cas que succesivement, à mesure qu'ils se présentent d'eux-mêmes, que de les faire prévoir d'avance et comme des accessoires, au moment ou le lecteur n'embrasse qu'avec peine le petit nombre d'idées principales que vous lui présentez."*

16) *„En rapportant ici* (Chap. III du 1 Vol. p. 339) *le raisonnement sur lequel s'appuie* Lagrange *pour prononcer que le développement général de l'accroissement d'une fonction ordonnée suivant les puissances de celui de la variable indépendante ne doit point contenir de puissances fractionnaires de ce dernier, c'est à dessin que je me suis servi du mot „paraît" (ligne II en rémontant), parce qu'en effet ce n'est là qu'un aperçu qui aurait besoin d'être justifié par des preuves que l'auteur de la „Théorie des fonctions" n'a point données. Le principe qu'il emploie est très admissible comme explication de la circonstance qui rend la série de* Taylor *inapplicable, mais non pas comme un principe évident par lui même dans l'état général des choses"* (Lacroix, *Traité etc.* III 1819, p. 629—630).

Lagrange'schen Prinzipien von nichtfranzösischen Mathematikern erhoben worden: von BURJA, WROŃSKI, ŚNIADECKI, BOLZANO.

In einer Abhandlung unter dem Titel: *„Sur le développement des fonctions en séries“* (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1801, S. 21) sagt BURJA, dafs zwar der Versuch LAGRANGE's Behauptung für einfachere Funktionen bestätige, aber man sehe nicht ein, warum dieselbe auch für verwickeltere Funktionen wahr sein müsse. Der zweite Teil der Lagrange'schen Beweisführung (nämlich die Relationen zwischen den Coefficienten betreffend) sei zwar ganz richtig, aber es bleibe doch eine Schwierigkeit, nämlich die Begründung der Möglichkeit der Entwickelung. BURJA glaubt dieser Schwierigkeit auf folgende Weise aus dem Wege zu gehen: „Man sage nicht, dafs jede Funktion in eine unendliche nach ganzen positiven Potenzen des Arguments fortschreitende Reihe entwickelbar sein müsse, sondern nur, dafs man jede Funktion so behandeln könne, als wenn sie in eine solche Potenzreihe entwickelbar wäre. Der weitere Fortgang der Rechnung, nämlich die Bestimmung der Coefficienten, wird dann zeigen, wann diese Annahme als begründet, wann aber als unzulänglich zu betrachten ist“.[17])

Tiefer wurde die Sache von WROŃSKI erfafst. Als eifriger Anhänger der Leibnizischen Differentialmethode und der Kantischen Philosophie protestiert er energisch gegen die Verbannung des Unendlichen aus der Analysis. In seinem Werke: „Philosophie der Mathematik“ erklärt er die Grundlage der Lagrange'schen Methode als wissenschaftlich falsch, weil dieselbe ein allgemeines theoretisches Gebiet, d. h. die Differentialrechnung, auf eine spezielle technische Form, als welche er die Taylor'sche Reihe betrachtet, zu begründen sucht.[18]) In einer besonderen Schrift u. d. T.: *„Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de* LAGRANGE“ (Paris 1812)[19]) werden

---

17) Einen ähnlichen Gedanken scheint OHM in seiner Schrift „Geist der Differential- und Integralrechnung 1846: — wie wir den Worten von HANKEL (Art. Grenze in der „Allgem. Encykl. der Wiss. u. d. K. von ERSCH und GRUBER“ XC. 1871) entnehmen können — ausgesprochen zu haben.

18) *Introduction à la philosophie des mathématiques et Technie de l'algorithmie par M.* HOËNÉ *de* WRONSKI Paris 1811.

19) Die Schrift besteht aus drei Stücken. Das erste (p. 1—40) auch unter dem Titel: *„Réfutation* etc.“ wurde der Pariser Akademie vorgelegt, aber durch die Berichterstatter LEGENDRE und ARAGO abgelehnt. Das zweite Stück (p. 41—81) handelt über die: *„Insuffisance de la démonstration du théorème de* TAYLOR, *tentée par* M. POISSON“. Das dritte (p. 83—110): *„Quelques observations concernant le rapport fait à la Classe des sciences de l'Institut pour le premier de ces mémoires“* ist eine in sehr gereiztem Tone geschriebene Replik. In den Noten behandelt WROŃSKI: Algorithmische Fakultäten, progressive und regressive Differenzen und giebt einen rein formalen Beweis der allgemeinen Entwickelung nach Fakultäten.

die Prinzipien der Lagrange'schen Methode einer ausführlichen Analyse unterworfen. Den Ausgangspunkt bei LAGRANGE bilden die Formeln:

$$1)\ f(x+i) = A + Bi + Ci^2 + \cdots; \quad 2)\ f(x+i) = f(x) + iP.$$

Woher, fragt WROŃSKI, kommt uns die Kenntnis der Form 1), wie kann man ihre Möglichkeit begründen, ist eine jede Funktion $f(x+i)$ als solche, mit der Reihe 1) identisch oder nur gleichwertig? LAGRANGE behauptet, dafs die Entwickelung im allgemeinen nur ganze positive Potenzen von i enthalten müsse, und dafs nur für spezielle Werte von x gebrochene und negative Potenzen in der Reihe vorkommen können. Nach WROŃSKI kann eine jede Funktion $\varphi(i)$ im allgemeinen in eine Reihe nach Potenzen z. B. von $a + \sqrt[m]{i}$ entwickelt werden, und das wechselseitige Kompensieren der Glieder mit gebrochenen Exponenten von i, von welcher bei LAGRANGE die Rede ist, kann sich nur als Resultat der Ausrechnung des Wertes für spezielle Werte von x ergeben. Die Lagrange'schen Prinzipien könnten also höchstens hypothetischen Wert und daher die Methode selbst nur problematische Gewifsheit besitzen, während doch die Differentialrechnung apodiktisch sein soll. Wäre aber auch die Begründung bei LAGRANGE ganz fehlerfrei, so würden doch seine Prinzipien zur Darlegung der Infinitesimalrechnung unzureichend sein. Denn niemals könnten die Sätze 1) und 2) eine unabhängige und absolute Erklärung der Coefficienten $A, B, C \cdots$ ergeben. Die Natur derselben kann keineswegs durch die Bezeichnung der Stelle, welche sie in der unendlichen Reihe einnehmen, präzisiert werden. Würden wir eine allgemeinere Entwickelungsreihe, z. B. die nach den Fakultäten von $\varphi(x)$ fortschreitende Reihe

$$F(x+i) = F(x+j) + F'(x)\,\varphi(x)^{1/\xi} + F''(x)\,\varphi(x)^{2/\xi} + \cdots$$

zum Ausgangspunkte nehmen, so würden wir zu ganz anderen Derivierten geführt werden. Dieselben hätten im betrachteten Falle die Form

$$F'(x) = \frac{\Delta F(x+i)}{\Delta\varphi(i)}, \quad F''(x) = \frac{W[\Delta\varphi(i)\ \Delta^2 F(x+i)]}{\Delta\varphi(i)\ \Delta^2\varphi(i)^{2/\xi}}, \ldots {}^{20})$$

und für unendlich kleine Werte von ξ und für $\varphi(i) = i$ würden diese Derivierten die Gestalt

20) Die Ausdrücke W im Zähler sind die zuerst von WROŃSKI eingeführten Differenzen- (und Differential-)-Determinanten, die bei ihm *„fonctions schin“* heifsen und jetzt oft *„Wronskiane“* genannt werden. Für i mufs eine der Wurzeln der Gleichungen $\varphi(i) = 0$ genommen werden.

$$F'(x) = \frac{dF(x+i)}{di}, \quad F''(x) = \frac{d^2F(x+i)}{1\cdot 2\cdot di^2}, \cdots (i=0)$$

annehmen, wo d die unendlich kleinen Differenzen bezeichnen. Erst die Betrachtung dieser durch die unendlich kleinen Inkremente definierten Gröfsen erklärt nach WROŃSKI die Bedeutung der Derivierten $F'(x)$, $F''(x)\cdots$

Zwei Jahre nach der *„Réfutation"* erscheint wieder eine neue Schrift von WROŃSKI: *„Philosophie de l'infini, contenant des contre-réflexions et réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal"*.[21]) In ihrem kritisch-polemischen Teile ist dieselbe hauptsächlich gegen CARNOT's: *„Réflexions sur la metaphysique du calcul infinitésimal"* und auch gegen die zweite Auflage der Lagrange'schen *„Théorie des fonctions analytiques"* gerichtet. WROŃSKI wiederholt hier ausführlich seine früheren Einwände gegen die Prinzipien von LAGRANGE. In dem positiv-historischen Teile der Schrift unterzieht er alle bekannten Methoden der Begründung der höheren Analysis einer vergleichenden Betrachtung vom Standpunkte seiner Philosophie.[22]) Als Schlufs

---

21) Die Schrift besteht aus folgenden Stücken: 1) *Contre-réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal* (p. 1—30). 2) *Philosophie de calcul infinitesimal* (32—68). 3) *Réponse à la seconde édition de la Théorie des fonctions analytiques de* LAGRANGE" (p. 69—98). 4) *Sur l'éloge de M. le comte de* LAGRANGE (p. 99—121). In den Noten behandelt WROŃSKI: „die allgemeine Methode der Approximation oder die algorithmische Exhaustionsmethode (p. 121—166) und die primitive Bildung der Differentiale" (p. 167—171). Die Behandlung ist rein formal.

22) Um den Leser eine Einsicht in WROŃSKI's Betrachtungsweise zu gewähren, geben wir hier einen kurzen auf die Metaphysik der Infinitesimalrechnung sich beziehenden Auszug aus dieser Schrift (p. 34 u. ff.): *„Avant tout, il faut reconnaître que l'idée de l'infini est un produit intellectuel tout à fait différent de celui qui constitue la conception d'une quantité finie. Ce sont deux fonctions de notre savoir tout à fait hétérogènes. L'une, l'a conception d'une quantité finie est un produit de l'entendement qui, sous les conditions du temps qui lui sont propres, introduit une unité intellectuelle ou une signification dans l'être opposé au savoir. L'autre, l'idée de l'infini est un produit de la raison qui, en lui-même, se trouve hors des conditions du temps et par conséquent inapplicable ou transcendentale dans l'usage constitutif que nous faisons du savoir pour la connaissance de l'être. Employé au moins d'une manière regulative, en le soumettant, par l'influence du jugement, aux conditions du temps qui lui sont étrangères, ce produit de la raison, l'idée de l'infini, transformée ainsi en l'idée de l'indéfini sert à lier les conceptions même que nous avons de la quantité ... C'est cette importante distinction transcendentale, qui est le noeud de la métaphysique du calcul infinitésimal ... Le premier résultat que nous obtenons de cette dinstinction transcendentale est le precepte négatif de ne pas confondre dans l'Algorithmie les lois objectives des quantités finies avec les lois purement subjectives des quantités infinitésimales ... Or, ce principe des lois subjectives faisant l'objet du calcul infinitésimal n'est autre rien que le grand principe même du calcul infinitésimal, savoir: „Deux quantités qui ne diffèrent*

dieser Betrachtung erscheint die Behauptung der Unzulänglichkeit der Lagrange'schen Methode.

Śniadecki, der seine Einwände gegen die Grundprinzipien der *„Théorie des fonctions“* Lagrange persönlich (1804) vorgelegt haben soll, erklärt in seiner Schrift[23]), daſs dessen Methode im Grunde genommen mit der Grenzmethode identisch ist. Lagrange dividiert die Gleichung für die entwickelte Differenz $f(x+i)-f(x)$ durch den Zuwachs i und betrachtet den Quotienten für $i=0$; es wird dann die eine Seite der Gleichung $\frac{0}{0}$, die zweite aber enthält ein von i freies Glied d. i. den Wert des Differentialquotienten. Während aber die Grenzmethode ganz klar ist, läſst uns die Begründung bei Lagrange unbefriedigt, weil sein Hauptsatz, daſs man i so klein wählen könne, daſs jedes Glied der (konvergenten) Reihe $f(x)+ip+i^2q+\cdots$ gröſser sei als die Summe aller darauf folgender Glieder in der Reihentheorie zwar unzweifelhaft wahr, aber in der Differentialrechnung, die nicht bloſs approximativ verfährt, als Prinzip nicht gelten darf.

Wenn auch die meisten Einwände der oben genannten Kritiker nicht unberechtigt waren, eine definitive Lösung der Frage konnten sie doch nicht erbringen. Dieselbe konnte nur von einer tieferen Auffassung des Funktionsbegriffes, von einer strengeren Behandlung der Stetigkeits- und Konvergenzfragen ausgehen. Bolzano ist vielleicht der erste Mathematiker im XIX. Jahrhundert, der ein feineres Gefühl für eine strenge Behandlung der Grundprobleme der Mathematik besaſs. In seinen von den Zeitgenossen leider nicht gehörig beachteten oder schief beurteilten Schriften, bemühte sich Bolzano ein strengeres Verfahren für die Beweise mehrerer Grundsätze der höheren Analysis zu schaffen. Er hat den richtigen Begriff der Stetigkeit der Funktionen eingeführt[24]), einen wichtigen Satz über die Grenze der ver-

---

entre elles que d'une quantité indéfiniment plus petite, sont rigoureusement égales.“ Es folgt dann die „metaphysische Deduktion“ dieses Prinzips. Gergonne und Servois haben diese Philosophie der Mathematik von Wroński sehr scharf angegriffen.

23) J. Śniadecki: O. Józefie Ludwiku de Lagrange, *pierwszym geometrze naszego wieku.* Wilno 1815 (polnisch).

24) „Nach einer richtigen Erklärung versteht man unter der Redensart, daſs eine Funktion $f(x)$ für alle Werte von x, die inner- oder auſserhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändre, nur so viel, da[illegible] wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega)-f(x)$ klein[illegible] als jede gegebene Gröſse gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als ma[illegible] nur immer will, annehmen kann“ („Rein analytischer Beweis des Lehrsa[illegible] zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes R[illegible] [illegible]nigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege[illegible]

änderlichen Gröſse formuliert[25]) und der Reihentheorie einen allgemeinen Konvergenzsatz zu Grunde gelegt.[26]) Schon aus diesen Sätzen würde sich eine strengere Kritik der Lagrange'schen Methode als bisher ergeben können. Was den Taylor'schen Satz betrifft, so kann Bolzano nicht verbergen, daſs er ihn nicht ganz in dem Sinne und in der Allgemeinheit zugebe, wie man ihn gewöhnlich darstellt. Er hatte sich bloſs zum Gesetze gemacht den Satz nur unter solchen Umschränkungen und auf eine solche Art zu gebrauchen, wie er es nach seinen eigenen Begriffen glaubt rechtfertigen zu können und zu seiner Zeit thun will.[27]) Ob er das gethan und seine Betrachtungen über den Taylor'schen Satz niedergeschrieben hat, wissen wir nicht.[28]) Jedenfalls haben die Gedanken Bolzano's den Beifall der damaligen Mathematiker nicht erworben und blieben ohne Einfluſs auf die Entwickelung der Analysis.[29]) Es war Cauchy vorbehalten die Reformperiode der Wissenschaft zu beginnen.

Über die von Cauchy in seinen grundlegenden Werken (*Cours d'analyse algébrique* 1821, *Résumé des leçons données à l'École polytechnique* 1823, *Leçons sur le calcul différentiel* etc. 1829 etc.) aufgestellten Prinzipien der Methode der unendlich kleinen Gröſsen, über die Grundlage seiner Funktionen und Reihentheorie brauchen wir hier nicht näher zu berichten[30]), denn

25) „Wenn eine Eigenschaft M nicht allen Werten einer veränderlichen Gröſse x, wohl aber allen, die kleiner sind, als ein gewisses u, zukömmt, so giebt es allemal eine Gröſse U, welche die gröſste derjenigen ist, von der behauptet werden kann, daſs alle kleineren x die Eigenschaft M besitzen" (daselbst p. 41). Dieser Satz wurde von Weierstrass in seinen Vorlesungen verwendet.

26) „Wenn eine Reihe von Gröſsen $\overset{1}{F}(x)$, $\overset{2}{F}(x) \cdots \overset{n}{F}(x) \cdots \overset{n+r}{F}(x)$ von der Beschaffenheit ist, daſs der Unterschied zwischen ihrem n-ten Gliede $\overset{n}{F}(x)$ und jedem späteren $\overset{n+r}{F}(x)$, sei dieses von jenem noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Gröſse verbleibt, so giebt es jedesmal eine gewisse beständige Gröſse, und zwar nur eine, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern, und der sie so nahe kommen können, als man nur will, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt" (daselbst p. 35).

27) Die drei Probleme der Rektifikation, der Complanation und der Cubirung u. s. w. Leipzig 1817, p. 11.

28) S. auch Bolzano, „Paradoxien des Unendlichen" (1850). Zweite unveränderte Auflage. Berlin 1889. p. 69. Vielleicht werden noch manche Arbeiten von Bolzano in seinem Nachlasse aufgefunden werden. Vgl. F. J. Studnička, Bericht über die mathematischen und naturwissenschaftlichen Publikationen der kg. böhmischen Ges. d. Wiss. während ihres hundertjährigen Bestandes, Prag 1884. p. 119.

29) Eine Würdigung der Leistungen Bolzano's geben Hankel (Art. Grenze in der Allg. Encykl. von Ersch und Gruber) und O. Stolz (Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, Math. Ann. XIX).

30) Wir citieren nur folgende Worte aus den Vorreden zu den *Cours d'ana-*

diese Leistungen beherrschen noch gegenwärtig das gesamte Gebiet der Analysis. Durch diese Arbeiten von CAUCHY sind die Infinitesimal- und Grenzmethoden von jener gefürchteten Metaphysik befreit und die Frage über die Giltigkeit der Prinzipien der Lagrange'schen Methode vollkommen erledigt worden.

Die späteren Kritiker und Historiker, wie COURNOT[31]), HANKEL[32]), FREYCINET[33]), MANSION[34]), VIVANTI[35]) u. a. konnten schon in den Besprechungen der Lagrange'schen Methode die von den älteren Kritikern erhobenen Einwände durch mathematisch überzeugende Belege verstärken.

Das unmittelbare Ziel, welches LAGRANGE durch seine Methode zu erreichen suchte, wurde zwar nicht erreicht[36]), aber die Potenzreihe, der Aus-

---

lyse und den *Leç. sur le calcul: „En partant de la continuité des fonctions je n'ai pu me dispenser de faire connaître les proprietés principales des quantités infiniment petites, propriétés qui servent de base au calcul infinitésimal . . . Quant aux méthodes j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communement admises . . . ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que dans la réalité la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment.“*

„La formule de TAYLOR *ne peut plus être admise comme générale, qu'autant qu'elle est réduite à un nombre fini de termes et completée par un reste. Je n'ignore pas qu'en faisant d'abord abstraction de ce reste l'illustre auteur de la „Mécanique analytique“ a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des fonctions derivées. Mais malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaitre l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi des séries divergentes. Il y a plus, le théorème de* TAYLOR *semble dans certains cas fournir le développement d'une fonction en série convergente quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée.“* Das klassische von CAUCHY gegebene Beispiel einer solchen Funktion ist wohlbekannt. S. STOLZ, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung I. Bd. p. 105.

31) COURNOT, *Traité élémentaire des fonctions et du cal. inf. 1841.*

32) HANKEL, Art. Grenze l. c.

33) FREYCINET, *De l'analyse infinitésimale.* Paris 1881, 2 éd. p. 228.

34) MANSION, *Résumé du cours d'analyse infinitésimale.* Paris 1887, p. 290.

35) G. VIVANTI, *Il concetto d' infinitesimo e la sua applicazione nella matematica, Mantova* 1894, p. 97, 124.

36) Der Einfluſs der in der *„Théorie des fonctions analytiques“* enthaltenen Gesichtspunkte und Methoden ist noch jetzt merkbar. Eine Würdigung ihrer geschichtlic[illegible] Bedeutung findet man bei BRILL u. NÖTHER: „Die Entwickelung [illegible] braischen Funktionen in älterer und neuerer

gangspunkt seiner Betrachtungen, wurde bekanntlich in einer neuen durch CAUCHY's Vorarbeiten vorbereiteten präziseren Auffassung das Fundament der modernen Theorie der analytischen Funktionen, wie sie uns in den Schöpfungen von WEIERSTRASS[37]) und MÉRAY[38]) jetzt fertig dasteht

Es ist auch nicht zu verkennen, daſs die Tendenz, welche LAGRANGE in seiner Schöpfung leitete, nämlich die Algebraisierung der höheren Analysis, nicht ohne Einwirkung geblieben ist. Dieselbe Denkweise hatte auch in unserer Zeit zwei groſse Vertreter: einen WEIERSTRASS und einen KRONECKER. Ob diese algebraisierende oder gar arithmetisierende Richtung wissenschaftliche Resultate in völliger Unabhängigkeit von jener zweiten Denkweise — wir nennen sie intuitiv — hervorzubringen im stande sei, ist eine Frage, die wir hier nicht erörtern können.[39]) Es scheint aber das Zusammenwirken beider Richtungen ein mächtiger Faktor der Förderung der Wissenschaft zu sein. Die „*Théorie des fonctions analytiques*" hat zu beiden Richtungen beigetragen, indem sie die schöpferischen Geister je nach Individualität zur Erweiterung und Vervollständigung der in ihr liegenden Ansätze in der einen und in der anderen Richtung anregte.

Zeit" im III. B. des „Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" Berlin 1894, p. 150—155.

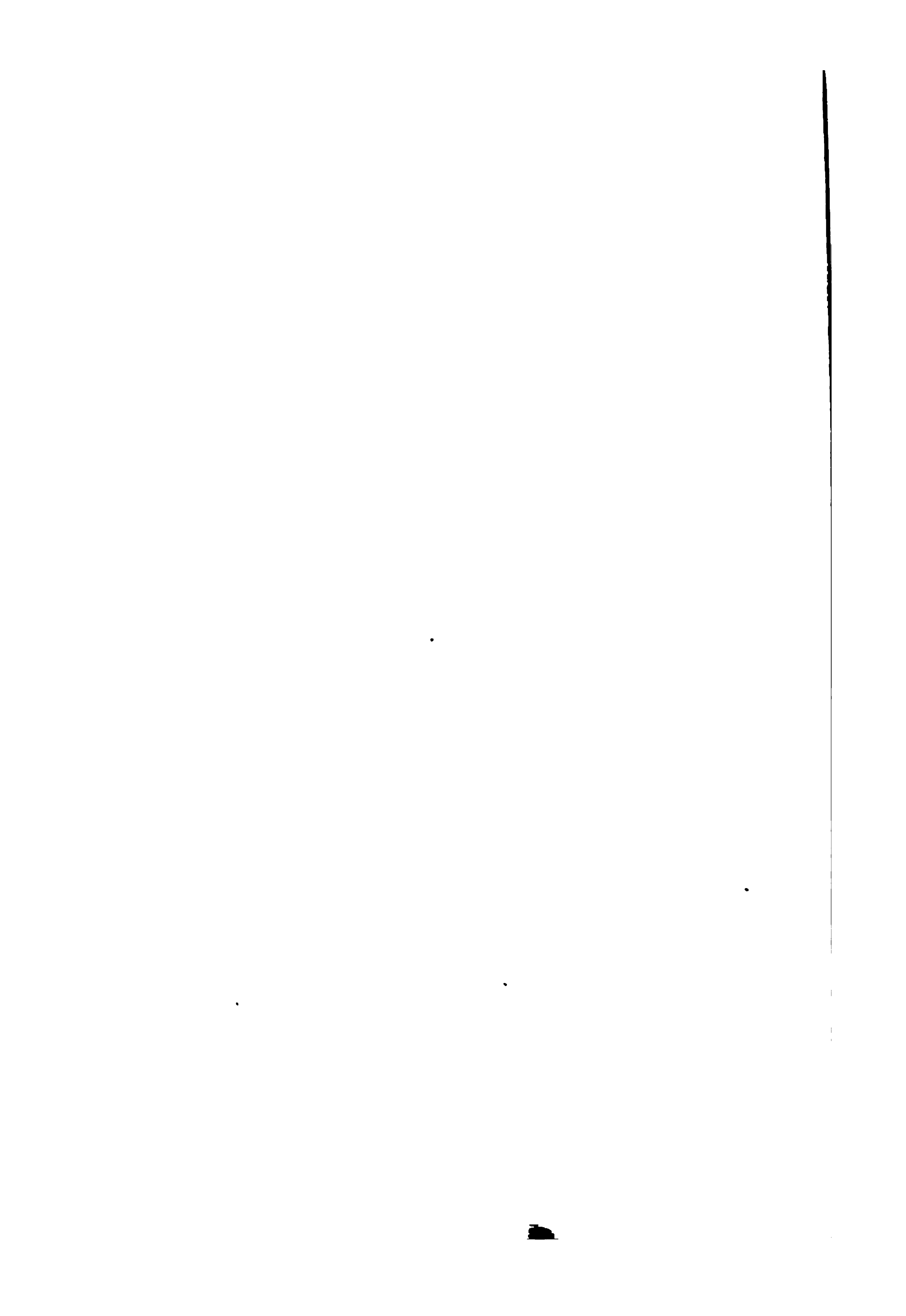
37) „*Nous sommes débarassés (par la conception de* WEIERSTRASS*)*" — sagt POINCARÉ in seiner neuesten Arbeit, *L'oeuvre mathématique de* WEIERSTRASS" (Acta mathematica XXII p. 7) „*des doutes qui au siècle dernier et dans la première moitié de ce siècle assaillaient souvent les penseurs à propos des principes du calcul infinitésimal et aussi de ceux que pouvait provoquer par ses lacunes la théorie des fonctions analytiques de* LAGRANGE. *Toute cela n'est plus aujourd'hui que de l'histoire ancienne.*" Ein Bruchstück dieser „*histoire ancienne*" haben wir versucht im gegenwärtigen Artikel zu geben.

38) MÉRAY, „*Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*" 4 Bde. 1894—98. Seinen Standpunkt erklärt MÉRAY in der Vorrede zum I. Bande, insb. p. XIV—XVIII.

39) Vgl. KLEIN, *The Evanston Colloquium.* 1894. p. 41 und Über Arithmetisierung der Mathematik (Nachrichten der kgl. Gesellschaft der Wissenschaft in Göttingen, 1895 S. 82—91). Vgl. auch die oben citierte Arbeit von POINCARÉ p. 16—18 und PRINGSHEIM, „Irrationalzahlen und Convergenz unendlicher Prozesse" in der Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, I Bd. 1es Heft p. 64.

Warschau, im Dezember 1898.

S. Dickstein.



P. W. WARGENTIN

UND DIE SOGENANNTE HALLEY'SCHE METHODE.

EIN BEITRAG
ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN STATISTIK

VON

G. ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

In der Bevölkerungsstatistik sind bekanntlich verschiedene Methoden angewendet worden um Sterblichkeitstafeln herzustellen. Von theoretischem Gesichtspunkte aus ist es offenbar am einfachsten eine Anzahl von Personen während ihres ganzen Lebens zu beobachten und dabei zu notieren, wie viele von ihnen 1, 2, 3, u. s. w. Jahre erfüllen; hierdurch erhält man nämlich ohne jeden Calcul unmittelbar die gewünschte Tafel. Indessen kann dieses Verfahren, das bei Leibrentnern anwendbar, wenn auch nicht immer empfehlenswert ist, nur ausnahmweise für eine ganze Bevölkerung benutzt werden, teils wegen der Ein- und Auswanderung, teils weil die Sterbelisten oft nur das Alter, aber nicht zugleich das Geburtsjahr der Verstorbenen enthalten, so daſs man nicht im Stande ist, das Absterben der besonderen Jahresgenerationen zu verfolgen. Darum ward man veranlaſst, sich nach anderen Methoden umzusehen, und in der That sind deren viele ersonnen worden; ein zu empfehlendes Verfahren ist z. B. zuerst mit Hilfe der Volkszählungs- und Sterbelisten Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Altersstufen zu bestimmen, und dann, nachdem man eine beliebige Anfangszahl, z. B. 100,000 gewählt hat, durch wiederholte Multiplikation die successiven Zahlen der Überlebenden zu berechnen.[1])

Im achtzehnten Jahrhundert gab es aber in den meisten Ländern keine Volkszählungen, und man bediente sich darum einer anderen Methode, die gewöhnlich die HALLEY'sche genannt wird. Nach dieser Methode brauchte

---

1) Andere Methoden sind z. B. die HERRMANN'sche und die sogenannte Anhaltische, welche beide nur von Sterbelisten und Geburtenzahlen Gebrauch machen (siehe KNAPP, *Über die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik,* Leipzig 1868, S. 84—97). Diese Methoden, von denen letztere besonders auf die Geburtenverteilung Rücksicht nimmt, würden zwar empfehlenswert sein, wenn die Sterblichkeit während einer längeren Zeit unveränderlich wäre; da aber dies im Allgemeinen nicht zutrifft, kann man ihnen keinen gröſseren Wert beimessen; jedenfalls sind sie unanwendbar, wenn man die Sterblichkeit in einem bestimmten Zeitraume näher untersuchen will. Der Ansicht KNAPP's (a. a. O. S. 97), die Anhaltische Methode sei nicht nur die strengste, sondern auch die einzige strenge unter den bisher bekannten indirekten Methoden, kann ich übrigens nicht beistimmen.

man nur die Zahlen der Verstorbenen eines Zeitraums, geordnet nach Altersklassen, zu kennen, um durch allmähliche Summation dieser Zahlen, vom höchsten Alter ab, die Absterbeordnung einer Generation herzuleiten. Wenn also im beobachteten Zeitraum m_x Personen im Alter von $x/x+1$ Jahren gestorben waren, und wenn $\omega/\omega+1$ das höchste beobachtete Sterbealter war, so folgerte man, daſs aus einer Generation von

$$m_0 + m_1 + m_2 + \cdots + m_\omega$$

Personen die Anzahl derer, die ein Alter von x Jahren erreichen würden, gleich

$$m_x + m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_\omega$$

war, und um die Absterbeordnung einer Generation von z. B. 100,000 Personen zu erhalten, genügte es, die ursprünglichen Zahlen mit

$$\frac{100{,}000}{m_0 + m_1 + m_2 + \cdots + m_\omega}$$

zu multiplizieren.

Es ist unmittelbar einleuchtend, daſs im allgemeinen[2]) das soeben geschilderte Verfahren nur dann gültig ist, wenn man von der Voraussetzung einer stationären Bevölkerung ausgeht, und daſs es also in den meisten Fällen ein mehr oder weniger fehlerhaftes Resultat[3]) giebt; folglich ist es eigentlich als ein Notmittel zu betrachten, dessen Anwendung beschränkt werden muſs auf Fälle, wo die Verteilung der Bevölkerung nach Altersklassen entweder gar nicht, oder wenigstens nicht mit Genauigkeit ermittelt werden kann.

Bekanntlich war Schweden das erste Land, wo die statistischen Erhebungen nicht nur Geborene und Verstorbene, sondern auch Lebende, nach Altersklassen geordnet, umfaſsten, und man könnte darum vermuten, daſs die sogenannte Halley'sche Methode in diesem Lande zuerst verworfen werden würde, besonders als die erste wissenschaftliche Bearbeitung des schwedischen Bevölkerungsmaterials in die Hände des vorzüglichen Astronomen P. W. Wargentin (1717—1783) fiel. Indessen ist Knapp in seiner *Theorie des Bevölkerungswechsels* zu dem Resultate gelangt, daſs Wargentin in seinen bevölkerungsstatistischen Arbeiten nicht nur diese Methode ohne Vorbehalt benutzte, sondern auch dieselbe zuerst als von Halley herrührend bezeichnete, und dadurch zu einem literarhistorischen Irrtum Anlaſs gab; nach Knapp's Untersuchung hat nämlich Halley selbst die Methode nicht benutzt. Zugleich hat sich Knapp über Wargentin als theoretischen Be-

2) In seiner soeben citierten Arbeit hat Knapp (S. 83—84) die Bedingungen, unter welchen die sogenannte Halley'sche Methode gültig ist, untersucht.

3) Vgl. Knapp, *Theorie des Bevölkerungswechsels* (Braunschweig 1874), S. 65—66.

völkerungsstatistiker sehr ungünstig ausgesprochen. Zwar beruft er sich dabei nur auf die erste Abhandlung, in der WARGENTIN die Ermittelung der Sterblichkeit behandelt hat, und da es schon von einigen Verfassern[4]) bemerkt worden ist, dafs dieser in seiner späteren Abhandlung über denselben Gegenstand sich einer ganz anderen Methode als der sogenannten HALLEY'schen bediente, so könnte es scheinen, als ob es unnötig wäre, auf KNAPP's wesentlichste Bemerkung gegen WARGENTIN Rücksicht zu nehmen. Da aber diese Bemerkung von anderen Verfassern wiederholt worden ist,[5]) und da es jedenfalls von Interesse sein kann, zu entscheiden, in wieweit KNAPP's harte Beurteilung der WARGENTIN'schen bevölkerungsstatistischen Arbeiten berechtigt ist, so werde ich mir erlauben, an dieser Stelle näher auf sie einzugehen. Besonders beabsichtige ich die zwei folgenden Fragen zu beantworten:

1) Hat WARGENTIN ohne Vorbehalt die sogenannte HALLEY'sche Methode benutzt, um die Absterbeordnung einer ganzen Bevölkerung zu ermitteln?

2) Hat WARGENTIN diese Methode als von HALLEY herrührend bezeichnet?

I.

Schon in einer 1754 veröffentlichten bevölkerungsstatistischen Abhandlung[6]) hatte WARGENTIN Gelegenheit im Vorübergehen die Frage nach der Ermittelung der Sterblichkeitsverhältnisse einer ganzen Bevölkerung zu berühren. Es handelte sich aber dort nicht um die Bestimmung der Absterbeordnung, d. h. wie eine gegebene Anzahl von Altersgenossen sich im Laufe ihres Alters vermindern, sondern um die Sterblichkeitsziffer, d. h. das Verhältnis

---

4) Siehe z. B. NICANDER, *Tabell-värkets tillstånd ifrån 1772 till 95.* VII: *Om de lefvandes förhållande till hvarandra och till de döda, i alla åldrar, samt den sannolika för dem återstående lifstiden.* [Svenska] vetenskapsakademiens nya handlingar **22**, 1801, S. 57—58. — JANSE, *Over de constructie en afronding van sterftetafels* (Amsterdam 1885), S. 10—14. — WESTERGAARD, *Statistikens Theori i Grundrids* (Kjöbenhavn 1890), S. 284.

5) Siehe z. B. die von LIPPERT verfafste Notiz über WARGENTIN im *Handwörterbuch der Staatswissenschaften, herausgegeben von* J. CONRAD, W. LEXIS, L. ELSTER, E. LOENING, B. VI (Jena 1894), S. 603—604.

6) WARGENTIN, *Anmärkningar om nyttan af årliga förtekningar på födda och döda i et land;* Svenska vetenskapsacademiens handlingar **15**, 1754, S. 161—172, 241—254. — *Anmerkungen vom Nutzen der jährlichen Verzeichnisse der Gebohrnen und Verstorbenen in einem Lande;* Der schwedischen Akademie der Wissenschaften Abhandlungen, übersetzt von A. G. KÄSTNER **16**, 1754 (Leipzig 1756), S. 163—174, 245—256.

zwischen der Anzahl der jährlichen Sterbefälle und der Anzahl der Lebenden. WARGENTIN bemerkte nämlich, daſs in einem und demselben Lande dies Verhältnis jedes Jahr nahezu dasselbe ist, und daſs es selbstverständlich unmittelbar berechnet werden könne, wenn sowohl die Anzahl der Sterbefälle als die Anzahl der Lebenden bekannt wären, daſs aber das Verhältnis auch auf einem anderen, von HALLEY angewiesenen Weg allein aus den Zahlen der Verstorbenen eines Zeitraums, geordnet nach Altersklassen, zu bestimmen sei. HALLEY hätte nämlich ein Verfahren angegeben, um die Anzahl der Lebenden aus den soeben erwähnten Zahlen zu berechnen.[7])

Im folgenden Jahre[8]) entwickelte WARGENTIN dies Verfahren und wendete es auf schwedisches Bevölkerungsmaterial an; aus den Sterbelisten erhielt er unmittelbar die Zahlen der im Jahre 1749 in Schweden Verstorbenen, geordnet nach Altersklassen, und durch gewöhnliche Proportionsrechnung leitete er dann eine Tafel her, welche zeigte, wie 1000 *Verstorbene* sich auf die verschiedenen Altersklassen verteilten. Aus dieser Tafel berechnete er ferner durch successive Additionen eine andere, welche sich auf eine Anzahl von 1000 Geborenen bezog und die Anzahl der *Lebenden* in verschiedenen Altersstufen angab. Aus der Überschrift der ersten Tafel[9]) geht nicht deutlich hervor, ob diese Tafel die in einem Zeitraum oder die

7) WARGENTIN, *Anmärkningar om nyttan af årliga förteckningar på födda och döda i et land;* a. a. O. **15**, 1754, S. 246. — *Anmerkungen vom Nutzen der jährlichen Verzeichnisse der Gebohrnen und Verstorbenen in einem Lande;* a. a. O. **16**, 1754, S. 249—250: „Die Zahl derer, die jährlich in einem Lande sterben, ist ein bestimmter Theil der Anzahl aller Lebenden, der also durch Verzeichnisse der Verstorbenen kann berechnet werden, wenn man nur zuvor weiſs, was für ein groſser Theil die erste Zahl von der letztern ist, welche Verhältniss — — — auf zweyerley Art kann entdecket werden. Die eine ist ihrem Grunde nach einfacher, aber in der Bewerkstelligung schwerer, und bestehet darinnen, daſs man Verzeichnisse nicht nur aller jährlich Gebohrnen, Verheiratheten und Verstorbenen, sondern auch aller Lebenden einfordert. — — — Aber HALLEY hat (Phil. Trans. **196** N.) einen sinnreichen Weg zu Erhaltung eben der Absicht gewiesen, nämlich bloſs aus den Verzeichnissen der Verstorbenen, wenn sie jedes Alter beym Tode angeben, die Menge der noch Lebenden zu berechnen. Diese letztere Art will ich ein anderesmal erklären."

8) WARGENTIN, *Anmärkningar om nyttan af årliga förteckningar på födda och döda i et land;* Svenska vetenskapsacademiens handlingar **16**, 1755, S. 1—15, 81—96, 161—170, 241—253. — *Anmerkungen vom Nutzen der jährlichen Verzeichnisse Gebohrner und Verstorbener in einem Lande;* Der schwedischen Akademie der Wissenschaften Abhandlungen, übersetzt von A. G. KÄSTNER **17**, 1755 (Leipzig 1757), S. 3—16, 81—94, 159—167, 239—250.

9) WARGENTIN, *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 88. — *Anmerkungen* etc.; a. a. O. **17**, 1755, S. 87: „Erste Tafel, welche zeiget, wie viel Menschen in jedem Alter sterben, wenn aus allen Altern zusammen 1000 sterben."

im Laufe des Absterbens einer Generation stattfindenden Sterbefälle betreffen sollte, aber aus einer Stelle,[10]) welche der Tafel vorangeht, kann man schliefsen, dafs es sich für WARGENTIN zunächst nur um Sterbefälle in einem Zeitraum handelte. Auf der anderen Seite erhellt aus der Erklärung zur zweiten Tafel,[11]) dafs diese sich auf eine Generation beziehen mufs. WARGENTIN leitete also wirklich aus den Zahlen der in einem Zeitraum Verstorbenen die Zahlen der Lebenden in der Sterblichkeitstafel her, und dies ist ja nur für eine stationäre Bevölkerung zulässig. Er berechnete auch aus der zweiten Tafel Sterblichkeitsprozente (eigentlich reciproke Werte der Sterblichkeitsprozente) für verschiedene Altersklassen,[12]) was noch deutlicher zeigt, dafs er wirklich eine Generation und nicht gleichzeitig Lebende in Betracht nahm. KNAPP's erste Anmerkung scheint also wirklich zuzutreffen, aber man darf nicht ohne Weiteres daraus schliefsen, dafs WARGENTIN die Bedingtheit des angewendeten Verfahrens nicht kannte. Die schwedischen Volkszählungslisten, welche WARGENTIN 1755 zur Verfügung hatte, waren nämlich unzuverlässig,[13]) und wenn man unter solchen

---

10) WARGENTIN, *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 87. — *Anmerkungen* etc.; a. a. O. **17**, 1755, S. 86: „Die erste Tafel zeiget, wenn tausend Menschen an gewöhnlichen Krankheiten an einem Orte sterben, wie viel dieser Todten jedem Alter zugehören."

11) WARGENTIN, *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 90. — *Anmerkungen* etc.; a. a. O. **17**, 1755, S. 89: „Die zweite Tafel zeiget, wie viel Menschen von 1000, die auf die Welt kommen, [ohngefähr] ein gewisses Alter erreichen, wenn so viel in eben der Zeit und in der Ordnung sterben, wie die Reihen der ersten Tafel unter eben den Ziffern angeben." — Das eingeklammerte Wort findet sich nicht im schwedischen Original, sondern ist vom Übersetzer hinzugefügt worden.

12) WARGENTIN, *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 91—92. — *Anmerkungen* etc.; a. a. O. **17**, 1755, S. 90: „Auch können wir aus der anderen Tafel finden, wie die Lebenskraft des Menschen von der Geburt an einige Jahre schnell zunimmt."

13) Siehe WARGENTIN, *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 166. — *Anmerkungen* etc.; a. a. O. **17**, 1755, S. 164: „Ich habe sehr viel Ursache, die Nachrichten — — — als unrichtig in Verdacht zu haben, da vermuthlich eine Menge Leute mögen unbedachtsamlich seyn übersehen worden." — Vgl. WARGENTIN, *Mortaliteten i Sverige, i anledning af tabell-verket;* [Svenska] vetenskapsacademiens handlingar **27**, 1766, S. 2—3. — *Von der Sterblichkeit in Schweden, nach dem Tabellenwerke;* Der schwedischen Akademie der Wissenschaften Abhandlungen, übersetzt von A. G. KÄSTNER **28**, 1766 (Leipzig 1768), S. 4: „Ausserdem hatte ich auch Ursache zu zweifeln, ob diese einjährigen Tabellen in allen Stücken richtig wären; denn sie enthielten das Jahr 1749, da das Tabellenwerk zuerst eingerichtet ward. Vermuthlich konnten auch anfangs viel Fehler eingeschlichen seyn, da die Hochwürdige Geistlichkeit an eine so neue, mühsame und schwere Verrichtung noch nicht gewöhnt war".

Umständen die Absterbeordnung zu bestimmen wünscht, mufs man jedenfalls mit einem approximativen Resultate — und ein solches giebt ja die sogenannte HALLEY'sche Methode — sich begnügen. Um den theoretischen Standpunkt WARGENTIN's beurteilen zu können, ist es also nötig, andere Belegstellen aufzusuchen, und eine solche, welche die hier vorliegende Frage betrifft, giebt es in der schon citierten Abhandlung vom Jahre 1755. WARGENTIN hob hier hervor, dafs die HALLEY'sche Methode für Schweden kein richtiges Resultat geben konnte, weil in diesem Lande die Zahl der jährlich Geborenen der Zahl der jährlich Verstorbenen nicht gleich war.[14]) Ferner bewies er ausführlich, dafs in einem Lande, wo die Zahl der Geborenen gröfser ist, als die Zahl der Verstorbenen, die älteren Altersklassen verhältnismäfsig geringzähliger sind als die Absterbeordnung verlangt, und umgekehrt.[15]) Aber auch hier mufs man sich hüten in WARGENTIN's Worte zuviel hineinzulegen; in der That versteht er hier wie immer unter „HALLEY'sche Methode" nur die Berechnung der ganzen Anzahl der Lebenden in einem Lande mit Benutzung von Sterbelisten nach dem Alter, aber *nicht* die Ermittelung der Absterbeordnung aus diesen Sterbelisten. Man sieht aber leicht ein, dafs die Sterblichkeitstafel sehr wohl richtig sein könnte, und dennoch, wegen des Anwachsens der Bevölkerung, ihre Summe gröfser als die Zahl der Lebenden ausfallen kann. Die einzigen Worte der citierten Stelle, welche sich auf unsere Frage beziehen, sind diese: „Ich habe gewiesen, wie viel Menschen von 1000 ein gewisses Alter erreichen; *wobey man an-*

14) WARGENTIN, *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 161—162. — *Anmerkungen* etc.; a. a. O. **17**, 1755, S. 159—160: „Im nächstvorhergehenden Stücke dieser Anmerkungen habe ich — — — gewiesen, wie viel Menschen von 1000, die in einem Jahre in einem gewissen Lande zur Welt kommen, ein gewisses Alter erreichen; wobey man annimmt, dass in diesem Lande auch jährlich 1000 sterben. — — — Wollte man hieraus Berechnungen für jedes Jahr von 1 bis 90 machen, und alle gefundene Zahlen in eine Summe zusammen rechnen, so würde solche die Menge aller zu einer Zeit lebenden Menschen vorstellen, wenn in jedem der vorhergehenden 90 Jahre ohngefähr 1000 sowohl gebohren werden, als sterben. So berechnete HALLEY die Menge der Einwohner in Breslau, welches auch nach den angenommenen Grundsätzen völlig richtig ist. Wenn aber entweder mehr gebohren werden, als sterben, oder das Gegentheil geschieht, — — — so kann HALLEY's Methode mit der Wahrheit nicht vollkommen überein stimmen; denn im ersten Falle muss die Anzahl von Menschen kleiner und im letzten grösser seyn, als die Berechnungsart ergiebt. Indessen ist es nützlich, diese Berechnung als ein Mittel und als eine sichere Anleitung anzunehmen; aus Verzeichnissen der Gebohrnen, Verstorbenen und Lebenden auf einige Jahre zu erforschen, ob sich die Menge des Volkes in den vorhergehenden 90 Jahren vermehret oder vermindert hat, und wie viel solches geschehen ist."

15) WARGENTIN, *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 165—166. — *Anmerkungen* etc.; a. a. O. **17**, 1755, S. 163—164.

nimmt, dafs auch jährlich 1000 sterben", und diese Worte würden entscheidend sein, wenn man nicht wüfste, dafs gerade in dem Falle, auf den WARGENTIN hier ausdrücklich verweist, die Annahme *nicht* zutraf; jetzt aber kann ich auf die kursiv gedruckten Worte kein eigentliches Gewicht legen. Die citierte Stelle giebt also meiner Ansicht nach keinen direkten Aufschlufs über die Frage, welche uns hier interessiert, und auf indirektem Wege kann man auch nicht zu irgend einem sicheren Schlufs gelangen. Zwar könnte man bemerken, dafs WARGENTIN, der ja dargethan hatte, dafs in einem Lande mit nicht stationärer Bevölkerung die Altersverteilung der in einem Zeitpunkte Lebenden von der der Überlebenden in der Sterblichkeitstafel verschieden ist, auch wissen mufste, dafs zwischen der Altersverteilung der in einem Zeitraume Verstorbenen und der der Verstorbenen in der Sterblichkeitstafel ein entsprechender Unterschied stattfindet; aber man könnte ebenso gut behaupten, WARGENTIN habe dieser Frage keine besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Der Zweck seiner Abhandlung war ja nur die Nützlichkeit jährlicher Verzeichnisse von Geborenen und Verstorbenen zu beweisen, und die Absterbeordnung brauchte er eigentlich nur, um auszufinden, ob die Bevölkerung Schwedens im Wachsen oder Abnehmen war. Für die Richtigkeit dieser Ansicht spricht auch die ziemlich unbestimmte Ausdrucksweise, deren WARGENTIN sich bediente, als er seine Sterblichkeitstafel berechnet hatte und dann zur Frage über die Zahl der Lebenden überging.[16])

Die bisherige Untersuchung hat also ein wesentlich negatives Resultat ergeben. Auf der einen Seite hat WARGENTIN thatsächlich die sogenannte HALLEY'sche Methode benutzt, um die Absterbeordnung zu bestimmen, ohne bei Anwendung dieser Absterbeordnung ausdrücklich hervorzuheben, dafs die Methode in den meisten Fällen ungenau ist; auf der anderen Seite aber gab es in Schweden noch keine zuverlässigen Erhebungen über die Altersverteilung der Bevölkerung, und da WARGENTIN nötig hatte, eine wenigstens annähernd gültige Absterbeordnung zu ermitteln, mufste er irgend ein Verfahren wählen, das ausschliefslich oder vorzugsweise auf Sterbelisten gegründet werden konnte.

Ein ganz anderes Aussehen bekommt die Frage über WARGENTIN's Standpunkt hinsichtlich der sogenannten HALLEY'schen Methode, wenn wir seine im Jahre 1766 veröffentlichte Abhandlung über die Sterblichkeit in

16) WARGENTIN, *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 164. — *Anmerkungen* etc.; a. a. O. 17, 1755, S. 162: „Aus der ersten Reihe sehen wir hier, dafs, wenn die Menge in einer Zeit von neunzig Jahren weder *merklich* vermehret noch vermindert wird, gegen 1000 jährlich auf die Welt kommende Kinder, *32 bis 33000* Menschen leben müssen."

Schweden[17]) in Betracht nehmen; auffallender Weise hat KNAPP diese Abhandlung gar nicht erwähnt. Hier finden wir nämlich eine vollständig durchgeführte Anwendung nicht nur der Sterbelisten, sondern auch der Volkszählungslisten um die Sterblichkeitsprozente für verschiedene (in der Regel fünfjährige) Altersklassen zu ermitteln. WARGENTIN bemerkt ausdrücklich, der kürzeste Weg, um die Absterbeordnung zu finden, sei die Zahlen der Verstorbenen und der Lebenden zu vergleichen,[18]) während er die sogenannte HALLEY'sche Methode weder benutzt, noch erwähnt. Für die Berechnung der Sterblichkeitsprozente waren ihm jährliche Sterbelisten für 1755—1763 und Volkszählungslisten für die drei Jahre 1757, 1760, 1763 zugänglich, und dies Material wendete er so an, dafs er für jede Altersklasse die Mittelzahlen der in den Jahren 1755—1757, 1758—1760, 1761—1763 Verstorbenen beziehungsweise mit den Zahlen der Lebenden in den Jahren 1757, 1760, 1763 verglich; auf diese Weise erhielt er verschiedene Reihen von Sterblichkeitsprozenten. Zwar könnte man einwenden, dafs, da die Bevölkerung Schwedens im Anwachsen war, diese Sterblichkeitsprozente zu klein sein mufsten, aber WARGENTIN machte darauf aufmerksam, dafs die Volkszählungen wahrscheinlich nicht die ganze Bevölkerung umfafst hatten, also die Zahlen der Lebenden zu klein waren,[19]) und vielleicht war eben dieser Umstand für WARGENTIN's Verfahren bestimmend. Man hätte erwarten können, dafs WARGENTIN auch hier eine gewöhnliche Sterblichkeitstafel hergeleitet hätte, aber daran scheint er nicht gedacht zu haben; hieraus zu schliefsen, dafs er die Absterbeordnung nicht aus der Tafel der Sterblichkeitsprozente berechnen konnte, hiefse aber ihm zu wenig Scharfsinn zuzutrauen. Übrigens hat WARGENTIN auch später ähnliche Berechnungen mit Hilfe von schwedischem statistischen Material aus den Jahren 1765—1776 ausgeführt; ein Auszug daraus ist von R. PRICE in der 4. Auflage (1783) seiner *Observations on reversionary payments* veröffentlicht worden.[20])

---

17) Siehe Anmerkung 13).

18) WARGENTIN, *Mortaliteten i Sverige* etc.; a. a. O. S. 3. — *Die Sterblichkeit in Schweden* etc.; a. a. O. S. 5: „Das leichteste Mittel, die Ordnung der Sterblichkeit zu finden, besteht darinnen, dass man die Menge der Verstorbenen und der Lebenden in einem Jahre mit einander vergleicht."

19) WARGENTIN, *Mortaliteten i Sverige* etc.; a. a. O. S. 13. — *Die Sterblichkeit in Schweden* etc.; a. a. O. S. 14: „Aus vielen Ursachen scheint es leichter, dass einige Lebende bey der Rechnung sind ausgelassen worden; — — — dieserwegen ist mir sehr wahrscheinlich, dass die Menge des Volks — — — in diesen Tabellen eher zu gering als zu gross angegeben ist."

20) Siehe z. B. NICANDER, a. a. O. S. 58

II.

In seiner 1693 gedruckten Abhandlung über die Schätzung der Grade der Sterblichkeit[21]) hat Halley die Bevölkerungszahl der Stadt Breslau so bestimmt, dafs er zuerst eine Tafel der Lebenden in jeder einjährigen Altersstufe aufstellte und dann die sämtlichen Zahlen der Tafel summierte. Um die Tafel selbst zu berechnen, bekam er aus Breslau Aufzeichnungen, teils über die in den fünf Kalenderjahren 1687—1691 Verstorbenen, nach Altersklassen geordnet, teils über die in denselben fünf Jahren geborenen Kinder. Nach diesen Aufzeichnungen waren in einem mittleren Kalenderjahre 1174 Menschen verstorben und 1238 Kinder geboren, also fast ebenso viele verstorben als geboren; unter den Verstorbenen befanden sich 348 im ersten Altersjahre und 198 im Alter von 1 bis 6 Jahren. Für die folgenden Altersstufen teilte Halley eine besondere Tafel mit, welche jedoch an zwei Stellen Lücken hatte.[22]) Ohne näher anzugeben, wie er das ihm vorliegende Material benutzt hatte, stellte er die zuerst erwähnte Tafel auf; die zwei ersten Zahlen dieser Tafel sind 1000 und 855. Da 1000 die erste Zahl ist, könnte man glauben, Halley habe diese willkürlich gewählt, aber da die Summe aller Zahlen in der Tafel als Zahl der in Breslau lebenden Bevölkerung gelten sollte, mufs man eine andere Erklärung der Zahl 1000 suchen, und Knapp hat bemerkt,[23]) dafs 1000 das Mittel zwischen 1174 und $1174 - 348 = 826$ ist, das heifst, das Mittel zwischen der Anzahl der Neugeborenen und der Anzahl derer, welche das Ende des 1. Altersjahres erreichen, vorausgesetzt dafs in jedem Jahre die Neugeborenen genau ebenso viel wären wie die Verstorbenen; mit Bezugnahme hierauf könnte also 1000 ungefähr die Zahl der Lebenden im 1. Altersjahre repräsentieren. Nun ist aber Halley ausdrücklich von der Annahme ausgegangen, dafs in Breslau jährlich 1238 Kinder geboren wurden, und es mufs also eine bessere

---

21) Halley, *An estimate of the degrees of the mortality of mankind drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw. — Some further considerations on the Breslaw bills of mortality;* Philosophical Transactions 17, 1693, 596—610, 654—656.

22) Diese Lücken sind wahrscheinlich durch den Druck entstanden. Das von Halley angewendete Material ist trotz wiederholter Nachforschungen in verschiedenen Archiven und Bibliotheken noch nicht aufgefunden worden, aber eine Rekonstruktion desselben, mit Benutzung der Tauf- und Todtenbücher Breslau's, ist von J. Grätzer ausgeführt worden und auf den Seiten 54—60 der Monographie: *Edmund Halley und Caspar Neumann. Ein Beitrag zur Geschichte der Bevölkerungs-Statistik* (Breslau 1883) veröffentlicht. Die Grätzer'schen Zahlen stimmen sehr gut, wenn auch nicht immer genau, mit den Halley'schen.

23) Knapp, *Theorie des Bevölkerungswechsels*, S. 129.

Erklärung der Zahl 1000 gesucht werden. Zu diesem Zwecke ist vo anderen Verfassern[24]) darauf hingewiesen worden, dafs, wenn 1238 Kind jährlich geboren werden und 348 von diesen im 1. Altersjahre sterbe wegen der schnellen Abnahme der Sterblichkeit, die Anzahl der gleic zeitig Lebenden in dieser Altersstufe nicht etwa $\frac{1238 + (1238-348)}{2} = 106$ sondern fast genau 1000 sein wird. Die übrigen Zahlen in der HALLEY'sche Sterblichkeitstafel können dagegen nicht unmittelbar aus dem gegebene Material hergeleitet werden, und man mufs darum annehmen, HALLE habe die ursprünglichen Zahlen auf irgend eine Weise korrigiert oder au geglichen.[25])

Ist es also wahr, dafs HALLEY seine Sterblichkeitstafel fast au schliefslich auf Aufzeichnungen über die Altersverteilung der in einem Zei raum Verstorbenen gründete, so steht es dennoch fest, dafs er gar nic die später sogenannte HALLEY'sche Methode als allgemein gültig angegebe hat, und er hat sie auch nicht in ihrer typischen Form benutzt. KNAP hat also Recht, als er bemerkt, dafs diese Methode sich bei HALLEY nu spurenweise findet,[26]) und wenn es bewiesen werden kann, dafs WARGENTI sie diesem letzteren zugeschrieben hat, liegt hierin ohne Zweifel ein litera historischer Irrtum.

Nehmen wir jetzt die schon citierten Abhandlungen WARGENTIN's vo den Jahren 1754 und 1755 in Betracht, so finden wir zwar, dafs dort vo der HALLEY'schen Methode oder Berechnungsart[27]) gesprochen wird, abe

---

24) Siehe LINDELÖF, *Några betraktelser öfver de statistiska beräkningarn rörande lifslängden. Promotionsprogram* (Helsingfors 1873), S. 18—19. — GRÄTZE a. a. O. S. 80. — WESTERGAARD, a. a. O. S. 280.

25) GRÄTZER hat a. a. O. S. 78—80 zu beweisen versucht, dafs HALLEY da ihm vorgelegte Material vollständig korrekt nach den Prinzipien der graphische Ausgleichung von Beobachtungen behandelte, aber der Beweis dieser Behauptun scheint mir ein wenig zu kühn.

26) KNAPP, *Theorie des Bevölkerungswechsels,* S. 130.

27) WARGENTIN, *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **15**, 1754, S. 169, 246; **16**, 175 S. 162, 165. — *Anmerkungen* etc.; a. a. O. **16**, 1754, S. 170 (siehe unten Anm. 28 250 (siehe Anm. 7); **17**, 1755, S. 160 (siehe Anm. 14), 163 („HALLEY's Art, d Menge der Leute in einem Lande zu berechnen"). — Nur an einer Stelle brauch WARGENTIN den Ausdruck: „HALLEY'sche Berechnung", ohne dafs es aus dem Zu sammenhange deutlich hervorgeht, dafs er von der Berechnung der ganzen Zal der Lebenden sprechen will; siehe *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 163. - *Anmerkungen* etc.; a. a. O. **17**, 1755, S. 160: „Ich habe daher geglaubet, recht z thun, wenn ich — — — den Ausschlag — — — mit demjenigen vergliche, wa nach der HALLEYischen Berechnung heraus kömmt." — Über den Ausdruck: „HALLEY' Ve siehe unten Anm. 33.

wie wir schon früher im Vorübergehen bemerkt haben, bezieht sich dieser Ausdruck nicht darauf, auf irgend eine Weise die Absterbeordnung aus den Sterbelisten zu bestimmen, sondern nur auf die Berechnung der ganzen Anzahl der Lebenden aus diesen Listen. Nun könnte es zwar scheinen, als ob der Unterschied in der That ohne Belang wäre, da man, um die ganze Anzahl der Lebenden zu erhalten, zuerst die Zahlen der Lebenden in verschiedenen Altersstufen, d. h. gerade die Absterbeordnung, berechnen muſs, und es ist ja nicht unwahrscheinlich, daſs WARGENTIN, wenn er der sogenannten HALLEY'schen Methode einen Namen hätte geben wollen, sie gerade so genannt hätte, aber dies ist wohl etwas ganz anders, als die Benennung wirklich benutzt zu haben. In einem Punkte hat WARGENTIN jedoch HALLEY miſsverstanden: jener sagt nämlich,[28]) HALLEY habe für Breslau sich nur der Sterbelisten bedient, aber mit dieser Ungenauigkeit kann man um so mehr Nachsicht haben, als ja KNAPP selbst der Ansicht gewesen ist, die HALLEY'sche Anfangszahl 1000 sei nur aus den Sterbelisten hergeleitet worden.

Ferner tadelt KNAPP bei WARGENTIN,[29]) daſs er: 1) fälschlich HALLEY ein gewisses Verfahren bei der Anwendung des Breslauer Materials zuschrieb; 2) bei der Umrechnung von KERSSEBOOM's und DEPARCIEUX' Tafeln den Begriff der aus einer Generation Verstorbenen mit dem Begriff der in einem Zeitraume Verstorbenen vermischte, und dadurch den Anlaſs zu der sachlichen Vermengung der Absterbeordnung mit der Altersverteilung der in einem Zeitraum Verstorbenen gab; 3) den Vorbehalt, unter welchem allein die sogenannte HALLEY'sche Methode gültig ist, d. h. daſs die Bevölkerung als stationär betrachtet werden kann, verschwieg. Sein Urteil über WARGENTIN als theoretischen Bevölkerungsstatistiker faſst KNAPP dahin zusammen,[30]) daſs jener teils sich mit einer dürftigen Kenntnis seiner Vorläufer begnügte und an den neuen Stoff keinen neuen Gedanken heranbrachte, teils alle von diesen Vorläufern schon gewonnenen Unterscheidungen zwischen Gesamtheiten von Lebenden und Verstorbenen verwischte und eine

---

28) WARGENTIN, *Anmärkningar* etc.; a. a. O. 15, 1754, S. 169, 246. — *Anmerkungen* etc.; a. a. O. 16, 1754, S. 250 (siehe Anm. 7). — Auf Seite 170 der deutschen Übersetzung der soeben citierten WARGENTIN'schen Abhandlung findet sich folgender Passus: „Nachdem HALLEY aus der Anzahl der jährlich *Gebohrnen und* Verstorbenen in Breslau auf eine Art, die weiter unten soll erkläret werden, ohngefähr die Menge der Einwohner der Stadt, grosser und kleiner, ausgerechnet hatte", aber die zwei von mir unterstrichenen Worte sind vom Übersetzer eingeschaltet worden.

29) KNAPP, *Theorie des Bevölkerungswechsels,* S. 74, 75.

30) KNAPP, *Theorie des Bevölkerungswechsels,* S. 73, 75.

Disziplin, die in strengster Weise sich zu entwickeln begonnen hatte, zum Stillstand brachte.

Die erste dieser Bemerkungen scheint mir auf einem Mifsverständnis von KNAPP's Seite zu beruhen. An der betreffenden Stelle referierte WARGENTIN über die von HALLEY veröffentlichten Zahlen der in Breslau Verstorbenen[31]) und bemerkte dann, dafs HALLEY diese Zahlen „gefunden" hatte,[32]) womit er ohne Zweifel nur sagen wollte, dafs HALLEY sie in den ihm übermittelten Aufzeichnungen gefunden hatte; über HALLEY's Verfahren bei der Bearbeitung dieser Aufzeichnungen äufsert sich WARGENTIN an der citierten Stelle gar nicht.[33])

Die zweite Bemerkung dürfte zum Teil richtig sein, und würde zu befugtem Tadel gegen WARGENTIN veranlassen können, wenn dieser eine Darstellung der Methoden zur exakten Berechnung der Absterbeordnung beabsichtigt hätte; da aber dies nicht der Fall ist, und da WARGENTIN für seinen Zweck nur approximative Zahlen nötig hatte, scheint mir die Bemerkung zum Teil ohne Belang, zum Teil unrichtig.

Die dritte Bemerkung endlich dürfte weniger begründet sein als die zweite, da WARGENTIN, obgleich er keinen eigentlichen Anlafs hatte, die Aufmerksamkeit auf die Bedingtheit der sogenannten HALLEY'schen Methode

---

31) WARGENTIN, *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 85. — *Anmerkungen* etc.; a. a. O. **17**, 1755, S. 84—85.

32) WARGENTIN, *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 87. — *Anmerkungen* etc.; a. a. O. **17**, 1755, S. 86: „Die erste Reihe enthält die Verhältnisse der Verstorbenen für jedes Alter, wie HALLEY sie gefunden hat, da er sich der breslauischen Nachrichten bedienet." Die deutsche Übersetzung hätte korrekter sein können; in der That sagt WARGENTIN: „Den första Columnen utmärker förhållandet af de dödas antal för hvar ålder, såsom HALLEY det funnit i Breslau" (die erste Reihe giebt die relativen Zahlen der Verstorbenen für jedes Alter an, wie HALLEY es in Breslau gefunden hatte).

33) Wenn WESTERGAARD a. a. O. 285, in nahem Anschlufs an KNAPP, sagt: „WARGENTIN — — — opfattede HALLEY's Methode som om han kun havde fordelt Dödsfaldene pro mille for deraf at danne en Overlevelsestavle", so kann er sich zwar auf eine Stelle in der WARGENTIN'schen Abhandlung vom Jahre 1755 berufen, wo es S. 162 der deutschen Übersetzung heifst: „Die erste Reihe zeiget, wie viel Menschen in jedem Alter zu finden wären, wenn *nach* HALLEY's *Voraussetzung* jährlich 1000 Kinder auf die Welt kämen, und 1000 Menschen von allen Altern zusammen stürben" (vgl. *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 164), aber der von mir unterstrichene Ausdruck *kann* wohl auf eine kleine Achtlosigkeit von WARGENTIN's Seite beruhen. Sonst wäre dies die einzige Stelle, wo WARGENTIN behauptet hätte, dafs HALLEY, um seine Sterblichkeitstafel herzuleiten, die Summe der Verstorbenen gleich 1000 setzte, und dann, mit Benutzung der beobachteten Sterbefälle, diese 1000 Verstorbenen auf die verschiedenen Altersstufen verteilte.

zu lenken, wenigstens einmal[34]) diese Bedingtheit im Vorübergehen andeutete.

In Bezug auf KNAPP's zusammenfassendes Urteil erlaube ich mir zu bemerken, dafs es augenscheinlich zu hart ist. Es mag sein, dafs WARGENTIN die Arbeiten seiner Vorläufer nicht eingehend studiert hatte,[35]) und es ist richtig, dafs er die Ermittelung der Sterblichkeit aus Sterbe-, Geburts- und Volkszählungslisten nicht systematisch behandelte, aber auf der anderen Seite hatte er sich eine solche Aufgabe gar nicht vorgelegt. Dafs die Theorie der Sterblichkeitsmessung durch WARGENTIN's Zuthun zum Stillstand gebracht wurde, dürfte nicht bewiesen werden können, und dafs er an den neuen Stoff wenigstens einen — wenn auch sehr nahe liegenden — Gedanken heranbrachte, geht aus dem, was ich oben von seiner späteren Abhandlung angeführt habe, hervor.

* * *

Auf Grund der vorhergehenden Untersuchung können wir also die zwei besonders aufgestellten Fragen in folgender Weise beantworten:

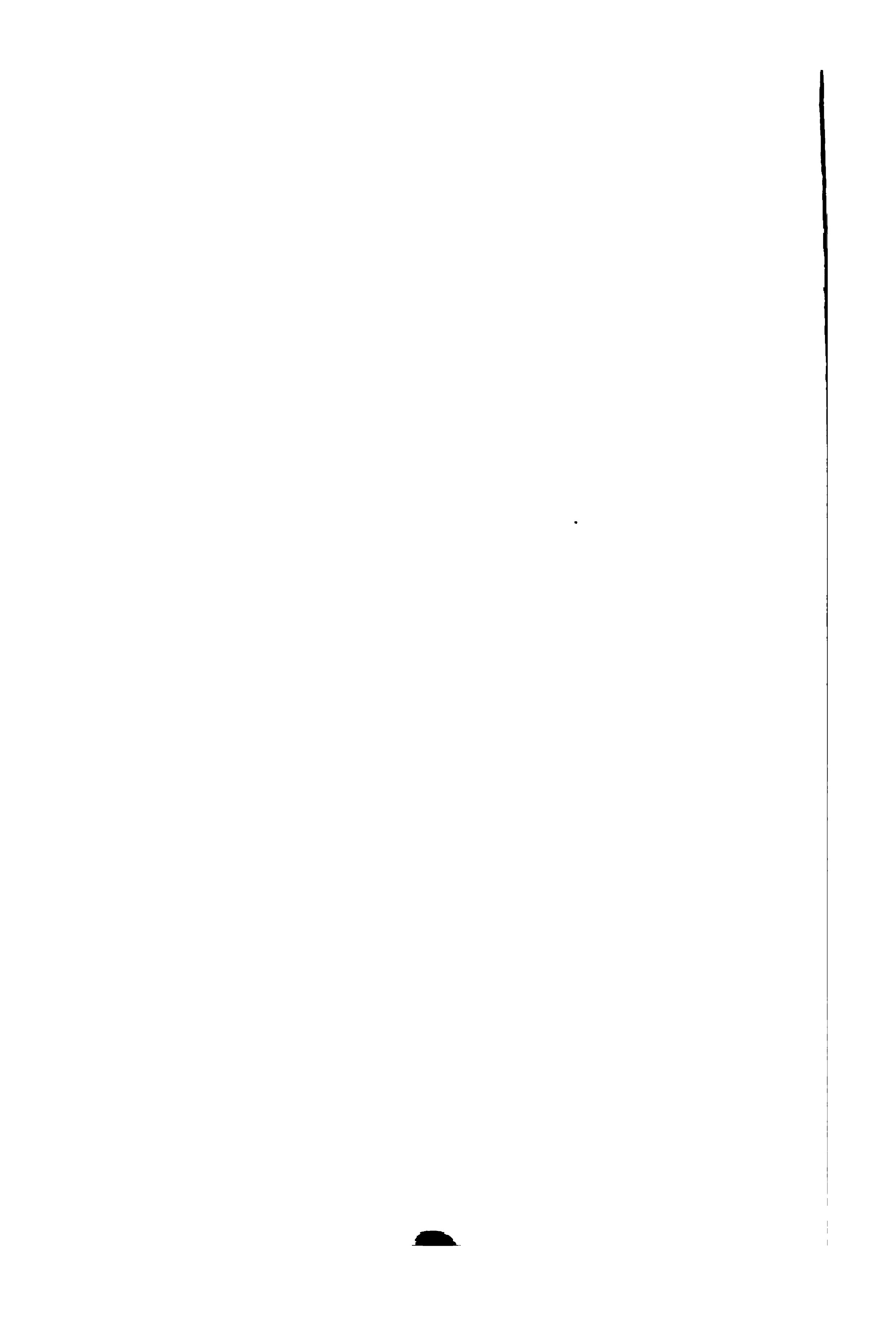
1) WARGENTIN benutzte zwar einmal die sogenannte HALLEY'sche Methode, aber damals hatte er keine zuverlässigen Volkszählungslisten zur Verfügung; später als er solche bekommen hatte, ward diese Methode von ihm weder benutzt noch erwähnt;

2) WARGENTIN hat der sogenannten HALLEY'schen Methode keinen besonderen Namen gegeben; dagegen hat er unrichtig das Verfahren, wodurch man die ganze Bevölkerung eines Landes *nur* aus den Sterbelisten berechnet, als von HALLEY herrührend bezeichnet.

---

34) Siehe Anm. 14).

35) Dafs WARGENTIN seine Vorläufer auf dem Gebiete der Bevölkerungsstatistik nicht ganz übersehen hatte, geht aus seinen Abhandlungen hervor; siehe z. B. *Anmärkningar* etc.; a. a. O. **16**, 1755, S. 2—4, 85—87 (*Anmerkungen* etc.; a. a. O. **17**, 1755, S. 5—6, 84—86), wo er u. A. GRAUNT, PETTY, SÜSSMILCH, KERSSEBOOM, DEPARCIEUX und SIMPSON citiert.

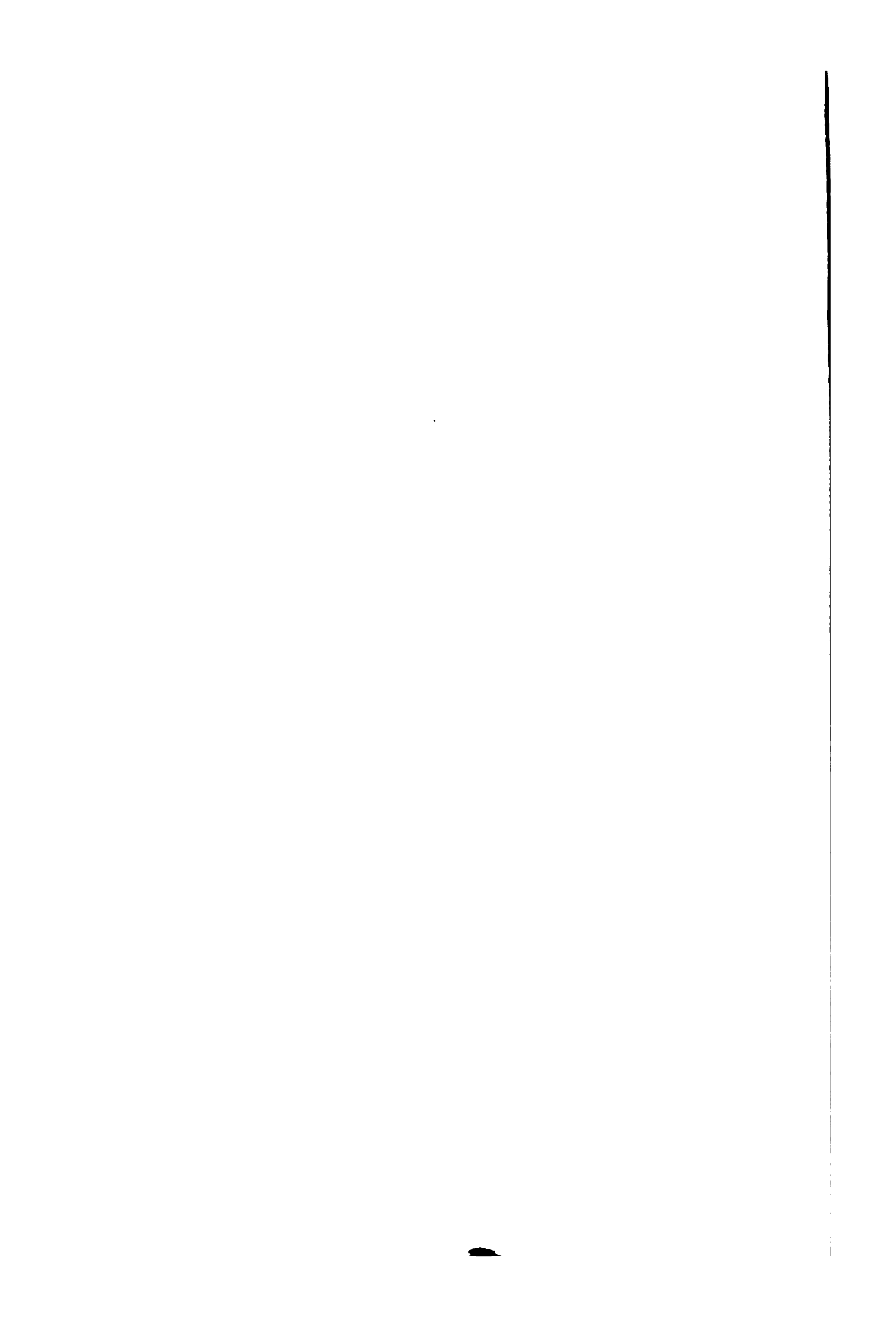


INTORNO AD UN INEDITO E SCONOSCIUTO TRATTATO DI MECCANICHE DI GALILEO GALILEI NELL' ARCHIVIO DI S. A. IL PRINCIPE DI THURN-TAXIS IN RATISBONA.

NOTIZIA DI

ANTONIO FAVARO,

PROFESSORE NELLA R. UNIVERSITÀ DI PADOVA, DIRETTORE DELLA EDIZIONE NAZIONALE DELLE OPERE DI GALILEO GALILEI SOTTO GLI AUSPICII DI S. M. IL RE D'ITALIA.



Narra Vincenzio Viviani, nel racconto istorico ch'egli dettò intorno alla vita del suo Maestro, che, fra le varie scritture da Galileo stese „a contemplazione dei suoi scolari, nel tempo in cui fu lettore di matematiche nello Studio di Padova" fu „un trattato di Meccaniche che va attorno manoscritto, e che poi nel 1634, tradotto in lingua francese, fu stampato in Parigi dal P. Marino Mersennio, e ultimamente nel 1649 fu pubblicato in Ravenna dal Cavalier Luca Danesi."[1]) In una bozza autografa di questo lavoro del Viviani, la quale è arricchita di parecchie giunte e correzioni, si rinvenne assegnata alla composizione di questa scrittura galileiana la data dell' anno 1593,[2]) e quantunque l'autore non suffraghi tale sua incidentale asserzione con alcun documento, nè dica in base a quali elementi egli l'abbia dedotta, ed ancora il trattato in questione, il quale è, per importanza, di gran lunga superiore a tutti gli altri che il sommo filosofo distese per uso dei suoi scolari, lasci ragionevolmente supporre un ingegno più maturo d'anni, pure non mancano argomenti per tenerla esatta, o per meglio dire non mancavano prima che il manoscritto inedito e sconosciuto, il quale porge argomento alla presente notizia, avesse contribuito a recare nuova luce anche a questo proposito.

Il trovare infatti che in qualche trattato di fortificazioni del tempo[3])

---

1) *Fasti Consolari dell' Accademia Fiorentina* di Salvino Salvini Consolo della medesima e Rettore generale dello Studio di Firenze, ecc. In Firenze, M.DCCXVII. Nella stamperia di S. A. R. per Gio. Gaetano Tartini e Santi Franchi, pag. 405.

2) Biblioteca Nazionale di Firenze. — Manoscritti Galileiani. Parte I. Tomo I, car. 35 *tergo*.

3) *Delle fortificationi* di Buonaiuto Lorini nobile fiorentino. Libro Quinto. *Dove con facilissime dimostrationi si dichiarano le Scienze delle Meccaniche e la pratica di fabbricare, con le più certe regole, diversi strumenti e macchine per alzare con poca forza grandissimi pesi.* — È questo il titolo speciale del libro, il quale occupa le pag. 195—248 dell' opera intitolata: *Le fortificationi* di Buonaiuto Lorini, nobile fiorentino. Nuovamente ristampate, corrette et ampliate di tutto quello che mancava per la lor compita perfettione con l'aggiunta del sesto libro, ecc. In Venetia, M.DC.IX, presso Francesco Rampazzetto. — Il Poggiali attribuisce la prima edizione di quest' opera all' anno 1596, ed il Riccardi al 1597.

sono comprese le meccaniche come parte integrante, si giudicò potesse invocarsi come documento in appoggio della surriferita asserzione; avendo noi altrevolte indotto che, appunto nell' anno scolastico 1592—93, GALILEO insegnò pubblicamente le fortificazioni,[4]) ed esistendo nella Biblioteca Ambrosiana di Milano un codice contenente un compendio di tale materia con la data del 25 maggio 1593.[5])

A questo proposito vogliamo ancora ricordare come fra i varii argomenti delle pubbliche letture di GALILEO, registrati nei Rotoli dell' Università Artista dello Studio di Padova, i quali pervennero fino a noi, troviamo indicate le „Questioni meccaniche di ARISTOTELE"[6]); ma non si sarebbe potuto affermare che del trattato al quale accenna il VIVIANI, e che dopo la prima pubblicazione del DANESI fu ristampato in tutte le edizioni delle opere di GALILEO, egli usasse nel pubblico insegnamento, mentre invece è certo che se ne servì per quello privato, e potressimo anche citare nomi di scolari che udirono da GALILEO private lezioni intorno a questi argomenti, e che da lui ebbero copia della scrittura.[7]) Anzi, con tutta probabilità appartengono a questa provenienza alcuni degli esemplari manoscritti che di tale scrittura ci furono conservati, e dei quali ci siamo serviti per la ristampa del trattato nella Edizione Nazionale.[8])

---

4) GALILEO GALILEI *e lo Studio di Padova* per ANTONIO FAVARO. Vol. I. Firenze, Successori LE MONNIER, 1883, pag. 173.

5) Mss. D. 328 Par. Inf. „Breve trattato del Sr. GALILEO GALILEI lettor di Mathem. nello Studio di Padova, dove per via di compendio insegna il modo di fortificar le città et d'espugnarle. Diviso in due parti: 25 maggio 1593." Cfr. *Le Opere* di GALILEO GALILEI. Edizione Nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Vol. II. Firenze, tip. di G. BARBÈRA, 1891, p. 9. — Il DRINKWATER (*The life of* GALILEO GALILEI, *with illustrations of the advancement of experimental philosophy.* MDCCCXXIX. London, printed by WILLIAM CLOWES, p. 78) lo dice, ma non sapremmo invero con qual fondamento, „published in 1592."

6) Archivio Universitario di Padova. — Rotuli Artistarum. Pars Prior. 1520—1739, car. 43 *tergo:* „Ad Mathematicam. — Exc. D. GALILEUS GALILEUS Florentinus. — Leg. EUCLIDIS Elementa et Mechanicas ARISTOTELIS Quaestiones, hora tertia pomeridiana."

7) Porgono in tale argomento grandissimo aiuto e preziosi elementi i ricordi autografi di GALILEO, nei quali trovansi registrati i proventi del suo privato insegnamento. Cfr. GALILEO GALILEI *e lo Studio di Padova* per ANTONIO FAVARO. Vol. II. Firenze, Successori LE MONNIER, 1883, pag. 194—195.

8) *Le Opere* di GALILEO GALILEI. Edizione Nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Vol. II. Firenze, tip. di G. BARBÈRA, 1891, p. 155—190. — Nell' *Avvertimento* premesso alla riproduzione della scrittura sono citati dieci manoscritti di essa, nessuno dei quali però reca data di sorte alcuna. Due di questi codici appartengono alla Biblioteca Nazionale di Parigi, ed il Signor C. HENRY nel porgerne notizia scrive (GALILÉE, TORRICELLI CAVALIERI, CASTELLI.

Che tale trattato del resto sia stato veramente composto da GALILEO e per uso dei suoi discepoli nel tempo della sua lettura di Padova, lo afferma egli stesso nei *Dialoghi delle Nuove Scienze*, scrivendo: „mi fa qui mestieri esplicare quello che in un antico trattato di meccaniche, scritto già in Padova dal nostro Accademico sol per uso de' suoi discepoli, fu diffusamente e concludentemente dimostrato in occasione di considerare la origine e natura del maraviglioso strumento della vite."[9]) Altra menzione, e che non vogliamo passare sotto silenzio, è quella contenuta nella risposta ad una lettera di G. B. BALIANI, che sotto il 19 agosto 1639 gli scriveva: „Rispetto alla forza della percossa, se avrò tempo, ne farò ricopiare il discorso che è registrato nel suo trattato delle meccaniche e lo manderò a V. S."[10]) A cui GALILEO: „La scrittura intorno alla percossa è assolutamente mia, fatta già più di quarant' anni sono."[11]) Ammesso adunque che l'appendice sia coetanea al trattato, o, com' è più verosimile, ad esso posteriore, GALILEO, con tale affermazione lo farebbe risalire a prima del 1599.

Ma, per quanto fondamento voglia pur riconoscersi nelle surriferite induzioni, astrazion fatta dall' approssimato riferimento testè addotto e dalle notizie desunte dagli appunti relativi al privato insegnamento e che, per ciò che concerne le meccaniche, non risalgono oltre il 1602, nulla di

---

Documents nouveaux tirés des Bibliothèques de Paris. [Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche della R. Accademia dei Lincei. Vol. V°. Seduta del 20 giugno 1880.] Roma, coi tipi del SALVIUCCI, 1880, pag. 6): „Ces manuscrits ont l'intérêt de présenter, à côté de variantes curieuses, deux dates qui fixent l'époque de la composition de l'ouvrage: au commencement, la date du 10 février 1623, à la fin, celle du 10 mars 1623." Ora queste date potranno bensì indicare il giorno in cui fu cominciata e quello in cui fu compiuta la copia di uno degli esemplari, poiche, quanto al secondo, esso reca di fronte al *Fine* la data „1627"; ma, dopo quanto veniamo esponendo a tale proposito, stimiamo superfluo l'insistere per dimostrare che non possono menomamente riferirsi al tempo in cui il trattato fu da GALILEO composto.

9) *Le Opere* di GALILEO GALILEI. Edizione Nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Vol. VIII. Firenze, tip. di G. BARBÈRA, 1898, pag. 216.

10) *Le Opere* di GALILEO GALILEI. Prima edizione completa, ecc. Tomo X. Firenze, 1853, p. 362. — Nei Manoscritti Galileiani della Biblioteca Nazionale di Firenze, e precisamente a car. 98 e seg. del Tomo V della Parte V, è contenuta questa copia fatta di pugno del BALIANI, sul *tergo* della quale si legge: „Della percossa, discorso mio primo ed antico" fatto scrivere da GALILEO ormai cieco.

11) *Notizie su la festa centenaria di* GALILEO GALILEI *celebrata a Pisa il 18 febbraio 1864 coll' aggiunta di alcune lettere inedite di* GALILEO *possedute dalla Biblioteca Nazionale di Milano e per la prima volta illustrate* da GIUSEPPE SACCHI. Milano, tip. di DOM. SALVI e C°. 1864, pag. 41.

preciso e di sicuro si sapeva finora intorno al tempo nel quale Galileo si occupò delle meccaniche e stese intorno ad esse una scrittura.

Ora, nell' aprile del corrente anno 1898, a mezzo dell' egregio e carissimo mio antico amico, il prof. Sigismondo Günther della Scuola politecnica di Monaco, il sigr. Dottore Cornelio Will, Consigliere ed Archivista di S. A. il Principe di Thurn-Taxis, mi fece sapere, essergli avvenuto di porre la mano sopra un fondo di manoscritti italiani, in uno dei quali si trovava una scrittura attribuita a Galileo, ed offrendomi di inviarmeli affinchè io potessi prenderli in esame. Accettata con animo gratissimo la generosa offerta, ho potuto esaminare con mio pienissimo agio i suaccennati manoscritti italiani, depositati provvisoriamente presso la Biblioteca Universitaria di Padova, e di tale esame riferirò qui sommariamente il risultato per ciò che concerne le cose galileiane in essi rinvenute.

Comincierò pertanto dal riferire che tra quelle carte, in un manoscritto miscellaneo, e precisamente a car. 220 *recto* — 235 *tergo*, rinvenni un nuovo esemplare del trattato Delle Meccaniche di Galileo, ma privo del nome di autore, recando esso soltanto il titolo della scrittura nei termini seguenti: „Delle utilità che si traggono dalla scienza mecchanica et suoi strumenti.“ È copia di mano tra la fine del secolo XVI ed il principio del XVII, piuttosto scorretta e con molte varianti tanto nel testo quanto nelle figure, però di nessuna importanza quanto al contesto. In tale manoscritto non è contenuta integra la scrittura galileiana, la quale finisce in tronco circa ad un terzo del capitolo relativo alla vite.[12])

Un altro manoscritto di questo medesimo fondo, il quale, come mi apprese una gentile comunicazione dello stesso gentilissimo signor Dottore Will, venne verosimilmente portato in Germania dal Principe Ermanno di Fürstenberg, già scolaro del P. Atanasio Kircher in Roma nel 1646, e pervenne poi nella sede attuale in seguito alle ulteriori relazioni di parentela della Casa principesca dei Fürstenberg con i Principi di Thurn-Taxis, mi serbava ben altra e maggiore sorpresa.

Il manoscritto misura mm. 276 $\times$ mm. 209, è composto di 14 carte scritte di mano della prima metà del secolo XVII ed è intitolato: „Delle Meccaniche lette in Padova dal s^{r}. Galileo Galilei l'anno 1594.“[13]) Esso

---

12) E precisamente con la parola „uguali“ a metà della lin. 19 della pag. 181 nel Vol. II della Edizione Nazionale.

13) Notiamo come questa data „1594“ venga a confermare mirabilmente l'asserzione surriferita del Viviani e da lui aggiunta in una nota al suo citato lavoro, essendo sommamente probabile che se Galileo lesse sulle Meccaniche l'anno 1594, cioè nell' anno scolastico 1593—94, avrà preparate le relative lezioni appunto nel 1593.

apparisce completo ed alla fine vi si legge, scritta della stessa mano, la seguente annotazione: „Riscontrate in Roma apresso Mons[r]. CIAMPOLI il di della Catedra di S. Pietro di Antiochia alli 22 febraro 1627."

Ora, poichè è ben noto che Monsignore GIOVANNI CIAMPOLI fu scolaro di GALILEO in Padova e gli fu poi sempre amico affezionato e devoto, tanto anzi da perdere per amor suo la eccelsa posizione che occupava alla Corte Pontificia, è credibile che, o prima o poi, egli abbia avuto da GALILEO stesso la scrittura sulla quale venne esemplata la copia presentemente nell' Archivio di S. A. il Principe THURN-TAXIS; e che ad ogni modo, se Monsignore CIAMPOLI lasciava che altri ne riscontrasse sul suo esemplare una copia, era ben certo dell' autenticità della scrittura da lui posseduta. D'altronde i caratteri esterni del manoscritto, e le stesse notizie che si hanno circa l'acquisto di esso da parte dell' attuale proprietario, non permettono alcun dubbio intorno alla autenticità della scrittura, la quale — e quì volevamo venirne — non è per nulla affatto un nuovo esemplare della scrittura galileiana, già nota ed alle stampe, sulle meccaniche, ma da essa formalmente diversa.

Il criterio generale che noi ci siamo formati dei rapporti, nei quali la nuova e finora sconosciuta scrittura sta rispetto all' altra già ben nota, consiste in ciò che essa rappresenti una prima stesura del trattato, la quale servì a GALILEO per il pubblico insegnamento, e fors' anco soltanto una serie ordinata di appunti personali che dovevano servirgli di guida per le pubbliche lezioni, e che egli poi ampliò e perfezionò, dandovi forma di vero ed organico trattato scientifico, del quale usò tanto per l'insegnamento privato, quanto per rilasciarne copia ai suoi privati uditori.

E questo ci sembra si rilevi anzitutto dalla introduzione, la quale, mentre nel trattato già noto ha forma ragionata di chiara e diffusa trattazione scientifica, in quest' altra scrittura si riduce alle poche linee generali seguenti:

„La scienza delle Meccaniche è quella facultà la quale ci insegna le ragioni e ci rende le cause de gli effetti miracolosi che vegghiamo farsi con diversi istrumenti, ora col muovere ed alzare pesi grandissimi con pochissima forza, e volendo noi di presente discorrere intorno a questa materia, per procedere ordinatamente cominceremo a speculare la natura de i primi e più semplici istrumenti, a i quali gli altri si reducano o d'essi si compongano, e son detti primi istrumenti di numero 5, cioè la lieva, l'argano, la taglia, la vite ed il conio, o la forza della percossa, i quali tutti si riducano ancora d'un certo modo d'un solo, cioè alla libra o vero bilancia: però fa dimestiero intendere e possedere benissimo la natura della libra, la quale c'ingengneremo dichiarare al presente."

E qui imprende a trattare dei varii argomenti enunciati, avendo in mira di dimostrare il principio generale che „la forza, il peso e la distanza, come anco il tempo, servono la medesima proporzione.“ La esposizione però non ha luogo nell' ordine medesimo nel quale i varii argomenti sono annunziati nella introduzione, ed una inesattezza nella numerazione dei capitoli lascia supporre che questo sia da imputarsi ad un disordine del manoscritto dal quale la copia venne esemplata; rispetto alla quale dobbiamo ancora aggiungere che, se il riscontro, il quale si afferma essere stato fatto, fu esatto, anche l'originale posseduto dal CIAMPOLI era piuttosto scorretto, trovandosi numerosi trascorsi di penna, i quali sono certamente da attribuirsi all' amanuense.

Del testo del trattato già noto noi troviamo in quest' altra scrittura un capitolo esattamente conforme, ed è quello che nel primo ha il titolo „Della coclea d'ARCHIMEDE per levar l'acqua“,[14]) mentre nel secondo è intitolato erroneamente „Della vite“; e diciamo erroneamente, non foss' altro perchè tale titolo ripete quello del capitolo precedente.

Sarebbe qui, a parer nostro, affatto fuori di luogo una minuta analisi della singole differenze tra le due scritture, analisi del resto la quale, quanto al divario caratteristico che fra esse corre, condurrebbe alla conchiusione superiormente esposta; soltanto porremo in evidenza che la scrittura testè scoperta presenta due capitoli in più, l'uno che tratta „Delli strumenti composti“ e l'altro „Della vite perpetua“ e che, finalmente, come è già risultato dalla introduzione, il capitolo ultimo relativo alla forza della percossa troverebbe con maggiore evidenza la sua ragione di essere, come concernente uno dei „più semplici istrumenti“, cioè il „conio“.

Più esatti e minuti particolari intorno alle differenze tra le due scritture relative agli stessi argomenti saranno posti in evidenza dalla pubblicazione che al più presto ci proponiamo di fare del trattato, l'esistenza del quale viene qui per la prima volta rivelata agli studiosi.

---

14) *Le Opere* di GALILEO GALILEI. Edizione Nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Vol. II. Firenze, tip. di G. BARBÈRA, 1891, pag 186—187.

ZUR GESCHICHTE
DER LÄNGENBESTIMMUNG ZUR SEE.

VON

EUGEN GELCICH,
KAISERL. KÖNIGL. REGIERUNGSRAT IN TRIEST.

I.

Die Geschichte des sogenannten Problems der Meereslänge ist zwar schon oft und verschiedenartig, doch noch immer nicht mit jener Gründlichkeit besprochen und untersucht worden, welche einer Aufgabe zukommt, die Seeleuten, Gelehrten und Künstlern Jahrhunderte lang so viel zu schaffen gab. Insbesondere schildern die einschlägigen Monographien (denn ein vollständiges, die Geschichte der Nautik behandelndes Werk fehlt bekanntlich noch immer) die Mühen nicht, welchen sich die Seeleute unterwarfen, um aus der Beobachtung von Monddistanzen möglichst genaue Längen zu erhalten. In dieser Beziehung müssen wir so manchen unserer Vorfahren geradezu Bewunderung zollen und wir können uns heute gar keinen Begriff mehr von dem Fleifse machen, der im vergangenen und zu Beginn noch unseres Jahrhundertes auf die Berechnung von Monddistanzen verwendet wurde. Um nur einige Beispiele hierüber anzuführen, sei zunächst der Admiral Krusenstern genannt, der von seinen Schiffsoffizieren nicht weniger als 1028 Monddistanzen beobachten und berechnen liefs, um die Lage eines Punktes bei Nangasaki möglichst genau zu erhalten. Jacob Cook leistete auf seinen Weltreisen ebenfalls grofsartiges. Für die Bestimmung der Länge von Ship-Cove im Charlotten Sund auf Neuseeland wurden unter seiner Leitung 103 Reihen, jede Reihe zu 6 Monddistanzen, beobachtet. Die Länge von Tongatabu (Freundschaftsinseln) wurde aus 1000 Monddistanzen, jene des Cap Finisterre aus 42 Reihen, die Länge des Peter- und Paulshafen aus 146 Reihen ermittelt u. s. w. Selbst die Pelzhändler, welche die N. W. Küsten Amerikas für Handelszwecke erforschten, begnügten sich selten mit Gruppen von weniger als 20 Monddistanzen.

Man sollte nun glauben, dafs derartig umfangreiche Beobachtungen die jeweiligen Beobachtungsfehler eliminierten und dafs die ermittelten Längen ziemlich genau ausfielen. Erübrigende Differenzen wären dann der Unvollständigkeit der damaligen Tafeln und der für die Berechnung derselben benützten astronomischen Grundgröfsen zuzuschreiben.

Verfasser dieser Zeilen hat nun eine Analyse der Cook'schen Beobachtungen versucht, allein man stöfst bei derselben auf Hindernisse, die

vorläufig gar nicht zu überwinden sind. Während nämlich manchmal die Cook'schen Längen mit den heutigen vorzüglich übereinstimmen, ergeben sich andere Male so beträchtliche Differenzen, daſs diese Wechselfälle in keiner Weise in Zusammenhang zu bringen sind. Man muſs vielmehr zu dem Schlusse kommen, daſs so mancher Punkt im Groſsen Ozean noch immer auf Grund älteren Beobachtungsmateriales eingetragen wird. Man könnte zwar zu den Breitenbestimmungen als Kontrolle greifen, aber auch hier wiederholt sich dieselbe Erscheinung, nämlich manchmal beträchtliche Abweichungen, manchmal vorzügliche Übereinstimmung. Betrachtet man einige der in Europa und auf den Atlantischen Inseln von Cook ausgeführten Bestimmungen, so hat man folgende Beispiele:

St. Agnes auf Scilly, Breite nach Cook 49° 53′ 30″, nach Domcke's Tafeln 49° 49′ —

Pick von Teneriffa nach Cook 28° 18′, nach Domcke 28° 16′ —

Nordspitze von Bonavista Cook 16° 17′, Domcke 16° 13′.

Im Durchschnitt und in runder Zahl sind die Cook'schen Breiten um 3′ zu groſs; wenn also diese Breiten aus Meridianhöhen und mit denselben Instrumenten ermittelt wurden, mit welchen man auch die Monddistanzen beobachtete, so wäre der mögliche Fehler der letzteren infolge des wahrscheinlichen Instrumentenfehlers circa 1½°. Ungefähr derselbe Fehler in der Breite ergiebt sich bei Karakahua (Cook 19° 29′, neuere englische Seekarten 19° 25′). Dagegen ergiebt die Cook'sche Breite von Tongatabu (21° 8′) einen Fehler von 20′, gegenüber der Angabe der neueren englischen Seekarten (21° 30′) und die Cook'sche Breite von Waimoa (21° 56′ 15″) ist um fast 18′ gröſser als jene, welche in den Tafeln von Domcke (21° 38′) enthalten ist. Andere Male ist die Übereinstimmung beider Coordinaten eine zu auffällige, wie z. B.:

Christiners Insel nach Cook Br. 1° 59′, Länge 202° 30′, nach den englischen Karten 1° 59′; 202° 30′

Karakahua nach Cook 19° 29′; 204° —, nach den englischen Karten 19° 25′; 204°.

Peter- und Paulshafen nach Cook 53°; 158° 43′ 16″, nach Domcke 53° 1′; 158° 40·3′.

Es ist somit höchst wahrscheinlich, daſs Christiners Insel und Karakahua noch immer nach den Angaben Cook's eingetragen werden.

Cook hatte auf seiner dritten Reise auch einen Chronometer von Kendall mit, dessen Stand und Gang in Greenwich bestimmt worden war. Der Stand am 11. Mai 1776 betrug + 3^m^ 31·890^s^, der tägliche Gang + 1·209″. Die Kontrolle des Ganges erfolgte einige Male während der Reise, leider sind in der Forster'schen Ausgabe der Cook'schen Reisen

die neubestimmten Gänge nicht angegeben, dafür wurden einigemale die Resultate der Länge so angeführt, wie sie sich mit dem ursprünglichen und mit dem im letzten Hafen ermittelten Gange ergaben.

Sei es nun, daſs man die Chronometerlängen mit den neueren Angaben, oder mit den von COOK aus Monddistanzen ermittelten, oder die mit dem ursprünglichen und mit dem zuletzt ermittelten Gang berechneten Längen untereinander vergleicht, eine Schluſsfassung wird abermals durch die sehr abweichenden Differenzen ungemein erschwert. Im Atlantischen Ozean ergab nämlich das Chronometer zumeist eine westliche Versetzung zuerst von 5 bis 6′, die später bis zu 22′ heransteigt.

Im weiteren Verlauf der Reisebeschreibung finden wir folgende Angaben:

Länge von Ship Cove:

Mit dem ursprünglichen Gang	175° 26′ 30″
Mit dem am Cap bestimmten Gang	174° 56′ 12″
Differenz	30′ 18″

Waimoa:

Mit dem ursprünglichen Gang	202° —
Mit dem Gang aus Ulietea	200° 21′
Differenz	1° 39′

Karakahua:

Mit dem ursprünglichen Gang	204° 7′ 15″
Nach den Beobachtungen auf Unalaschka	203° 37′ 22″
Differenz	— 29′ 53″

Können aber die während der Reise erfolgten Kontrollen des Ganges Anhaltspunkte für die Diskussion liefern? Wohl auch nicht, da zu COOK's Zeiten die Längen von Ulietea und Unalaschka gewiſs nur sehr beiläufig bekannt waren, und somit eine genaue Bestimmung des Uhrstandes gegen Greenwich gar nicht zulieſsen.

Dies alles läſst erkennen, mit welchen Schwierigkeiten die Seeleute in der vorchronometrischen Zeit und noch in den ersten Dezennien nach der Erfindung des Chronometers bezüglich einer richtigen Navigationsführung zu kämpfen hatten. Die Breite blieb immer noch das einzige Argument, worauf man sich einigermaſsen verlassen konnte.

Man bestimmte allerdings die Länge so gut als möglich, handelte es sich aber um das Anlaufen des Landes, so bestimmte man mit groſser Sorgfalt die Ankunftsbreite, und segelte dann im Bestimmungsparallel Ost-West, bis sich das Land zeigte.

II.

Der Mangel eines ausführlichen Werkes über die Geschichte der nautischen Wissenschaft hat gar oft die Folge gehabt, dafs Methoden und sogar Instrumente, welche unsere Vorfahren schon erfanden und erdachten, unter anderen Namen in unseren Tagen als „Neuigkeiten“ wieder in Vorschlag kamen. In dieser Beziehung war das Wiedererscheinen der Methode und der Tafel von ELFORD für die Reduktion der Monddistanzen als sogenannte *„Neger-Tafel“* im Jahre 1881 deshalb sonderbar und interessant, weil doch WEYER kurze Zeit vorher in einer Abhandlung über die kürzeste Berechnungsart der Monddistanzen, die Methode von ELFORD eingehend besprochen hatte,[1] und weil die vermeintliche „neue Methode“ von fast allen nautischen Zeitschriften des Kontinentes[2] wiedergegeben wurde. Sonderbar war es doch auch, dafs das „Hydrographic Office“ in London „by order of the Lords Commissionars of the Admiralty“ eine „New Method of Clearing the Lunar Distance“ von G. B. AIRY im Jahre 1881 veröffentlichte, die schon LEGENDRE 1806 erdacht hatte.[3] Wenn nun so grofse Körperschaften, als z. B. die Herausgeber von nautischen Zeitschriften oder des Hydrographic Office der englischen Admiralität in bezug auf Geschichte der Nautik so sehr irren, so darf man sich nicht wundern, wenn Ähnliches einzelnen Autoren passiert. So findet man z. B. in FREEDEN's Lehrbuch der Navigation (1864) als Methode von DUNTHORN folgende angeführt:

$$1)\quad \sin\text{vers}\, D = \sin\text{vers}\,(H - h) + m\,[\sin\text{vers}\, D_1 - \sin\text{vers}\,(H_1 - h_1)]$$

$$2)\quad m = \frac{\cos H \cos h}{\cos H_1 \cos h_1}.$$

Nun bildet aber die voranstehende Gleichung eine Methode für sich und ist in der Geschichte der Nautik als Methode von MACKAY (1793)[4] bekannt. Wohl entsteht letztere aus der DUNTHORN'schen Gleichung:[5]

$$3)\quad \cos D = \cos\,(H - h) - m\,[\cos\,(H_1 - h_1) - \cos D_1]$$

---

1) Annalen der Hydr. und marit. Meteorologie. 1881, S. 177.

2) SEMIGLI, Metodo e tavole del negrerio Krauts, in *Rivista marittima* 1881 I S. 539 ff. — PETRO SEMOLO, Dimostrazione di un nuovo metodo per la determinazione delle distanze lunari. A. a. O. II 503 ff. — DUBOIS, Tables du négrier in Revue marit. et colon. Bd. 69. S. 249 ff. — B. . . Die Neger-Tafeln in Mitth. aus dem Geb. des Seewesens. Bd. IX S. 621. — Endlich war ein Aufsatz über diesen Gegenstand auch in der *Hansa* enthalten.

3) Annalen der Hydr. und marit. Meteor. 1882 S. 344 ff.

4) ANDREW MACKAY, The Theorie and practise of finding the longitude. London 1793.

5) Naut. Alman. 1767.

einfach dadurch, dafs man 3) von 1 = 1 abzieht, aber es besteht in der praktischen Anwendung der beiden Gleichungen insofern ein wesentlicher Unterschied, als MACKAY die Umformung eigens zu dem Zwecke vornahm, um den Zeichenwechsel bei $\cos D$ für $D > 90^0$ zu vermeiden.

Ein ganz neues, soeben erschienenes nautisches Werk, bringt die DUNTHORN'sche Gleichung sogar als nicht logarithmische Methode von BREMIKER. Es wird nämlich unter dem Titel „Methode von BREMIKER" die Gleichung von DUNTHORN abgeleitet, und sodann gesetzt:

$$\begin{aligned} H - h &= u \\ H_1 - h_1 &= u_1 \\ m \cos u_1 &= \cos u' \\ m \cos D_1 &= \cos D', \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\cos D = \cos u + \cos D' - \cos u'.$$

Das bezügliche Rechnungsbeispiel sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{rlrl} \log\cos H & = & & \\ \log\sec H_1 & = & & \\ \log\cos h & = & & \\ \log\sec h_1 & = & & \\ \hline \log m & = - - - - & \log m & = \\ \log\cos u_1 & = & \log\cos D_1 & = \\ \hline \log\cos u' & = & \log\cos D' & = \\ \text{nat.}\cos u' & = & & \\ \text{nat.}\cos D' & = & & \\ \text{nat.}\cos u & = & & \\ \hline \text{nat.}\cos D & = & & \\ D & = & & \end{array}$$

Das ist augenscheinlich die Methode von DUNTHORN, die im Übrigen auch in allen, oder wenigstens in mehreren Auflagen von ALBRECHT und VIEROW's Navigation so steht.

DIE GEOMETRIE VON LE CLERC UND OZONAM,

EIN INTERESSANTES MATHEMATISCHES PLAGIAT AUS DEM ENDE DES XVII. JAHRHUNDERTS.

VON

J. H. GRAF

IN BERN.

1699 erschien in Bern:

„Neue Uebung der Feldmeſs-Kunst. So wol auff dem Papier | als auff dem Feld. In einer neuen Ordnung und besonderen Manier auffgesetzt. Von Hrn. OZONAM, Professore Matheseos. Oder *Nouvelle pratique de la Geometrie, sur le papier et sur le terrain. Avec un nouvel ordre, et une méthode particuliere. Par Msr.* OZONAM, *Professeur des Mathématiques. A Berne, Dans l'imprimerie de Leurs Excellences. Par* ANDRÉ HUGUENET. 1699." —

R. WOLF[1]) spricht von dem Werklein als einer ausserordentlichen Seltenheit; das Exemplar, welches ihm zu Gesichte kam, gehörte Herrn Stadtgerichtspräsidenten ESCHER in Zürich und war 1713 im Besitz des hauptsächlich für Bern wichtigen Ingenieurs und Kartographen JOHANN ADAM RIEDIGER[2]) (1680—1756), der von 1710—1717 in Zürich gelebt hat. Das Werklein ist aber doch so selten nicht; denn ein Exemplar findet sich in der Stadtbibliothek Bern und in meinem eigenen Besitz sind zwei tadellose Exemplare, die ich nach und nach antiquarisch erworben habe. Diese Berner Ausgabe ist mir sehr aufgefallen und muſs auffallen. Sie zählt 187 S. klein 8^0 Text deutsch und französisch, sowie 9 S. Register deutsch und französisch und handelt zuerst: Von der Feldmeſs-Kunst insgemein. — Von ihrem Ursprung. — Von ihrer Nutzbarkeit. — Anfang der Geometrie. — Von dem Düpflein. — Von der Linie. — Von dem Winckel. — Von dem Ueberzug.[3]) — Von den aus geraden Linien bestehenden Figuren. — Von den vierseitigen Figuren. — Von den krummen Figuren. — Von den vermischten Figuren. — Von den regulierten und irregulierten Figuren. — Von den ungezweiffelten Sprüchen.[4]) — Von den Anforderungen, welche zu den Verrichtungen dienen.

Dann folgt: S. 46—74. Das Erste Buch. Von der Beschreibung der Linien. — S. 76—108. Das Ander Buch. Von der Beschreibung der

---

1) Zürcher Vierteljahrschrift XXX. Notizen zur Kulturgesch. Nr. 371.

2) GRAF, Gesch. der Math. u. Naturw. in Bern. Landen III, 1. Heft. S. 63—84.

3) d. h. der Fläche.

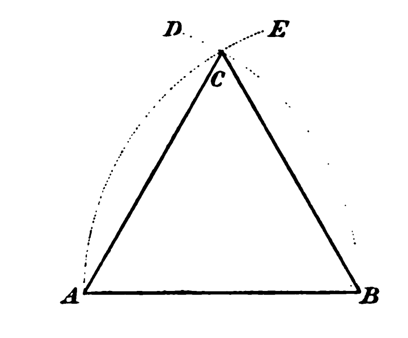
4) d. h. Axiomata.

flachen Figuren. — S. 110—140. Das Dritt Buch. Von der Einschreibung der Figuren. — S. 142—162. Das Vierdt Buch. Von der Umschreibung der Figuren. — S. 164—186. Das Fünfft Buch. Von den Proportionierten Figuren.

Was das Werk aber vor Allem interessant macht, sind die 87 in den Text gedruckten Kupfertafeln von 90 mm Höhe auf 60 mm Breite. Im allgemeinen zeigt jede Tafel in der oberen Partie die zum Text notwendige planimetrische Figur, der untere Teil hingegen wird gewöhnlich durch die Ansicht einer Landschaft, einer Häusergruppe oder einer kriegerischen Scene oder irgend ein Genrebildchen ausgefüllt; davon einige Beispiele:

Zur Konstruktion einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden findet sich unten eine Duellscene mit 4 Personen und Hintergrund.

Zur Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks sehen wir eine hollän-

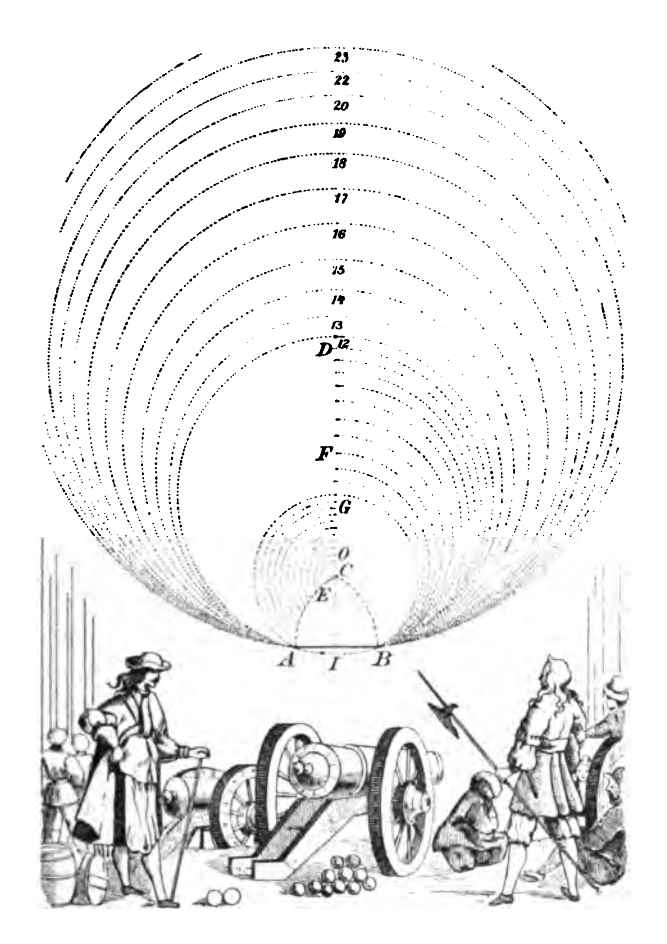




dische Kanallandschaft mit einer Festung am Ufer.

Zur Konstruktion: Auff eine gegebene Linie ein reguliertes Viel-Eck,

wie man es verlanget | zu beschreiben, von 12 bifs auff 24. Seiten findet sich unten eine artilleristische Scene, die, wie ich später zeigen werde, zur Entdeckung des Verfassers Veranlassung war, u. s. w. Alle diese



Vignetten sind aufserordentlich fein gestochen und verleihen dem Werklein einen eigenartigen Reiz. Diese prachtvollen Kupferstiche erregten aber auch in uns schon frühe ein gewisses Mifstrauen gegen den Verfasser und den Drucker. 1889 äufserten wir uns folgendermafsen:[5]) „Es ist sehr auffällig, dafs, trotzdem das Büchlein in Bern bei André Huguenet gedruckt sein will, sich nirgends eine Spur von demselben erwähnt findet, während sonst damals in Bern der Druck jedes anderen Buches wohl an-

5) Graf, Gesch. der Math. u. Naturw. III, 1. Heft. S. 6. 7.

gegeben und von der Censur erlaubt war. Wenn man das Büchlein durchblättert und den feinen Druck bemerkt, so drängt sich immer der Gedanke auf, dafs die Angabe: *„A Berne, Dans l'imprimerie de Leurs Excellences"* eine fictive ist."

Ich sprach damals die Vermutung aus, dafs wir ein Büchlein vor uns haben, das im Interesse des bernischen Offizierskorps, von welchen ja viele Mitglieder ihre militärische Carrière schon dazumal in Holland absolvierten, abgefafst worden sei; wenn es aber in Bern verfafst worden wäre, so könnte nach meiner damaligen Ansicht nur der intelligente Provisor JACOB KUENTZI, der damals mit Erfolg in Bern in Mathematik unterrichtete, der Autor sein. Die Sache liefs mir lange Zeit keine Ruhe und ein Zufall sollte mir auf die Spur verhelfen. Anläfslich meines Besuches der Weltausstellung in Paris 1889 bemerkte mein Schwager, Herr TREUTHARDT, mit dem ich sehr oft über das OZONAM'sche Werk sprach, bei einem Antiquar rue Vaugirard am Schaufenster ein aufgeschlagenes Büchlein, wo die gleiche Figur zu sehen war wie jene erwähnte, mit der artilleristischen Gruppe zur Konstruktion des 12. bis 24. Seits. Ich erwarb das Buch und bei genauerer Durchsicht stellte es sich heraus, dafs ich das Original zu dem Berner Büchlein vor mir hatte. Schon der Verfasser ist falsch angegeben. Es giebt keinen „OZONAM professor Matheseos", sondern, wie allbekannt, existierte ein eifriger mathematischer Schriftsteller JACQUES OZANAM (1680—1717), ein reicher Privatmann aus ursprünglich jüdischer Familie, der Lehrer der Mathematik in Lyon, dann in Paris und auch Mitglied der Akademie der Wissenschaften war. Unter seinen zahlreichen Werken, die in POGGENDORF II angegeben sind, findet sich allerdings *La géométrie pratique* etc. 1684, 12°, ferner gab er 1691 BOULANGER's *Géométric pratique* 12° heraus. Das vorliegende Buch hat aber mit diesen Werken dieses damals beliebten mathematischen Schriftstellers gar nichts gemein. Die in Bern herausgekommene „Neue Uebung der Feldmesskunst etc. oder *Nouvelle pratique de la géometrie*" hat als Vorlage das von mir 1889 in Paris gefundene Werk mit dem Titel: *Pratique de la Géometrie sur le papier et sur le terrain. Ou par une méthode nouvelle et singulière l'on peut avec facilité et en peu de temps se perfectionner en cette science. A Paris, Sur le Quay des Augustins, joignant la porte de l'Eglise, à l'Image Nostre-Dame. MDCLXXXII. Avec privilège du Roy."* Der Verfasser ist S. LE CLERC, wie er sich im Vorwort unterschreibt. SEBASTIEN LE CLERC wurde am 26. IX. 1637 in Metz geboren. Sein Vater, der 105 Jahre alt wurde, ein Goldschmied, geschickter Zeichner und Stecher, scheint sein einziger Lehrer gewesen zu sein. Schon 12jährig soll SEBASTIEN LE CLERC Aufserordentliches im Zeichnen geleistet haben, schon 7jährig habe er gelernt, mit den Gravier-

instrumenten umzugehen. Gegen 1654, also 17jährig, machte er 11 Stücke: „*Tableaux de l'institution des Mathurins*", bis 1661 folgten weitere 106 Stücke aus der Passion JESU-CHRISTI, dann die Tafeln zu dem 1664 in Nancy erschienenen sehr seltenen Band „*Le triomphe* DE CHARLES IV". LE CLERC war auch sehr erfahren in der Befestigungskunst und wurde *Ingénieur-géographe* beim Marschall DE LA FERTÉ. In dieser Eigenschaft machte er die Pläne der meisten festen Plätze von Messin und dem Gebiet von Verdun. Als er erfuhr, dafs der Plan von Marsal unter einem andern Autor als seinem Namen erschienen sei, verliefs er sein Amt und kam 1665 nach Paris, um eine Stelle im Genie-Korps zu erhalten. Durch die Bekanntschaft mit dem Maler CH. LE BRUN wurde er aber hiervon abspenstig gemacht und der Gravierkunst erhalten. Er publizierte in Paris zuerst das oben genannte Werk: *La Pratique de la géométrie*. Paris 1669 in 12⁰., das er mit 82, später mit 99 hübschen Figuren versah, und womit er einen grofsen Erfolg hatte. COLBERT liefs ihm 1669 eine Wohnung in der École des Gobelins anweisen und verschaffte ihm eine Pension von 600 Thalern. Hier gab er mit LE BRUN die *Tapisseries du Roi* 1670 heraus; 1672 wurde LE CLERC einstimmig Mitglied der *Academie Royale de Peinture*, 1690 *Graveur du Roi* und Professor der Perspektive, welche Funktion er bis 1699 behielt. 1706 wurde er *chevalier romain*. Er starb den 25. Oktober 1714 in Paris und noch in seinem Todesjahr erschien sein *Traité d'architecture*, 2 Bde. in 4⁰ mit 184 Platten, ein Werk, welches PETER DER GROSSE ins Russische übersetzen liefs.

Er war ein überaus fleifsiger Stecher, bei 3000 Stücke und zwar meist seiner eigenen Erfindung sind ihm zu verdanken. Er liebte seine Kunst und zeigte in allen seinen Arbeiten eine bewunderungswürdige Genauigkeit der Zeichnung und Feinheit der Ausführung. Er liebte es gerade so kleine Bildchen zu machen, wie sein Büchlein sie zeigt. MARIETTE feiert ihn in seinem Eloge als den berühmtesten Stecher seiner Zeit, der es verstanden habe, seine Kenntnisse weit über das gewöhnliche Mafs hinaus auszudehnen.[6])

Das für uns wichtigste Druckwerk ist seine „*Pratique de la Géometrie, sur le papier et sur le terrain*", von welcher wir so glücklich waren die zweite Ausgabe aus dem Jahre 1682 zu erhalten. Eine dritte hat LE CLERC 1700 selbst noch besorgt. Das Werklein ist dem Marquis DE SEIGNELAY gewidmet und nach dem Auszug aus dem *Privilège du Roy* datiert vom 7. Oktober 1668 ist es dem THOMAS JOLLY, *Marchand-Libraire à Paris*

---

6) Man vgl. *Le catalogue raisonné avec un abrégé de sa vie par* JOUBERT, Paris 1774. 2 Vol. in 8⁰.

erlaubt, ein Buch betitelt *„Pratique de la géometrie sur le papier et sur le terrain composée par le Sieur* Le Clerc“ zu drucken. Der Druck wurde zum ersten Mal beendigt den 17. November 1668. Ganz wie im beschriebenen Berner Exemplar bespricht Le Clerc S. 1—44 den Ursprung, den Nutzen und die Prinzipien der Geometrie, giebt einige Definitionen und Axiomata. Das erste Buch S. 45—76 handelt von der Konstruktion der Linien, es werden 14 Aufgaben gelöst, leider fehlen, offenbar blofs durch ein Versehen, der leere Platz ist da, die Kupfertafeln zur ersten Aufgabe. Das zweite Buch, S. 77—108, handelt von der Konstruktion der ebenen Figuren, 15 Aufgaben, es fehlt wieder die Kupfertafel zur zweiten Aufgabe; die Aufgabe 16, welche in der Berner Ausgabe vorhanden ist, nämlich *sur une ligne droite proposée construire deux rectangles selon une raison donnée* nebst Tafel ist die 12. Aufgabe im V. Buch bei Le Clerc. Das III. Buch S. 109—141 behandelt die einem Kreis und Vielecken einbeschriebenen Vielecke in 15 Aufgaben. Bei Aufgabe 7 ist in meinem Exemplar leider ein Blatt herausgerissen. Das IV. Buch S. 142—162 bringt in 10 Aufgaben die Lehre von den umschriebenen Figuren und das V. Buch S. 163—185 endlich von den proportionierten Linien in 12 Aufgaben, wo, wie schon bemerkt, die XII. Aufgabe beim Berner Exemplar als 16. des III. Buches figuriert. Diese künstlerische Vermischung von geometrischer Figur und malerischem Bild ist eine Darstellungsweise, wie wir sie sonst niemals getroffen haben und die jedermann auffallen mufs. Man kann sich dieselbe nur dadurch erklären, dafs in Le Clerc der Maler und der Mathematiker sich vereint vorfanden. So stellt sich denn das Büchlein Le Clerc's als ein aufserordentlich originelles, wertvolles und offenbar lange Zeit in Gebrauch befindliches dar, als ein Werk, das von den Zeitgenossen überaus gewürdigt worden ist und uns heutzutage noch als ein Bijou und ein Unikum vorkommen mufs. Es ist nun sofort klar, dafs ein Werk, das sich als so überaus brauchbar erwiesen hatte, übersetzt und nachgedruckt wurde und zwar natürlich von den Niederländern, die ja bekanntlich damals in der schonungslosesten Weise litterarische Freibeuterei betrieben und jedes irgendwie brauchbare Opus nachdruckten. Der holländische Nachdruck, in dessen Besitz ich auch durch Zufall gelangt bin, hat zum Titel: *Nova Geometria Practica super charta et solo. Libellus in quo nova traditur Methodus, cujus ope facilis sit ac brevis, ad summa hujusce Scientiae fastigia, cursus. Amstelodami Apud* Georgium Gallet MDCXCII. Die Titelvignette, die Mathesis- und den Autor darstellend, ist im französischen Original nicht vorhanden, also neu. Mein Exemplar gehörte dem Abbé Collein. Der Inhalt stimmt nun vollständig mit dem Original, nur ist die Widmung an Domino Marchioni de Seignelay, wie auch der ganze

übrige Text lateinisch. Bei der Widmung fehlt begreiflicherweise die Unterschrift des Autors.

Die Kupfertafeln sind in der gleichen Zahl wie im Original vorhanden, ziemlich getreu nachgezeichnet und sicher neu gestochen worden, was an sehr vielen kleinen, aber auffallenden Details nachgewiesen werden kann. Auf S. 155 und 157 ist dem holländischen Drucker GALLET eine Verwechslung der Platten passiert. Das königlich französische Privilegium ist selbstverständlich nicht mehr abgedruckt, sonst stimmt alles mit dem französischen Original.

Leider haben aber nicht nur die Niederländer das Werklein LE CLERC's nachgedruckt, sondern auch die Berner; denn das Eingangs dieser Arbeit erwähnte Werk qualifiziert sich als nichts anderes, als ein bernerischer Nachdruck, ja sogar als ein Plagiat. Dies zu thun, lag in der Sache selbst kein zwingender Grund vor. Das Werklein LE CLERC's war stets auf dem Markte zu erhalten, existiert doch noch eine Ausgabe aus dem Jahre 1744, welche ich auch zufällig erwerben konnte. Das Exemplar war 1777 im Besitz eines MICHAEL MATHIEU, 1813 eines CHRISTIAN FRIEDRICH L'ADMIRANCE, Heilbronn 8. Sept. Der Titel stimmt vollständig mit dem Originaltitel von 1669, nur ist beigefügt: „*Par* SEBASTIEN LE CLERC, *Graveur du Roi*". *A Paris chez* CH. A. JOMBERT, *Imprimeur-Libraire du Roi en son Artillerie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame. MDCCXLIV. Avec privilège du Roi.*" Die Titelvignette, die Mathesis und der Autor, denn unter seinem Bild steht deutlich graviert LE CLERC, ist auch vorhanden, wie auch die Widmung an den Marquis DE SEIGNELAY mit absolut den gleichen Emblemen und Initialen. Auch ist die letztere wieder unterzeichnet vom Autor; der Text ist der gleiche, wie in der II. Ausgabe, die Platten stimmen meistens auch, nur sind sie numeriert und mit einem Hinweis auf die Textseite versehen. Gewöhnlich sind zwei Platten auf die Vorder- und die Rückseite eines Blattes gedruckt. Immerhin mögen einige Kupferplatten neu erstellt worden sein, so zur Propos. II des I. Buches, zu Propos. I des II. Buches, zu Propos. IX und X des III. Buches, zu Propos. I, III und IX des IV. Buches, es müssen also von den 83 Platten sechs verloren gegangen sein.

Die Berner Ausgabe stellt sich demnach dar als ein doppelsprachiges Plagiat der *Nouvelle Pratique de la Géometrie* von LE CLERC. Nicht nur unter einem fingierten Verfasser herausgegeben, sind auch die Kupferplatten vom LE CLERC'schen Buch einfach handwerksmäfsig nachgestochen worden, denn was in den LE CLERC'schen Vignetten rechts ist, ist links im Berner Exemplar, so dafs also sicher der Graveur mit dem Spiegel gearbeitet hat. Wer der Graveur war, ist mir noch unerfindlich, ebenso kann man bezüglich des deutschen Übersetzers nur eine Vermutung aussprechen. Von den 83 Kupfer-

platten zeigt einzig die Tafel auf S. 185 eine Abweichung in der geometrische Figur gegen die Ausgaben von 1682 und 1692. Dazu kommt noch d schon angedeutete Versetzung der 12. Aufgabe des V. Buches, sonst find überall materielle Übereinstimmung statt.

Was nun den Buchdrucker und Herausgeber ANDREAS HUGUENET a betrifft, so verhält sich die Sache folgendermafsen. Von 1679 an hatt GABRIEL THORMANN von Bern die obrigkeitliche Buchdruckerei erhalten un da er nicht selbst Buchdrucker war, so hatte er Associés und sehr wah scheinlich gehörte zu denselben auch ANDRÉ HUGUENET, der dann die tec nische Leitung der Druckerei besorgte. Es heifst auf Mandaten und Schu büchern aus den Jahren 1684. 85. 86. 90. 92. 93. 97. 1700: getruckt : Bern, in hoch-obrigkeitlicher Truckerey durch „ANDREAS HUGUENET" u nach 1706: „*A Berne, Dans l'Imprimerie de L. L. Excellences. Par* AND HUGUENET." Die obrigkeitliche Druckerey neben dem Rathaus hatte das *P vilegium exclusivum* zum Druck von Schulbüchern. Damals schon als GEO SONNLEITNER, der Vorgänger THORMANN's, dieselbe noch inne hatte, gab schon Bücher mathematischen Inhalts heraus, wie z. B. 1661 Arithmetica: E new künstlich Rechen-Buch mit der Ziffer: etc. Durch weiland H. HEINR STRÜBI der newen Teutschen Schul zu Zürych Ordinarium Schul- u Rechen-Meister, und 1698 erst wurde auf Begehren des ANTON VULPI,] habers der zweiten, der oberen Druckerei in Bern, SCHIFFELI, einem Asso THORMANN's, vom Rat eröffnet, dafs genanntes Privilegium auf 10 Jah eingeschränkt sei und ihm angeraten, er solle lieber auf die Schulbüch als Firmaangabe seinen Namen als den der obrigkeitlichen Druckerei setze Die letztere Mahnung bezieht sich offenbar darauf, dafs die Bezeichnu „In hoch-obrigkeitlicher Druckerey" vor ANDRÉ HUGUENET niemals gebrauc worden ist. Alle seine Vorgänger wie SONNLEITNER, STUBER, LE PRE hatten etwa blofs zu setzen gewagt: Getruckt zu Bern, by GEORG SON LEITNER, besteltem Buchdrucker. So noch 1676. Durch die Beisetzun „*A Berne, Dans l'Imprimerie de Leurs Excellences, Par* ANDRÉ HUGUENE erhält das unter dem Verfasser „OZONAM" erschienene Plagiat von LE CLER Geometrie noch ein besonderes Relief. Es ist aufserordentlich verdächt dafs dieses gewifs wertvolle Werk in keinen bernischen Regierungsakt erwähnt wird, während doch jede noch so unbedeutende Druckschrift d Censur unterlag. Es kann höchstens als Entschuldigung gelten, dafs m vielleicht diesem litterarischen Frevel gegenüber deshalb ein Auge zudrück weil mit dem Druck dieses Büchleins der Ausbildung des bernischen Offizie korps grofse Dienste geleistet werden konnten.

NIKOLAUS VON CUSA

IN SEINEN BEZIEHUNGEN ZUR MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN GEOGRAPHIE

VON

SIEGMUND GÜNTHER

IN MÜNCHEN.

Von dem Manne, den diese Skizze unter einem ganz bestimmten Gesichtspunkte betrachten will, darf man wohl auch, wie von manchem anderen sagen, daſs sein Charakterbild in der Geschichte schwanke. Als kirchlicher Politiker und Theologe hat er sehr verschiedene Beurteilungen erleiden müssen, und auch seine Stellung in der Geschichte der exakten Wissenschaften hat erst in neuester Zeit die Klärung erfahren, deren sie in hohem Maſse bedurfte. Je mehr man sich mit dieser eigenartigen Gelehrtenfigur der beginnenden Frührenaissance beschäftigt, umsomehr wird man geneigt sein, dem Lobe beizupflichten, welches M. CANTOR dem denkenden Mathematiker CUSA zollt[1]), und gerade dann, wenn man insbesondere diejenigen Disziplinen ins Auge faſst, die in der Überschrift vorliegender Studie genannt werden, lernt man die Richtigkeit dessen, was CANTOR sagt, mehr und mehr begreifen. Eine zusammenhängende Schilderung dieser Seite von CUSAS Wirksamkeit hat bislang gefehlt, obwohl es nicht an Äuſserungen und Andeutungen fehlt, die in solchem Sinne verwertet werden können, und wir hoffen deshalb, daſs unser Versuch, das Bild des Mannes entsprechend auszugestalten, als ein berechtigter anerkannt werden wird. Ein kurzer Blick auf die wechselvollen Schicksale des CUSANERS, verbunden mit gedrängter Hervorhebung dessen, was ihm in der Geschichte der Wissenschaften bisher schon einen geachteten Platz gesichert hat, dürfte als Einleitung zu der Behandlung seiner Verdienste auf engerem Wissensgebiete nicht zu umgehen sein.

Geboren im Jahre 1401 zu Cues an der Mosel, hat NIKOLAUS KREBS[2])

---

1) CANTOR, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 2. Band, Leipzig 1892, S. 194. Es heiſst hier, daſs nur CUSA allein unter den Mathematikern vor REGIOMONTAN „als genialer Kopf mit dem Stempel des Erfinders ausgezeichnet“ war. — Noch nicht scheint beachtet worden zu sein, daſs es auch, in wenig späterer Zeit, einen Mathematiker JOHANNES CUSANUS gab, der im Jahre 1514 bei den bekannten Wiener Buchdrucker VIETOR und SINGRENIUS einen „Algorithmus projectilium de integris“ erscheinen lieſs. Es wäre wohl der Mühe wert, zu erforschen, ob zwischen den beiden Personen, welche den Namen CUSANUS tragen, sich irgendwelcher Zusammenhang nachweisen läſst.

2) Der fünfzehnjährige Knabe wurde als „NICOLAUS CANCER DE COESZE *clericus Trever. dyoc.*“ in das Matrikelbuch der Neckaruniversität eingetragen (TÖPKE,

(Chrypffs) seine Erziehung hauptsächlich in der damals berühmten Schul zu Deventer erhalten, welche von den „Brüdern des gemeinsamen Lebens" begründet worden war[3]). In Padua holte er sich die später ihn auszeichnende mathematische Bildung; sei es nun, dafs der damalige Lehrer des Faches an der berühmten Hochschule, Prosdocimo de' Beldomandi, einen namhaften Einflufs auf ihn übte[4]), sei es, dafs die innigen Beziehungen in welche der junge Mann mit dem älteren Paolo Toscanelli (Paulus Florentinus, Paulus Physicus) trat, die Stelle regelrechten Unterrichtes ersetzten[5]). Nach kurz währendem juridischem Intermezzo trat Cusa, wie ihn von da ab die Zeitgenossen zu nennen pflegten, in die Dienste der Kirche; in ihnen stieg er bald von Stufe zu Stufe, und nachdem er die freieren Anschauungen, welche von ihm auf dem Konzile von Basel vertreten worden waren, aufgegeben hatte, sah er sich bald als päpstlicher Delegat und Bischof von Brixen auf der Höhe äufserer Erfolge, wobei es freilich auch an Kämpfen aller Art nicht fehlte[6]). Dieselben hörten auch dann nicht vollständig auf, als Nikolaus, zum Kardinale erhoben, seinen Wohnsitz in Rom nahm, doch ist immerhin gerade diese Zeit des späten Mannesalters eine besonders förderliche geworden[7]). Cusa starb im Jahr 1464, nahezu gleichzeitig mit dem ihm befreundeten Papste Pius II., de

Die Matrikel der Universität Heidelberg von 1386 bis 1662, 1. Band, Heidelbe 1884—86, S. 128).

3) Düx, Der deutsche Kardinal Nikolaus von Cusa und die Kirche sein Zeit, 1. Band, Regensburg 1847, S. 97 ff.; Scharpff, Der Kardinal und Bisch Nikolaus von Cusa als Reformator in Kirche, Reich und Philosophie des XV. Jal hunderts, Tübingen 1871, S. 102 ff.

4) Cantor, a. a. O., S. 187 ff. Eingehend erteilt über die Lebensumstän und litterarischen Leistungen von Cusa's mutmafslichem Lehrer Auskunft Fava (*Intorno alla vita ed alle opere di* Prosdocimo de' Beldomandi, *matematico pad vano del secolo XV, Bull. di bibl. e di storia delle scienze mat. e fis.,* 12. Bar S. 1 ff.; *Appendice,* ebenda, 18. Band, S. 405 ff.

5) Charakteristiken des in der Geschichte der Erdkunde eine so bedeutsa Rolle spielenden Mannes gaben Ximenes (*Del vecchio e nuovo gnomone fiorenti* Florenz 1757) und Uzielli (Paolo dal Pozzo Toscanelli, *inspiratore della scope d'America,* Florenz 1892).

6) Wohl als einer der ersten hat der alte Reimmann (Versuch einer Einl tung in die Historiam Literariam derer Teutschen, 2. Teil, Halle 1725, S. 262 dem Kirchenfürsten Charakterlosigkeit vorgeworfen. Milder urteilt C. F. Broc haus (Gregor von Heimburg; ein Beitrag zur deutschen Geschichte des XV. Jal hunderts, Leipzig 1861, S. 151 ff.); er meint, Cusa habe deshalb die unleugba Schwenkung vollzogen, weil er unter dem Schutze der bisher bestrittenen Pap suprematie eher seine wissenschaftlichen Studien fortsetzen zu können hoffen durf

7) Die Periode verhältnismäfsiger Ruhe beginnt erst mit dem Jahre 14 (Übinger, Kardinallegat Nikolaus Cusanus in Deutschland 1451—52, München 188

als Enea Silvio de' Piccolomini in seiner Lebenslaufbahn viele verwandte Züge aufzuweisen hatte[8]), sowohl was die Liebe zur Wissenschaft, als auch was die wechselvollen Geschicke und Gesinnungswechsel betrifft.

Als Mathematiker haben den Kardinal Schanz[9]) und Cantor (s. o.) uns nahe gebracht, und Schanz hat auch den astronomischen Studien des umfassend gebildeten Gelehrten eine dankenswerte Monographie[10]) gewidmet. Positive Leistungen, auf denen eine folgende Generation weiterbauen konnte, sind von ihm allerdings nicht zu verzeichnen; seine Bestrebungen, eine Philosophie der Mathematik zu schaffen, entbehrten der Einheitlichkeit und Systematik; seine Kreisquadraturen mufsten sich die bekannte Widerlegung durch Regiomontan gefallen lassen; die erste Wahrnehmung von Rollkurven hat man ihm mit Unrecht zugeschrieben[11]). Und trotzdem bleibt Cantors oben angeführter Ausspruch wahr, denn niemals blieb Cusa bei der üblichen Kommentierung und Kontrovertierung hergebrachter Lehren stehen, sondern es arbeitete mächtig in ihm, über das Durchschnittswissen seines Zeitalters hinauszugehen, und selbst dann, wenn seine mächtige Phantasie ihn in ein Wirrsal dunkler Ideen hineinführt, wird dasselbe oft überraschend durch plötzliche Geistesblitze erhellt. Eine leichte Aufgabe ist es freilich nicht, sich in seine Werke mit ihrer schwerfälligen Terminologie und mit den eigentümlichen Gedankenkonstruktionen der Spätscholastik hineinzulesen, aber belohnend ist es für den, der die selbständige Arbeit auch im fremdartigen, äufserlich wenig ansprechenden Gewande zu schätzen versteht. Nach dieser Seite hin will auch der vorliegende Beitrag zur besseren Erkenntnis einer der merkwürdigsten Erscheinungen der deutschen Gelehrtengeschichte zu wirken suchen. Cusa hat auf den Gebieten der mathematischen und physischen Erdkunde viele originelle Meinungen geäufsert, viele Anregungen gegeben, die nur leider langsam oder gar nicht wirksam wurden, weil es dem Urheber an Mufse und Gelegenheit

8) Hierüber gibt genauere Nachweisungen Voigt (Enea Silvio de' Piccolomini, als Papst Pius der Zweite, und sein Zeitalter, 2. Band, Berlin 1868, S. 302 ff.).

9) Schanz, Der Kardinal Nikolaus von Cusa als Mathematiker, Rottweil 1872.

10) Schanz, Die astronomischen Anschauungen des Nikolaus von Cusa und seiner Zeit, Rottweil 1873.

11) Die irrige Behauptung von Wallis (*Philosophical Transactions*, 1697, S. 561 ff.), dafs die Zykloide bereits von Cusa als solche bemerkt und betrachtet worden sei, hat sich sehr zählebig erwiesen, so dafs sogar noch Quetelet (*Histoire des mathématiques et physiques chez les Belges*, Brüssel 1871, S. 58 ff.) sich dadurch täuschen liefs. Thatsächlich hat jedoch Cusa zwar dem Rollen eines Kreises auf gradliniger Unterlage, nicht jedoch dem von einem Punkte des Umfanges beschriebenen Wege seine Aufmerksamkeit zugewendet (Günther, War die Zykloide bereits im XV. Jahrhundert bekannt? Bibl. Math., I, S. 8 ff.).

gebrach, zuzusehen, ob auch die von ihm gepflanzten Früchte zur Reife gediehen. Gewiſs ist man auch bisher nicht achtlos an diesem Teile von CUSAS schriftstellerischer Thätigkeit vorübergegangen, aber eine zusammenhängende, kritische Würdigung wurde noch vermiſst und soll nunmehr an diesem Orte gegeben werden. —

Vor allem tritt uns da die oft aufgeworfene, aber noch niemals erschöpfend erledigte Frage entgegen, ob der CUSANER den Vorläufern des COPPERNICUS zugerechnet werden dürfe. Im engeren Sinne kann davon gewiſs keine Rede sein, denn der Reformator der Sternkunde war ganz und gar unbeeinfluſst von den Anschauungen seines deutschen Landsmannes, den er schwerlich gekannt hat[12]). Man muſs jedenfalls, wenn man einen Zusammenhang ausfindig machen will, von jeder unmittelbaren Beziehung völlig absehen. Wenn man aber das Wort Vorläufer in der Weise deuten will, daſs CUSAS Auftreten der coppernicanischen Reform vorgearbeitet, daſs dasselbe den Boden bereitet habe, auf welchem sich der stolze Bau einer neuen Kosmologie erheben sollte, so wird an der Bezeichnung kaum etwas auszusetzen sein. An positiver Sachkenntnis vermag der Moselländer dem Preuſsen allerdings nicht die Stange zu halten; man mag immerhin die ehrende Erklärung des FABER STAPULENSIS billigen, daſs kein Zeitgenosse so tief wie CUSA in Mathematik und Astronomie eingedrungen sei[13]); man mag auch der eingehenden und verständigen Kritik der alfonsinischen Tafeln[14]) sich erinnern — zu jener konsequenten Durchdringung eines Grundgedankens, wie wir sie bei dem stillen Denker COPPERNICUS finden, wäre CUSA unter keinen Umständen befähigt gewesen. Aber in einem anderen, nicht minder wichtigen Punkte kam der Kardinal dem Frauenburger Domherrn gleich, wenn er ihn darin nicht sogar noch überragte. Das war die absolute Rücksichtslosigkeit gegen eine geheiligte Überlieferung, die *animi*

---

12) COPPERNICUS nennt in der Einleitung zu den „Revolutiones“ als seine Vorbilder PHILOLAUS, HERACLIDES PONTICUS, ECPHANTUS und HICETAS, nicht aber CUSA (vgl. PROWE, NIKOLAUS COPPERNICUS, 1. Band, II, S. 499).

13) Geschichte der Astronomie von den ältesten bis auf gegenwärtige Zeiten, 1. Band, Chemnitz 1792, S. 140. Auch CUSAS grimmiger Gegner, der allen Winkelzügen abholde, redliche GREGOR VON HEIMBURG, miſsdeutet die Studien des ersteren, den er „*mathematice sortilege*“ anredet, so sehr, daſs er dem Prälaten geheimen Verkehr mit Dämonen zur Last legte (DÜX, 1. Band, S. 213).

14) *Reparatio Calendarii Reverendiss. in Christo Patris Cardinalis* NICOLAI DE CUSA, Sämtliche Werke, S. 1155 ff. Wir halten uns an die gewöhnlich zitierte Gesamtausgabe, welche 1565 bei HENRICPETRI in Basel herauskam und künftig stets durch C. O. O. bezeichnet werden soll. CUSA war Berichterstatter des vom Konzil in Basel für die damals schon als dringend erkannte Kalenderverbesserung niedergesetzten Ausschusses (PROWE, a. a. O., S. 66).

libertas, wie sich Kepler nachmals so wahr und treffend ausgedrückt hat. Nikolaus von Cusa hat die erkenntnistheoretischen Grundlagen für eine heliozentrische Weltanschauung gelegt, obwohl er von dieser persönlich weit entfernt und keineswegs geneigt war, der Sonne die Bedeutung eines Zentralgestirnes beizulegen. Um hierüber ins klare zu kommen, werden wir nicht umhin können, uns zuvor mit dem Philosophen Cusa zu beschäftigen, der dem Astronomen noch überlegen ist, jedenfalls aber zuerst zu hören ist, ehe wir auch den anderen zum Worte gelangen lassen.

Die Thatsache, daſs bei Cusa auch schon jene Auffassung der sinnlich wahrnehmbaren Welt im Umrisse uns entgegentritt, welche drei Jahrhunderte später durch Kants kritizistische Analyse zum Gemeingute der Philosophie und Naturwissenschaft gemacht ward, ist von Falckenberg besonders bestimmt hervorgehoben worden. „Nichts wird so erkannt, wie es ist, und wie es etwa einem vollkommenen Intellekt erkennbar wäre“[15]). Ebenso wie der Kardinal, der dem geltenden hierarchischen Rechte so manches Zugeständnis zu machen genötigt war, alle Rechtsverhältnisse nur von dem Naturrechte ableitet[16]), welches mit dem Menschen geboren und von Hause aus dem menschlichen Verstande eingeprägt ist, so suchte er auch im übrigen den Quellen unserer Erkenntnis nachzuspüren, und dabei verblieb er so wenig auf den peripatetischen Wegen, auf welchen ihn — zusammen mit Valla, Vives und Agricola — Schleiermacher[17]) wandeln läſst, daſs man ihn vielmehr eher, wie dies Eucken[18]) thut, als einen Anhänger der Neuplatoniker gelten lassen muſs. In zwei Richtungen bricht er dem Fortschritte des menschlichen Denkens die Bahn; er unterscheidet zwischen dem wirklichen Wesen der Dinge und dem Bilde, welches sich der Mensch kraft seines unvollkommenen Anschauungsvermögens von den Dingen macht[19]), und er bricht mit der von der christlichen Philosophie ängstlich festgehaltenen

---

15) Falckenberg, Aufgabe und Wesen der Erkenntnis bei Nikolaus von Cues, Breslau 1880, S. 39.

16) Zimmermann, Die kirchlichen Verfassungskämpfe im XV. Jahrhundert, Breslau 1882, S. 92.

17) Schleiermacher-H. Ritter, Geschichte der Philosophie, Berlin 1839, S. 245.

18) Eucken, Untersuchungen zur Geschichte der älteren deutschen Philosophie, Phil. Monatshefte, 14. Band, S. 449 ff.; Beiträge zur Geschichte der neueren Philosophie, vornämlich der deutschen, Heidelberg 1886, S. 6 ff.

19) Man vergleiche hiezu auch noch eine weitere Bemerkung von Falckenberg (Grundzüge der Philosophie des Nikolaus Cusanus mit besonderer Berücksichtigung der Lehre vom Erkennen, Breslau 1880, S. 117): „Die Ansicht des Cusaners über die Erkenntnisfähigkeit stellt sich dar als Phaenomenalismus, wenn es erlaubt ist, diesen Ausdruck in der Bedeutung zu gebrauchen, daſs eine Erkenntnis der bloſsen Erscheinung zugestanden, eine präzise des Wissens bestritten wird.“

Doktrin von der Endlichkeit der Welt, welche im ptolemaeischen Systeme mit seinen Krystallsphären die festeste Stütze gefunden hatte. Ganz zutreffend erkennt DESCARTES in dieser Beseitigung der den freien Flug des Geistes ebenso wie eine höhere Auffassung vom Wesen Gottes hindernden Schranken ein Verdienst des CUSANERS[20]). Die Welt ist für diesen einerlei mit dem „privativ Unendlichen"; die „Weltseelen" der neuplatonischen Schule ziehen sich zusammen in eine einzige, wahre Weltseele, Gott selbst. Und weil Gott, der allgegenwärtige, überall ist, so befindet sich der Mittelpunkt der Welt überall, eine Peripherie an keinem Orte. Damit ist das berühmte Buch „von der gelehrten Unwissenheit", zweifellos das geistvollste, welches aus CUSAS Feder hervorging, seinem Wesen nach bestimmt. Die Thatsache, dafs die Erde sich bewegt, ist für den Autor durchaus nicht die in erster Linie wichtige; sie ergibt sich von selbst, da es etwas unbewegtes im Weltall nicht geben kann. Der Umstand, dafs CUSA, so wenig auch seine Begriffsbestimmung unseren heutigen Ansprüchen genügen kann, zuerst den Unterschied zwischen absoluter und relativer Bewegung erkannt hat, wird von L. LANGE[21]) ins richtige Licht gesetzt; wir erachten es nicht für unmöglich, dafs die cartesische Zerfällung der Bewegung in einen *„motus ut vulgo sumitur"* und in einen *„motus ex rei veritate consideratus"*[22]) die cusanische Begriffsscheidung zum Ausgangspunkte nimmt, um so mehr, da auch in beiden Fällen ein analoges Beispiel zur Erläuterung herangezogen wird[23]).

---

20) In dem von COUSIN herausgegebenen Briefwechsel des CARTESIUS liest man (Ep. I, 36) folgendes: *„Primum memini Cardinalem* CUSANUM *doctoresque alios plurimos supposuisse mundum infinitum . . ."*

21) L. LANGE, Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffes und ihr voraussichtliches Endergebnis; ein Beitrag zur historischen Kritik der mechanischen Prinzipien, Leipzig 1886, S. 14 ff. Gewifs hat, wie hier dargethan wird, die Verwechslung des Absoluten und des Unendlichen CUSA's Einsicht nicht aus einer gewissen Trübung herauskommen lassen, allein bei alledem war doch durch seine Sprengung der bisher jeder tieferen Auffassung des kosmologischen Problemes wiederstrebenden Fesseln viel erreicht.

22) L. LANGE, S. 34 ff.

23) Die charakteristische Stelle im *„Liber de docta ignorantia"* lautet (C. O. O., S. 39): *„Iam nobis manifestum est, terram istam in veritate moveri, licet nobis hoc non appareat, cum non apprachendimus motum nisi per quandam comparationem ad fixum."* Zum Belege wird verwiesen auf ein Schiff, welches auf uferlosem Gewässer — so dafs also dem Auge keine ruhenden Vergleichsobjekte sich darbieten — sanft dahingleitet. Wer sich auf dem Verdecke des Schiffes befindet, empfindet nichts von einer Fortbewegung. SCHARPFF (Der Kardinal und Bischof NIKOLAUS VON CUSA als Reformator in Kirche, Reich und Philosophie des fünfzehnten Jahrhunderts, Tübingen 1871, S. 118 ff.) hat das hauptsächlich in betracht

Jetzt sind wir in die Lage versetzt, uns über CUSA's Stellung in der Vorgeschichte der coppernicanischen Reform ein sicheres Urteil zu bilden. Daran ist nicht zu denken[24]), dafs bei ihm, wie SCHARPFF meint, eine Vorwegnahme der drei Bewegungen, welche nach COPPERNICUS dem Erdkörper eingepflanzt sind, zu suchen wäre; am wenigsten am bezeichneten Orte, wo nur von Bewegung schlechtweg gesprochen wird. Hier kommt es vielmehr dem Autor einzig darauf an, den Glauben zu zerstören, als sei unserer Erde von der Vorsehung irgend eine Bevorzugung vor anderen Weltkörpern zugeteilt worden. Die *„sphaera octava"*, welche nach der herrschenden Theorie etwas sehr reelles sein sollte und durch den — übrigens mit CUSA befreundeten[25]) — PEURBACH wiederum bewufst zu einer materiellen Krystallsphäre gemacht worden war[26]) — existierte für ersteren nicht; er bedient sich zwar des nun einmal vorhandenen Namens[27]), ähnlich, wie wir ja auch in übertragenem Sinne von einer Himmelskugel reden, aber mit der Wesenheit derselben hatte er einfürallemal aufgeräumt. Da es ferner gewifs ist, was SCHARPFF berichtet[28]), dafs CUSA kurz vor seinem Lebensende, 1463, mit der Niederschrift eines Traktates *„De figura mundi"* begonnen hatte, so müssen wir entweder annehmen, dafs bei ihm — auch

---

kommende elfte Kapitel vom zweiten Buche der genannten Schrift ins Deutsche übertragen, darin aber fehlgegriffen, dafs er die allgemeinen Spekulationen CUSA's auf das coppernicanische System übertrug, mit welchem sie nichts zu thun haben.

24) Die drei coppernicanischen Bewegungen sind bekanntlich die Achsendrehung der Erde, der Umlauf der Erde um die Sonne und eine thatsächlich nicht vorhandene Achsenschwankung, welche den Parallelismus der Erdachse aufrecht erhalten sollte, aber schon bald von ROTHMANN, und bestimmter von GALILEI, als unzulässig erkannt wurde (R. WOLF, Geschichte der Astronomie, München 1877, S. 228).

25) Hierüber teilt näheres mit SCHARPFF (a. a. O., S. 307 ff.).

26) Man darf mit PEURBACH's Wiederauffrischung der alten eudoxisch-aristotelischen Hypothese von den homozentrischen Sphären nicht so hart ins Gericht gehen, wie dies z. B. R. WOLF (Geschichte der Astronomie, München 1877, S. 212) thut; überhaupt läfst dieses vortreffliche Werk die sonst an ihm zu rühmende Objektivität einigermafsen vermissen in den von der vorcoppernicanischen Periode handelnden Abschnitten. PEURBACH und REGIOMONTAN mufsten die alten Weltsysteme erst bis auf den höchstmöglichen Grad der Verfeinerung bringen, ehe sich endgiltig ergab, dafs die Betretung dieser Wege zu keinem Erfolge führen konnte.

27) Wir zitieren nach SCHARPFF (S. 121): „Die Erde ist also nicht das Zentrum, auch nicht für die erste oder irgend eine andere Sphäre; auch das Erscheinen der sechs Himmelszeichen" — des halben Tierkreises — „über dem Horizonte berechtigt nicht zu dem Schlusse, die Erde sei im Zentrum der achten Sphäre."

28) SCHARPFF, S. 231. Die Andeutung ist in der Schrift *„De venatione sapientiae"* enthalten.

auf diesem Gebiete — ein Wechsel der Überzeugung eintrat, oder dafs er eben noch einmal nachdrücklich beweisen wollte, die Welt habe keine Figur. Wie sollte sie auch, da ihre Unendlichkeit und Unbegrenztheit, zwei Begriffe, die damals noch nicht als verschiedene sich darstellen konnten, ausdrücklich festgestellt waren? Und CUSA's Definition des Kosmos entsprang nicht etwa nur einem gelegentlichen Einfalle, sondern er war, als er sie gab, mit der Geschichte der astronomischen Lehrmeinungen wohl vertraut und wufste insbesondere[29]), dafs sich früher schon Stimmen gegen die Herrschaft des PTOLEMAEUS hatten vernehmen lassen. Wir werden weiter unten auf diese unbekannte Schrift und auf die Möglichkeit zurückkommen, dafs sich von ihrem Inhalte doch einiges erhalten hat.

Verbleiben wir mithin fürs erste bei der *„docta ignorantia"*, deren Faust-Charakter — „habe gelernt, dafs wir nichts wissen können" — Zeitgenossen und Spätere begreiflich genug oft mifsverstanden haben[30]), und nehmen wir noch Abstand von dem Fragmente, welches einer präziseren Festsetzung der Natur der Erdbewegung dienen sollte, so können wir sagen, dafs in der That CUSA einen Platz unter den Vorläufern COPPERNICS verdient. Nicht übel kennzeichnet POGGENDORFF[31]) die Art dieser Vorgängerschaft: er verhalte sich zu COPPERNICUS, wie etwa HUS zu LUTHER. Nur ist der böhmische Nationalheld, bei dem sich religiöser Ernst und politische Agitationslust ganz eigenartig in einander mengen, in keiner

29) In der Abhandlung über die spanischen Tafeln bespricht CUSA die radikale Auflehnung des Arabers ALPETRAGIUS gegen PTOLEMAEUS (vgl. GÜNTHER, Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie, Halle 1879, S. 78 ff.).

30) Aufserordentlich philiströs ist z. B., was MÄDLER (Geschichte der Astronomie von der ältesten bis auf die neueste Zeit, 1. Band, Braunschweig 1873, S. 116 ff.) über CUSA zu sagen weifs. Aber auch WOLF's Urteil (s. o.) entspricht dem wahren Sachverhalte wenig; CUSA ist ein „Mystiker", und damit ist alles abgethan. Hätte es nur recht viele derartige Mystiker gegeben! Wir möchten zum Beweise für die freie Denkart dieses tiefsinnigen Mannes auch auf eine wenig beachtete Stelle der Schrift *„De genesi"* (C. O. O., S. 130) aufmerksam machen, wo gewisse theologische Einwürfe gegen eine freiere Interpretation des Hexaëmerons auf ihren wahren Wert geprüft werden. ZÖCKLER, der diese Arbeit wohl kennt und den CUSANER in eingehender Darlegung gegen den Vorwurf des Pantheismus verteidigt, wie er zum öfteren und am schärfsten von LEWICKI (*De* CARDINALIS CUSANI *pantheismo dissertatio,* Münster 1875) erhoben wurde, der überhaupt die Bedeutung CUSA's voll anerkennt (Geschichte der Beziehungen zwischen Theologie und Naturwissenschaft, 1. Abteilung, Gütersloh 1877, S. 357 ff., 451 ff.), ist auf den interessanten Dialog über die Genesis leider nicht eingegangen.

31) POGGENDORFF, Geschichte der Physik, Leipzig 1879, S. 114 ff. Vgl. auch PESCHEL-RUGE, Geschichte der Erdkunde bis auf A. v. HUMBOLDT und C. RITTER, München 1877, S. 383.

Weise, die persönliche Tapferkeit etwa abgerechnet, mit dem Reformator zu vergleichen, während CUSA, soweit es blos auf die Höhe und Unabhängigkeit der kosmischen Anschauungen ankommt, sich unbedenklich an COPPERNICUS Seite stellen darf. Denn der springende Punkt ist doch immer der, ob die Erde als etwas selbständiges, von allen übrigen Weltkörpern verschiedenes oder ob sie als ein Stern, wie die anderen, anzusehen ist. Sie ist letzteres, freilich ein „edler" Stern[32]), der aber seinem Wesen nach nicht auf eine besondere Substanz zurückzuführen ist. Damit ist die aristotelische Elementenlehre über den Haufen geworfen; damit ist ein Ferment von größter Tragweite in die Naturwissenschaft hineingetragen und dem Dogma von der Suprematie der Erde der Boden entzogen. Wenn in den folgenden zwei Jahrhunderten gegen das coppernicanische System nicht nur polemisiert, sondern mit allen erlaubten und unerlaubten Mitteln der Kampf eröffnet wurde, so trug an der steigenden Erbitterung weit weniger die astronomische Theorie die Schuld, um welche sich die Mehrzahl der Gegner wenig kümmerte, sondern der unselige Glaube, daß die Entthronung der Erde einen Bruch mit den Grundlehren des Christentums bedeute[33]). Und wer so dachte, der mochte CUSA's großartige Kon-

---

32) SCHARPFF, S. 124. „Die Erde ist ein edler Stern, der Licht, Wärme und Einwirkung von allen anderen Sternen in verschiedener Weise empfängt."

33) Kaum irgendwo finden wir diese in ihren Konsequenzen so nachteilige Meinung gleich deutlich ausgesprochen, wie bei MELANCHTHON (*Initia doctrinae physicae, dictata in Academia Vitebergensi*, Leipzig 1559, fol. 34, II). Nachdem den philosophischen Argumenten gegen die vermessene und leichtfertige Vorstellung einer Mehrheit der Welten ihr Recht geworden ist, fährt der berühmte Lehrer fort: „*Sed nobis in Ecclesia, et facilius et necessarium est assecurare, unicum esse mundum, quia coelestis doctrina hunc mundum, in quo se Deus patefecit, in quo suam doctrinam hominibus tradidit, et in quo Filium humano generi misit, conditum esse a Deo adfirmat.*" Solche Erwägungen bewirkten, daß die protestantische Kirche im Anfange der heliozentrischen Weltanschauung sogar noch entschiedener, als die katholische, sich widersetzte. Die Endlichkeit der Welt galt als feststehend; ein so gründlich mathematisch gebildeter Mann, wie JOHANN v. GMUNDEN, der erste selbständige Vertreter dieser Wissenschaft an der Universität Wien, hatte in einem handschriftlichen Dokumente, dessen kulturgeschichtliche Bedeutung sehr hoch zu veranschlagen ist, der hergebrachten Weltordnung eine äußerst bestimmte, auch ihrer naiven Ausdrucksweise halber bemerkenswerte Formulierung erteilt (vgl. GÜNTHER, Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie, S. 267 ff.). Das Manuskript ist in niederdeutscher Sprache abgefaßt, wahrscheinlich eine Abschrift nach einer Vorlesung JOHANN's, der als Autor direkt genannt wird. Jenseits der Sphäre des „primum mobile" kommt der „furige hymel", worin sich Gott in seiner Dreieinigkeit und die Jungfrau Maria aufhalten. Auch die einzelnen Klassen der selig gewordenen Menschen haben je eine besondere Sphäre angewiesen erhalten. Wie hoch müssen

zeptionen, in welchen man mit Fug den Keim von LEIBNIZ' Monadologie und prästabilierter Weltharmonie aufgedeckt hat[34]), vielleicht für bedenklicher halten, als das wesentlich mathematische und darum nur Wenigen zugängliche Buch der COPPERNICUS.

Die mathematische Geographie wird von den Philosophemen CUSA's auch insofern näher berührt, als aus denselben eine Rückwirkung auf das folgen mufste, was man mit einem wenig bezeichnenden Namen Pluralitätshypothese genannt hat. In der Litteratur über die Frage, ob es menschenähnliche Geschöpfe auch auf anderen Weltkörpern geben könne, ist dieser ältere Vertreter der bejahenden Ansicht viel zu wenig berücksichtigt worden[35]). CUSA nahm generell die Möglichkeit einer Bewohnbarkeit aller Himmelskörper an[36]), hielt aber dafür, dafs die Beschaffenheit dieser Bewohner keineswegs die gleiche, sondern durch die Eigenart des betreffenden Sternes bedingt sei. Den Sonnenwesen möge wohl ein höherer Rang eignen gegenüber den irdischen Menschen, welche mehr *„materiales et grossi"* seien. Doch ist auch die Erde nicht etwa eine tote Masse, sondern ein lebendiger Organismus; das Felsgerüste entspricht den Knochen, die Flüsse gleichen den Adern, die Bäume den Haaren des menschlichen Leibes. So weit jedoch ging CUSA nicht, dafs er dem Erdkörper wirklich animalische Funktionen zugeschrieben hätte, wie dies nachher KEPLER, GOETHE und der Naturphilosoph HUGI gethan haben[37]). Es unterliegt

---

wir einen Kirchenfürsten bewerten, der es unternahm, in ein so krafs-anthropomorphistisches, ja geradezu materialistisches Christentum Bresche zu legen und einem reineren Gottesbegriffe die Bahn zu ebnen! Wir finden nicht, dafs die theologischen Biographen CUSA's gerade dieses Moment gebührend hervorgehoben haben; warum sie es nicht thaten, wollen wir hier dahingestellt sein lassen.

34) Den Zusammenhang erkennt man am besten durch das Studium einer Abhandlung R. ZIMMERMANN's (Der Kardinal NIKOLAUS CUSANUS als Vorläufer LEIBNIZENS, Sitzungsber. d. Akademie zu Wien, Phil.-hist. Kl., 1852, S. 306 ff.).

35) Besonders empfehlenswert ist PESCHEL's Essay „Über die Pluralität der Welten" (Abhandlungen zur Erd- und Völkerkunde, herausgeg. von LOEWENBERG, 2. Band, Leipzig 1878, S. 187 ff.). Dem modernen Standpunkte unseres Wissens pafst sich noch besser an J. SCHEINER (Die Bewohnbarkeit der Welten, Himmel und Erde, 3. Band, S. 18 ff.).

36) SCHARPFF, a. a. O.; DÜX, 2. Band, S. 328 ff.; CLEMENS, GIORDANO BRUNO und NIKOLAUS VON CUSA, Bonn 1847, S. 20 ff.

37) Zu vergleichen sind mit Rücksicht auf die sonderbare, späterhin wesentlich auf den Gezeiten des Meeres fufsende und zuerst bei den Stoikern nachweisbare Lehre vom „Erdtiere" die folgenden Schriften: H. BERGER, Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen, 4. Abteilung, Leipzig 1893, S. 75; HEDERICH, GOETHE und die physikalische Geographie, Münchener Geographische Studien, 5. Heft; PIXIS, KEPLER als Geograph, ebenda, 6. Heft; HUGI, Grundzüge einer allgemeinen Naturansicht: Die Erde als Organismus, Solothurn 1841.

keinem Zweifel, dafs GIORDANO BRUNO, als er die Unzählligkeit der Welten verkündete, von CUSA, dem auch sonst hoch verehrten, in erster Linie beeinflufst war[38]), und auch weiterhin machen sich Spuren bemerklich, dafs gerade dieser Teil cusanischer Lehren eine besonders bereitwillige Aufnahme gefunden hat.

Wer einmal soweit gegangen war, dem mufste es nahe liegen, zwischen der Erde und anderen Gestirnen direkte Vergleiche zu ziehen, und zwar nicht blos solche, welche einer gewissen mathematischen Kontrolle fähig waren. In diese letztere Klasse gehören die ganz richtigen, am bezeichneten Orte gemachten Angaben, dafs die Erde den Mond und Merkur an Gröfse übertreffe. CUSA geht noch weiter und tritt mit einer kühnen Konjektur über die Beschaffenheit des Sonnenkörpers hervor, welche von jeher viel Aufsehen erregt und insbesondere damals, als die Sonnenphysik noch nicht den gegenwärtigen Grad der Ausbildung erreicht hatte, geradezu Bewunderung entzündet hatte, weil sie sich wie eine Divination der Wahrheit darstellte. Man sollte jedoch nicht vergessen, dafs der Kardinal hier absichtlich seiner Phantasie freien Lauf liefs und seinen Äufserungen kaum eine eigentlich wissenschaftliche Bedeutung beigemessen wissen wollte; sonst stünde nicht am Rande der einschlägigen Partie des cusanischen Werkes das zumeist ganz übersehene Wort „*hypni*“ (ὕπνος, Traum)[39]). Indem wir wieder auf SCHARPFF's Verdeutschung[40]) Bezug nehmen, geben wir die solare Hypothese CUSA's wieder, wie folgt: „Betrachtet man den Sonnenkörper, so hat er zu seinem Kerne eine Art Erde, zum Umkreise eine wie Feuer leuchtende Masse, dazwischen eine Art wässeriger Wolken und eine reinere Luft, also zusammen die vier Elemente der Erde[41]). Stünde daher jemand aufserhalb der Region des Feuers, so würde ihm diese Erde durch das Medium des Feuers im ganzen Umfange ihres Gebietes wie ein leuchtender Stern vorkommen,

38) Doch ging CUSA nicht so weit, eine Beseelung der einzelnen Himmelskörper vorauszusetzen (vgl. KUHLENBECK, GIORDANO BRUNO's Reformation des Himmels, Leipzig 1889, S. 366).

39) A. v. HUMBOLDT (Kosmos, 3. Band, S. 289 der Cottaschen Neuauflage, Stuttgart s. a.) betont die Notwendigkeit, den Randnoten die vom Autor offenbar gewünschte Beachtung zu schenken.

40) SCHARPFF, S. 123 ff.

41) Dies widerspricht nicht etwa der früheren Angabe von CUSA's gegensätzlichem Verhalten gegen die peripatetisch-scholastische Elementenlehre. Denn diese verlangte ja eben, dafs die Gestirne aus einem selbständigen, der Erde fremdartigen, ätherischen Stoffe gebildet seien, und unsere Vorlage spricht sich zu gunsten vollster Wesensgleichheit zwischen sämtlichen Weltkörpern aus; ein für jene Zeit gewagter Gedanke, dessen vollständige Bestätigung inzwischen durch die spektralanalytische Forschung erbracht worden ist.

wie uns, die wir im Umkreise der Region der Sonne uns befinden, die Sonne überaus hell leuchtend vorkommt." CLEMENS meinte[42]), solche Äufserungen wären nur verständlich, wenn man annehme, CUSA habe etwas von den Sonnenflecken gewufst, aber HUMBOLDT (a. a. O.) erklärt sich mit Recht gegen diese geschichtlich unhaltbare Vermutung. So viel ist ja wahr: Damals, als die Wilson-Herschelsche Sonnenfleckentheorie allgemein gebilligt war, mochte man billig über CUSA's Worte erstaunen, die zwar nicht eben klar sind, aber doch dahin gedeutet werden können, dafs an eine dunkle Sonnenkugel, umflutet von einer Licht und Wärme ausstrahlenden Photosphäre, gedacht worden sei. Wenn man übrigens aufmerksam in der Zeile fortliest, so sieht man[43]), dafs CUSA auch dem Monde, und wahrscheinlich nicht minder den übrigen Planeten, eine ähnliche Zusammensetzung aus konzentrischen Elementarhüllen zuschrieb und für die Sonne keine Ausnahmestellung beanspruchen wollte. In hohem Mafse merkwürdig bleibt der ganze Abschnitt gleichwohl als ein Versuch[44]), die Natur der Gestirne aus den für die Erde giltigen Gesetzen abzuleiten, Astro- und Geophysik zu einander in Wechselbeziehung zu setzen.

Wir erfuhren soeben, dafs der geistvolle Theosoph zwischen den Sätzen, welche er aufstellte, wohl unterschied; von denen, welche ihm als gesichert erschienen, trennte er die „Träumereien", deren wir Erwähnung thaten, und wieder andere lagen für ihn in der Mitte zwischen voller Wahrheit und abenteuerlicher Spekulation. Letztere bezeichnete er als *„paradoxa"*. Dahin gehört der Ausspruch, dafs die Gestalt der Erde nicht vollkommen sphärisch und dafs die Bahn, in welcher sich dieselbe bewegt,

---

42) CLEMENS, a. a. O., S. 101. Sicherlich war CUSA's Idee mafsgebend für GIORDANO BRUNO's viel weitergehende Konstruktionen zur Lehre von den physischen Eigenschaften der Sonne (KUHLENBECK, a. a. O., S. 365). Er sagt einmal (BRUNNHOFER, GIORDANO BRUNO's Weltanschauung und Verhängnis, Leipzig 1882, S. 168): *„Mi ricordo d'aver visto il Cusano, di cui il giudizio so che non riprovate, il quale vuole, che anco il sole abbia parti dissimilari, come la luna e la terra."* Dies war aber ein Mifsverständnis; an Unregelmäfsigkeiten der Oberfläche dachte CUSA nicht, sondern lediglich an eine sphärische Schichtung der Elementarmaterien in der Kugel des in Rede stehenden Weltkörpers.

43) „Der Mond erscheint uns nicht so hell, vielleicht, weil wir in seinem Umkreise mehr den zentralen Teilen näher stehen, etwa der wässerigen Region desselben." Daraus geht doch hervor, dafs der Aufbau der beiden Körper, der Sonne und des Mondes, als ein wesentlich gleichförmiger, die gleichen Bestandteile aufweisender vorausgesetzt war.

44) Abgesehen von der (pseudo?-)plutarchischen Schrift *„De facie in orbe lunae"* kannte man keine solchen Versuche, bis dann KEPLER sich mit seiner ganzen Genialität auf dieses Feld warf (vgl. LUDW. GÜNTHER, KEPLER's Traum vom Mond, Leipzig 1898).

nicht vollkommen kreisförmig sei[45]). Wir fühlen uns aufser stande, den Gedankengang des sich gerne in ein gewisses Dunkel hüllenden Schriftstellers[46]) nachzudenken; am nächsten liegt es wohl, dafs derselbe nur der prinzipiellen Überzeugung Ausdruck verleihen wollte, nichts Geschaffenes erfreue sich einer absoluten Vollkommenheit. Man darf aber auch an die unregelmäfsige Oberflächenkonfiguration der Erde, an ihre Gliederung in Gebirge und Flachländer, sowie an die Exzenter und Epizykeln denken, mit welchen die Gelehrten den Weltraum bevölkert hatten, und mit denen sich der praktische Astronom notwendig abfinden mufste[47]), so wenig sie dem Philosophen sympathisch sein mochten.

45) C. O. O., S. 39. *„Terra etiam ista non est sphaerica, ut quidam dixerunt, licet tendat ad sphaericitatem . . . et eius motus circularis, sed perfectior esse posset.“*

46) Die von einem Historiker (C. F. Brockhaus, Nicolai Cusani *de concilii universalis potestate sententia explicata,* Leipzig 1867, S. XIII) gerügte Gewohnheit des Kardinales, vom eigentlichen Behandlungsgegenstande abzuschweifen und dadurch die Durchsichtigkeit der Gedankenentwicklung zu gefährden, tritt auch in den philosophisch-naturwissenschaftlichen Schriften oft genug unliebsam zu tage.

47) Als solcher bewährt sich Cusa in seinem Gutachten über die Kalenderreform (vgl. Schanz, Die astron. Anschauungen etc., S. 17 ff.) und in seiner Kritik des alfonsinischen Tafelwerkes. Sein Vorschlag (R. Wolf, a. a. O., S. 329), dem Pfingstsonntag, 24. Mai, des Jahres 1439, sofort als Pfingstmontag den 1. Juni folgen zu lassen und zur Hintanhaltung späterer Verwirrung der Zeitrechnung jedem 304. Jahre den Schalttag zu entziehen, ist ein recht rationeller, wenn auch der zweite Teil nicht die Übersichtlichkeit besitzt, welche man der gregorianischen Einrichtung nachrühmen mufs. — Noch deutlicher offenbart sich des Cusanus Vertrautheit mit dem gesamten astronomischen Wissen seiner Epoche in der Abhandlung über die Planetentafeln (C. O. O., S. 1168 ff.); eben diesem Zeitalter bringt er freilich auch seinen Zoll dar durch die Behauptung, dafs der Rückgang der Aequinoktialpunkte kein gleichförmiger sei, und dafs um die Zeit von Christi Geburt diese Bewegung eine besonders rasche gewesen sei. Diese Irrlehre beherrschte ja das ganze Mittelalter und fand selbst in Coppernicus noch einen Anhänger, der aber doch die schlimmsten Auswüchse beseitigte (vgl. Günther, Der Wapowski-Brief des Coppernicus und Werner's Traktat über die Bewegung der achten Sphäre, Mitteil. d. Coppern.-Ver. f. Wissensch. u. Kunst zu Thorn, 2. Heft, S. 3 ff.). Scharfsinnig bemerkt Cusa, die Elemente der Planetenbewegungen seien von König Alfons vielfach falsch bestimmt worden, aber durch einen glücklichen Zufall glichen sich wenigstens beim Finsterniskalkul die Fehler so ziemlich aus, und darum habe man sich bei den unrichtigen Daten allzu leicht beruhigt. *„Et hoc multos magnos et famatos Philosophos duxit in credulitatem predictarum tabularum“* (C. O. O., S. 1173). Als der erste, der dem *„libros del saber“* das kritische Messer ansetzte, wie A. Mayr behauptete (Das Studium der Mathematik im XV. Jahrhundert, Bayer. Annalen, III, 1, S. 200), ist Cusa übrigens unter keinen Umständen anzuerkennen, und aus seinen eigenen Darlegungen erhellt auch nicht, dafs er sich ein solches Verdienst, das ihm nicht zukam, irgendwie zuzueignen geneigt gewesen wäre. — Inwieweit Cusa bei den (27 + 37 =) 64 Sternpositionen

Auch eine unseres Wissens bisher noch gar nicht beachtete Stelle des inhaltreichen Buches, mit welchem wir uns zur Zeit beschäftigen, sei hier kurz berührt. Die Astrologen des Altertums hatten Betrachtungen über die Abhängigkeit klimatischer und anderweiter Verhältnisse der einzelnen Erdgegenden angestellt, je nachdem dieselben dem Einflusse gewisser Gestirne unterstehen; man hatte eine geographische Astrologie geschaffen, mit der erst in jüngster Zeit die Wissenschaft sich ernstlicher zu befassen angefangen hat[48]). CUSA hält als klarer Denker nichts von dieser Afterwissenschaft; es sei, sagt er[49]), dem Menschen verwehrt, die Länder der Erde nach ihrer angeblichen Abhängigkeit von den Stellungen der Himmelskörper in edlere und weniger edle einzuteilen.

Die Geschichte der Kosmologie darf auch die Thatsache nicht mit Stillschweigen übergehen, dafs bei CUSA eine erste bestimmte Erfassung des Beharrungsgesetzes nachzuweisen ist[50]). Um seine abstrakten Lehren über Gott- und Menschheit zu versinnlichen, machte CUSA Gebrauch von einem Spiele, dessen symbolische Bedeutung Anlafs zur Verfassung einer eigenen Schrift („*De ludo globi*") gegeben hat[51]). Eine völlig glatte Kugel, auf absolut glatter ebener Unterlage dahinrollend, kann niemals zur Ruhe kommen. Gerade so verhält es sich bei den himmlischen Kreisbewegungen; die dauernde Bewegung ist da der Normalfall, die unterbrochene ein Ausnahmefall. Aufserordentlich wichtig ist die Erkenntnis, dafs die Bewegungstendenz in dem bewegten Körper selbst steckt und nicht, wie Aristoteles wollte, vom umgebenden Medium abhängt.

---

beteiligt ist, welche der Ausgabe seiner Werke (C. O. O., S. 1174 ff.) angefügt sind, wird sich (SCHANZ, a. a. O., S. 30) nicht mehr entscheiden lassen; die Überschrift lautet: „*Stellae inerrantes ex Cardinalis* CUSANI, NICENI, *et* ALLIACENSIS *observationibus supputatae*". ALLIACENSIS ist der Kardinal D'AILLY, NICENUS jedenfalls HIPPARCH von Nicaea; darüber, dafs CUSA auch Sternbeobachtungen angestellt habe, ist sonst nichts bekannt. In JAHN's „Astron. Unterhaltungen" (Jahrgang 1854, S. 412) geschieht eines aus Kupfer gefertigten Astrolabiums Erwähnung, welches zum Nachlasse des Kardinales gehört haben und noch jetzt in seinem Heimatsorte aufbewahrt werden soll. Mit einem solchen Instrumente kann CUSA immerhin die bewufsten Ekliptikkoordinaten, die auch nur in sehr runden Zahlen eingetragen sind, selber ermittelt haben.

48) Man sehe die Mitteilungen hierüber bei HÄBLER (Astrologie im Altertum, Zwickau 1879), sowie bei BOLL (Studien über CLAUDIUS PTOLEMAEUS, Leipzig 1896).

49) C. O. O., S. 40. „*Quare patet, per hominem non esse scibile, an regio terre sit in gradu perfectiori et ignobiliori, respectu regionum stellarum aliarum* . . ."

50) WOHLWILL, Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes, Zeitschr. f. Völkerpsychologie u. Sprachwissenschaft, 14. Band, S. 375 ff.

51) SCHARPFF, S. 220 ff.; KÄSTNER, Geschichte der Mathematik, 1. Band, Göttingen 1796, S. 410 ff.

Man weiſs, daſs Galilei mit der Bekämpfung dieses Grundsatzes eine rationelle Bewegungslehre begründete[52]), aber schon vor ihm war Cusa des wirklichen Sachverhaltes inne geworden. Dieser Ruhm muſs ihm verbleiben, auch wenn man mit Wohlwill (s. o.) zuzugeben bereit ist, daſs der Begriff des „*motus impressus*“ (δύναμις ἐνδοθεῖσα) bereits den älteren griechischen und arabischen Auslegern des Stagiriten mehr oder weniger zum Bewuſstsein gekommen sei.

Wir können von Cusas Verdiensten um die Astronomie nicht Abschied nehmen, ohne uns noch mit dem vielleicht wichtigsten Schriftstücke zu beschäftigen, welches von ihm auf unsere Tage gelangt ist. Als Clemens anläſslich der Vorstudien, welche er für seine uns bereits bekannte Schrift über Cusa und Bruno anstellte, die Bibliothek des aus der Hinterlassenschaft des Kardinals reich ausgestatteten Hospitales in Cues durchsuchte, fiel ihm ein Autograph des Donators in die Hände, welches er veröffentlichte.[53]) Derselbe ist um deswillen von so hoher Wichtigkeit, weil Cusa in diesem Schriftstücke seine früheren, ziemlich allgemeinen Andeutungen über die Bewegung der Erde schärfer präzisiert Ohne Zweifel entstammt dasselbe dem späteren Lebensalter des Schreibers; derselbe hatte wohl gefühlt, daſs die unbestimmten Ausführungen der „*docta ignorantia*“ eine astronomisch faſsbare, authentische Interpretation erheischten, und eine solche lieferte er hier. Ob in der Absicht, auch sie der Öffentlichkeit zu übergeben, das müssen wir unentschieden lassen. Da wir den Sinn der sehr gedrängten Darstellung schon bei früherer Gelegenheit[54]) aufgeklärt zu haben glauben, so begnügen wir uns mit Wiedergabe der drei Leitsätze, in welche wir damals den Inhalt zusammendrängten.

Es dreht sich danach I. die Erde in 24 Stunden von Ost nach West um eine ihrer Richtung nach mit der Verbindungslinie der Weltpole zusammenfallende Achse. Gleichzeitig aber dreht sich auch II. die achte Sphäre mit allen zwischen ihr und der Erde befindlichen Weltkörpern in entgegengesetztem Sinne, also von West nach Ost, um die gleiche Achse, und zwar ist ihre Umdrehungsgeschwindigkeit doppelt so groſs, als diejenige der Erde. III. Auch die Sonne nimmt an diesem ostwestlichen Umschwunge teil, aber derselbe wird durch die Eigenbewegung dieses Gestirnes derart verlangsamt, daſs im Laufe eines Jahres das Zurückbleiben gerade auf 360° anwächst.

Man staunt über die Komplikation, welche diese Anordnung zuwege bringt, allein man kann nicht in Abrede stellen, daſs der angestrebte Zweck,

---

52) Vgl. hiezu Heller, Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit, 1. Band, Stuttgart 1882, S. 53, S. 377 ff.

53) Clemens, S. 98 ff. 54) Günther, Studien etc., S. 27 ff.

die tägliche Umdrehung der Himmelskugel und den Wechsel von Tag und Nacht zu erklären, auch auf diesem umständlichen Wege erreicht wird. Die Geschwindigkeit der Erde von Ost gegen West ist, wenn wir diesen Drehsinn durch das Zeichen Minus kennzeichnen, gleich $-\frac{360}{24}$; diejenige der achten Sphäre ist positiv zu nehmen und hat nach Cusa den Wert $\frac{720}{24}$; als resultierende Geschwindigkeit erhalten wir sonach für die Erde $\frac{-360+720}{24}=\frac{360}{24}$, gerade so, wie sich dies auch verhalten würde, wenn die Erde allein eine Umdrehung von West nach Ost hätte, die Sternsphäre dagegen stillstände. Weshalb, diese Frage drängt sich uns da gebieterisch auf, weshalb liefs sich ein so selbständiger Denker nicht an der ungleich einfacheren Annahme der bloßsen Erddrehung genügen, sondern baute ein so eigenartig verwickeltes System auf? Eine voll befriedigende Antwort auf diese Frage vermag heutzutage niemand mehr zu geben, aber dennoch giebt es Überlegungen, welche vielleicht eine gewisse Einsicht in den Ideengang vermitteln, dessen Resultat in der soeben besprochenen Rotationslehre vor uns liegt.

Eine vorurteilsfreie Vergleichung der letzteren mit den kühnen Hypothesen des Hauptwerkes mufs philosophisch zu gunsten des letzteren ausfallen, während allerdings Derjenige, der sich auf einen sozusagen geometrischen Standpunkt stellt, die unzweideutige Charakteristik der Umdrehungsvorgänge vorziehen könnte. Die achte Sphäre, welche das Buch *„De docta ignorantia"* so gut wie beseitigt hatte, welche dort nur noch den Wert einer bequemen Redewendung besafs, ist nunmehr wieder zu einem reellen Wesen geworden, denn nur einen Körper kann man sich als mit Achsendrehung begabt vorstellen. Bei dieser Lage der Dinge glauben wir einer Hypothese Raum geben zu dürfen, die nicht als allzu keck erscheinen wird. Es war oben von einem in Verlust geratenen Traktate über die Gestalt der Welt die Rede; als ein Konzept für diese Schrift steht möglicherweise das von Clemens entdeckte Bruchstück vor uns. Mit dem Alter und seiner Rangerhöhung mögen dem Kardinale zweierlei Bedenken aufgestiegen sein: einerseits, ob nicht das vordem errichtete Lehrgebäude gar zu kühn und luftig befunden werden möchte, und andererseits, ob nicht eine exaktere mathematische Begründung der einstmals rücksichtslos hingeworfenen Gedanken angezeigt sei. Er führte diese Begründung durch und erreichte dadurch zugleich den Vorteil, allen Schwierigkeiten der Kirchenlehre aus dem Wege zu gehen, ohne doch mit dem Prinzipe universeller Bewegung in Widerspruch zu geraten. Auch dann jedoch, wenn wir uns diesem Versuche der Be-

seitigung einer unleugbaren Disharmonie zwischen dem jüngeren und älteren CUSANUS zuneigen, bleibt derselbe ein bewufster Vorläufer des COPPERNICUS, wie ja auch noch nach dessen Auftreten die Zahl derjenigen gar nicht klein war, welche die tägliche Bewegung des Erdballes zugaben und nur die jährliche leugneten[55]). Eine genauere Erforschung der Geschichte dieser Vermittlungslehre wäre recht wünschenswert. —

NIKOLAUS VON CUES hat sich, wie erst die neueste Zeit uns belehrte, auch als Kartograph hervorgethan, und die Geschichte der Kartenprojektionslehre gedenkt seines Namens als eines der ersten, welche den rohen Handzeichnungen des Mittelalters gesetzmäfsige Netzentwürfe substituierten. Soviel uns bekannt, war es BREUSING[56]), der die Thatsache, dafs von CUSA eine Karte Mitteleuropas erhalten sei, der Gegenwart ins Gedächtnis zurückrief. Er bezeichnete den grofsen Mäzen der mathematisch-geographischen Disziplinen, WILLIBALD PIRCKHEYMER, als denjenigen, dem man die Rettung der Karte zu danken habe, erwähnte aber zugleich, dafs schon ORTELIUS von deren Existenz nur noch durch ein Zitat gewufst habe. Genauer bekannt sind wir mit der Karte erst durch einen Aufsatz S. RUGES[57]) geworden, und an diesen knüpfte A. E. v. NORDENSKIÖLD an[58]), von dem wir erfuhren, dafs CUSA's Karte unter denjenigen, welche nicht auf den ptolemaeischen Archetypus zurückgehen, die zweite ist, die ein vollständiges Gradnetz trägt. Die erste ist diejenige der Länder des hohen europäischen Nordens von CLAVUS[59]). Zu dem, was RUGE brachte, war METELKA[60])

---

55) Zwei Astronomen, welche auf solche Weise zwischen PTOLEMAEUS und COPPERNICUS einen Ausgleich herbeizuführen strebten, waren ORIGANUS und LONGOMONTANUS (KÄSTNER, a. a. O., 4. Band, Göttingen 1800, S. 112 ff., 118). Es zeigt sich, dafs die Neigung zu diesem Kompromisse gerade bei den Anhängern TYCHO BRAHES eine besonders grofse war.

56) BREUSING, Leitfaden durch das Wiegenalter der Kartographie, Frankfurt a. M. 1883, S. 11.

57) S. RUGE, Ein Jubiläum der deutschen Kartographie, Globus, 60. Band, S. 4 ff.

58) v. NORDENSKIÖLD, *Bidrag till Nordens äldsta kartografi*, Stockholm 1892; *Periplus; An Essay on the early History of Charts and Sailing-Directions, translated by* BATHER, Stockholm 1897, S. 54.

59) Über diesen ältesten eigentlichen Geographen Skandinaviens orientiert am zuverlässigsten STORM (*Den danske geograf* CLAUDIUS CLAVUS *eller* NIKOLAUS NIGER, Ymer, 1889, S. 189 ff.; 1891, S. 13 ff.).

60) METELKA, *O mape Kard.* MIKULÁŠE CUSY *z prostředka XV. století, Věstník král. České společnosti náuk, třída filosoficko-historicko-jazykoz-pytná*, 1895, III (Prag 1895). Der Verfasser verdankt Herrn Prof. METELKA eine deutsche Übersetzung dieses Essays, durch welchen, wie erwähnt, die Ergebnisse der Untersuchung RUGES teils bestätigt, teils auch in einzelnen Punkten weiter ausgestaltet werden.

einige wertvolle Ergänzungen zu liefern in der Lage, indem er festzustellen vermochte, dafs vier Exemplare der Cusa-Karte heute noch vorhanden sind; je eines derselben befindet sich im Britischen Museum zu London, in der durch ihre historischen Reliquien ausgezeichneten Militärbibliothek zu Weimar, in der Kartensammlung des Germanischen Nationalmuseums zu Nürnberg und in der Plankammer des Armeekonservatoriums zu München. Eine Nachbildung des Londoner und des Münchener Exemplares ist jeweils den Abhandlungen von Ruge und Metelka beigegeben[61]); die Verschiedenheiten sind natürlich geringfügig und beziehen sich wesentlich blos auf die von den Schicksalen der Originalkarte Nachricht gebenden Aufschriften. Diese letztere erschien 1491 zu Eichstätt an der Altmühl, in welcher Stadt unter der Regierung des Bischofs Wilhelm von Reichenau ein lebhaftes wissenschaftliches Treiben herrschte[62]).

Die Karte war in Kupfer gestochen, wie dies im Kindesalter der deutschen Kartographie allgemein üblich war; erst um 1500 löste der Holzschnitt den Kupferstich ab, um etwa fünfzig Jahre später wieder lang-

---

61) Das Londoner Exemplar entstammt dem Jahre 1491, das Münchener dem Jahre 1530. Wenn trotz dieses nicht unbeträchtlichen Altersunterschiedes behauptet werden konnte, beide Abdrücke seien eigentlich identisch, so hat es damit folgende Bewandnis. Nicht Pirckheymer, der Nürnberger, welchen Breusing als Mittelsmann bezeichnet hatte, sondern der ihm allerdings geistesverwandte Augsburger Konrad Peutinger, mit dessen Name ja auch die Rettung einer hochwichtigen römischen Strafsenkarte unlöslich verbunden ist, hatte die Originalplatte der Cusa-Karte angekauft und übergab sie dem bekannten Maler Hans Burgkmair (1473—1531) zur Vervielfältigung und Veröffentlichung. Letztere besorgte der Baseler Buchführer Cratander mit Zuziehung des sachverständigen Kosmographen Sebastian Münster. Dieser Sachverhalt erschliefst sich aus den Legenden der Karte, durch welche bewiesen wird, dafs die Münchener Karte von derselben Platte abgenommen ward, wie ihre Vorgängerinnen. Metelka (a. a. O. S. 4) zitiert auch noch die bekräftigenden Angaben in dem Buche von Gregorii (Curieuse Gedanken von den vornehmsten und accuratesten Alten und Neuen Land-Charten, Frankfurt a. M.-Leipzig 1713). Wenn Metelka glaubt, dafs noch einige Unsicherheit über den relativen Anteil der drei Arbeitsgenossen Burgkmair, Münster und Cratander obwalte, so hoffen wir auch diese jetzt beseitigt zu haben. Der erstere besorgte die technische Abnahme und die künstlerische Ausschmückung im Stile der Zeit; der zweitgenannte überwachte die Korrektheit der Herstellung der Abzüge und lieferte den geographischen Kommentar; Cratander endlich brachte das fertige Werk in den Handel. Die Nachweisungen Metelka's sind mit Dank aufzunehmen, und gleiches gilt für die Unterstützung, welche ihm dabei der Münchener Topograph H. Lutz angedeihen liefs; letzterem ist auch der Verfasser für geleistete Hilfe mehrfach verbunden.

62) Vgl. in dieser Hinsicht Sax, Die Bischöfe und Reichsfürsten von Eichstätt, 1. Band, Landshut 1884, S. 302 ff.

sam durch die Chalkographie verdrängt zu werden[63]). Neben dem Münchener Blatte treten die drei älteren Stiche hinsichtlich der Deutlichkeit und Übersichtlichkeit sehr zurück, und wer topische Studien auf der Karte anstellen will, wie sie an diesem Orte selbstverständlich aufser unserer Absicht liegen[64]), wird wohl thun, sich an die Faksimilierung METELKA's zu halten. Eine verkleinerte Abbildung derselben ist diesen Zeilen beigefügt, einzig in der Absicht, die von CUSA gewählte Projektionsart zu verdeutlichen.

Es ist dies die modifizierte Methode des PTOLEMAEUS, der bekanntlich für die zeichnerische Wiedergabe gröfserer oder kleinerer Teile der Erdoberfläche verschiedene Verfahrungsweisen an die Hand gegeben hat, die im 1. und 8. Buche seiner „Geographie" enthalten sind[65]). Ursprünglich läuft ja allerdings die ptolemaeische Kegelprojektion darauf hinaus, dafs die Meridiane durch konvergente, zum Mittelmeridiane symmetrisch angeordnete gerade Linien, die Parallelen aber durch konzentrische Kreisbogen dargestellt werden sollen. Solange es sich indessen um einen nicht beträchtlichen Erdraum handelt, wird der Fehler nicht grofs sein, der entsteht, wenn man den Mittelpunkt dieser Kreise, welcher der Erdachse angehört, in die Unendlichkeit fallen und die Breitenkreise in ein System paralleler gerader Linien degenerieren läfst, so dafs folglich die Begrenzung der Karte mit dem Perimeter eines Trapezes zusammenfällt, wie wir dies auch bei der CUSA-Karte sehen. Wir fragen uns nun, wie der Kardinal zu Werke ging, nachdem er den Plan gefafst hatte, eine „Landtafel" Deutschlands und seiner Nachbargebiete auszuführen.

---

63) v. NORDENSKIÖLD, Periplus, S. 159.

64) Solche Detailprüfung verlohnt auch kaum mehr, da die am meisten in die Augen fallenden Mängel der CUSA-Karte bereits von MÜNSTER ermittelt und zusammengestellt worden sind. Im August 1530 widmete derselbe seinem Gönner PEUTINGER eine diesen Zweck verfolgende Abhandlung *(Germaniae atque aliarum regionum, quae ad imperium usque Constantinopolitanum protenduntur, descriptio, per* SEBASTIANUM MUNSTERUM *ex historicis atque cosmographis, pro Tabula* NICOLAI CUSAE *intelligenda excerpta. Item eiusdem tabulae Canon).* Die namentlich für die historische Länderkunde belangreiche Erörterung ist jetzt leicht zugänglich geworden, weil sie von GALLOIS als Anhang in seine bekannte Monographie *(Les géographes allemands de la renaissance,* Paris 1890, S. 258 ff.) aufgenommen wurde.

65) Diese Projektionen behandeln: MOLLWEIDE, Die Mappierungskunst des CL. PTOLEMAEUS, Monatl. Korresp. zur Beförd. d. Erd- und Himmelskunde, 11. Band, S. 322 ff.; WILBERG-GRASHOF, Ausgabe der Geographie des PTOLEMAEUS, 1. Band, Essen 1838 (Einleitung); D'AVEZAC, *Coup d'oeil historique sur la projection des cartes de géographie, Bull. de la soc. de géogr.*, 1863, S. 283 ff.; GERMAIN, *Traité des projections des cartes géographiques,* Paris 1866, S. 214 ff.; TISSOT-HAMMER, Die Netzentwürfe geographischer Karten, Stuttgart 1887, S. 88 ff., 145 ff.; H. BERGER, a. a. O., 4. Abt., S. 142 ff.

Gerade damals, als diese Karte entstand — und zwar war um 1461 die Zeichnung vollendet, welche dann noch dreifsig Jahre auf allgemeineres Bekanntwerden warten mufste — weilte auch in Italien jener Mönch NIKOLAUS von Reichenbach (Oberpfalz), welcher als der eigentliche Wiedererwecker des Geographen PTOLEMAEUS im Abendlande geehrt werden mufs. Dieser NIKOLAUS GERMANUS, irrtümlich DE DONIS genannt, war es eben, der die erwähnte Abänderung der konischen Abbildung und die Trapezkonstruktion, wenn dieses Wort gestattet ist, allgemein durchführte[66]). Wenn wir nun, wie auch RUGE (a. a. O.) betont, erkennen, dafs die technischen Einzelheiten bei CUSA genau die gleichen wie bei NIKOLAUS GERMANUS sind, so liegt wohl die Vermutung nicht ferne, beide Männer hätten auf welschem Boden Bekanntschaft geschlossen, und der Kardinal, der sich dazumal gewifs schon mit seinem Plane trug, habe bei dem Landsmanne noch einiges gelernt, was ihm bei der Verwirklichung dieser Absicht zu statten kommen konnte. Denkbar wäre selbstredend auch das umgekehrte Verhältnis, dafs der bayerische Mönch erst durch den Kardinal zu seinen kartographischen Arbeiten angefeuert worden und auf die Vereinfachung des ptolemaeischen Kartenbildes hingelenkt worden sei. Übrigens wird man auch der uns bekannten Beziehungen CUSAS zu TOSCANELLI eingedenk bleiben müssen, den sein Zeitalter als den ersten Kosmographen pries (LIBRI, *Histoire des sciences mathématiques en Italie,* 3. Band, Paris 1840, S. 71). Dafs freilich PAULUS FLORENTINUS, wiewohl er sich als geschickter Kartenzeichner bewährt hat, nicht gerade das trapezförmige Bild bevorzugt hat, ist durch H. WAGNER's Untersuchung (Die Rekonstruktion der TOSCANELLI-Karte vom Jahre 1474 und die Pseudo-Facsimilia des BEHAIM-Globus vom Jahre 1492, Nachr. v. d. Gött. Gel. Gesellsch., 1894, S. 208 ff.) so gut wie gewifs gemacht worden. Die Motive, unter denen der Florentiner, auf den MARCO POLO indirekt und NICCOLÒ DE'CONTI direkt einwirkten, sich zur Anfertigung jener Karte verstand, beleuchtet des näheren APELT (Die Reformation der Sternkunde; ein Beitrag zur deutschen Kulturgeschichte, Jena 1852, S. 7 ff.), der auch über CUSA's Anteil an der Vorbereitung der von COPPERNICUS herbeigeführten Revolution der Geister gesunde Ansichten äufsert (a. a. O., S. 21 ff.). Auch wenn es sich aber so verhält, wie zuerst angenommen, wird doch RUGE's Charakteristik[67]) nicht geändert: „CUSA's Karte ist die

66) GALLOIS, a. a. O., S. 18.

67) RUGE, S. 5. Indem dieser Geschichtschreiber der Erdkunde einen Rückblick auf die Entwicklnng der deutschen Kartographie wirft, kommt er zu der Schlufsfolgerung (S. 8), dafs erst wieder die kritische Karte Deutschlands von GERHARD MERCATOR (1585) als eine Weiterführung des Werkes anzusehen sei, welches NIKOLAUS VON CUES so vielversprechend inauguriert hatte.

erste gedruckte Originalkarte, die uns Mitteleuropa nicht nach der Vorstellung der alten Griechen, sondern nach der lebensvollen Auffassung eines modernen Beobachters, der das Land auf vielfachen Reisen kennen gelernt hatte, vor Augen führt." Auf manche an sich das Interesse des Fachmannes erweckende Einzelheit kann hier nicht eingegangen werden[68]); es muſs sein Bewenden dabei haben, daſs die Geschichte der mathematischen Geographie ihn als den ersten zu feiern hat, der unter den Neueren eine auf korrekter Projektion beruhende Landkarte herzustellen wagte und einen glücklichen Erfolg dieses Wagnisses gesehen haben würde, wenn ihm länger zu leben beschieden gewesen wäre.[69]) —

Derselbe Mann, dessen Berufsarbeit ihm die gröſsten Mühsale auferlegte, und der trotzdem die Muſse fand, in seinen schriftstellerischen Arbeiten Samenkörner aller Art auszustreuen, die nur freilich in jener Zeit nur allzu oft auf steiniges Erdreich fielen, hat auch gewissen Teilen der physikalischen Erdkunde wertvolle Anregungen gegeben, von denen wir sehen werden, daſs sie wenigstens zum Teile auch nach seinem Hinscheiden noch nachwirkten und der Wissenschaft wirklich nützten. Cusa hatte offensichtlich Neigung für naturwissenschaftliche Dinge[70]) und drängte in seiner einschlägigen Schrift[71]) (*„Idiotae de staticis experimentis dialogus"*)

---

68) Das Heimatland der deutschen Karte, Italien, verrät sich u. a. durch die Einteilung der Breitengrade in je 60 Miglien (resp. 12 Teile zu je 5 Miglien). Astronomische Fixpunkte war Cusa damals nur in geringer Zahl auszunützen imstande; nur für Würzburg, Erfurt, Lübeck und die einer blühenden Hochschule sich erfreuende, damals deutschpolnische Stadt Krakau stimmen seine Positionen mit denen der alfonsinischen Tafeln (s. o.) überein. Der Mangel zuverlässiger Ortsbestimmungen verschuldete auch die hauptsächlichsten Gebrechen der Karte, insonderheit das gänzliche Fehlen des Rheinknies zwischen Mainz und Bingen. Der deutsche Hauptstrom behält durchweg eine südnördliche Richtung bei.

69) Auch bei einer anderen Gelegenheit scheint Cusa in der Geschichte der Kartographie genannt werden zu müssen. Derselbe war nämlich bei der Ausgabe des „Itinerarium Antonini", welche 1494 zu Venedig erfolgte, insofern beteiligt, als er früher sich um die Textesreinigung der vorhandenen Kodizes bemüht hatte. (Vgl Wesseling, *Vetera Romanorum itinera*, Amsterdam 1727; *Itinerarium* Antonini Augusti *et* Hierosolymitani, *ed.* Parthey-Pinder, Berlin 1848, S. XVII; J. v. Aschbach, Die Wiener Universität und ihre Humanisten im Zeitalter Kaiser Maximilian's I., Wien 1877, S. 263.) Diese noch zu wenig geklärte Angelegenheit wäre einer besonderen Untersuchung wohl würdig.

70) Während er sich in einer schlimmen politischen Verwicklung befand, spricht Cusa (Scharpff, S. 316) in den Einleitungsworten zu einer theologischen Schrift davon, er sei mit *„herbarum collectio"*, mit Botanisieren, beschäftigt gewesen.

71) C. O. O., S. 172 ff. Eigentlich unterhalten sich Autor, Idiota (Cusa selbst)

eine Fülle von Beobachtungen und Bemerkungen zusammen, welche von reiflichem Nachdenken Zeugnis ablegen, wennschon es durchweg bei Aphorismen verbleibt und ein tieferes Eingehen auf die im Fluge berührten Probleme vermifst wird. Von diesem Dialoge, in welchem sich der Philosoph mit einem Mechaniker unterhält, sind zwei deutsche Übersetzungen vorhanden[72]; ein untrüglicher Beweis dafür, dafs die Mit- und Nachwelt in dieser Sammlung eine wertvolle Bereicherung der Litteratur erblickte. Die Historiker haben von der Schrift, wie sich das von selbst versteht, ausnahmslos Notiz genommen und mehr oder minder ausführliche Auszüge ihren eigenen Werken einverleibt; vor allem ist in dieser Beziehung Kaestner[73]) zu nennen.

Es gab damals keinen anderen physikalischen Apparat von grofser Exaktheit, als die Wage, welche Cusa nicht nur in der gewöhnlichen Form als zweiarmigen, sondern auch als einarmigen Hebel (Schnellwage, römische Wage) kannte. Mit ihr werden alle die zahlreichen Experimente des Dialoges angestellt, und das war gewifs kein Fehlgriff.[74]) Freilich sind manche der vorgeschlagenen Versuche so beschaffen, dafs sie sich in Wirklichkeit gar nicht oder doch nur unter grofsen Schwierigkeiten anstellen lassen, aber doch hat Lasswitz[75]) recht, wenn er bemerkt: „Diese Versuche sind immerhin bemerkenswert als die ersten Anfänge, eine selbständige, auf Beobachtung beruhende Naturforschung durch methodische Vorschläge für ihre Untersuchung in Anregung zu bringen.“[76]) Wir wollen

---

und Orator; die deutsche Übersetzung hat die erwähnte, der Sache nach auch ganz zutreffende Änderung der Personen bethätigt.

72) Die jüngere derselben scheint sehr selten zu sein; wir zitieren lediglich nach Düx (2. Band, S. 370 ff.), dafs B. Bramer den Dialog deutsch herausgegeben habe (Marburg i. H. 1619). Bekannter ist jedenfalls die von Rivius in seinem deutschen Vitruv aufgenommene Verdeutschung. Sie bildet einen Anhang dieses Werkes (Vitruvius; des allernamhaftigisten und hocherfarensten, römischen Architect und kunstreichen Werck oder Bawmeysters, Marci Vitruvij Pollionis zehen Bücher von der Architectur und künstlichem Bawen, Basel 1576).

73) Kaestner, a. a. O., 2. Band, Göttingen 1797, S. 122 ff.

74) Die Jolly'sche Methode, die Erddichte mittelst feiner Wägungen zu bestimmen, wird von Zöppritz (Die Fortschritte der Geophysik, Geo. Jahrb., 9. Band S. 5) als eine besonders vertrauenswürdige bezeichnet, „weil das Instrument, die Wage, unter allen physikalischen Mefsapparaten theoretisch wie praktisch am besten bekannt und am leichtesten kontrollierbar ist“.

75) Lasswitz, Geschichte der Atomistik, 1. Band, Hamburg-Leipzig 1890 S. 278 ff.

76) Ähnlich ist die Beurteilung Rosenberger's gehalten (Die Geschichte der Physik in Grundzügen, 1. Teil, Braunschweig 1882, S. 106 ff.): „Diese projektierende Physik ist der erste Anfang der experimentierenden Physik.“ Lasswitz sowohl

den Inhalt der Unterredungen jetzt etwas näher kennen lernen, indem wir eben nur bei denjenigen Partien verweilen, welche direkt oder indirekt die Physik der Erde zu fördern bestimmt sind.

Dem durch Wägung zu führenden Nachweise, daſs die Pflanzen ihre Nahrung wesentlich aus dem Wasser ziehen, folgt ein Exkurs auf die versteinende Kraft mancher Quellen[77]); einzelnen Quellen, wie eine solche angeblich in Ungarn gefunden werde, eigne sogar das Vermögen, Metalle in andere Metalle zu verwandeln; in diesem Falle Eisen in Kupfer. Hoher Nachdruck wird auf die Ermittlung der spezifischen Gewichte verschiedener Körper gelegt. Wenn man das spezifische Gewicht der Erde kennt, so hat man, da auch deren Radius gegeben ist, zugleich das wirkliche Gewicht der Erdkugel[78]); es ist wohl das erste Mal, daſs eine solche Bestimmung als möglich hingestellt wird. Sofort wird dann weiter gegangen zu der hygrometrischen Wage, dem frühesten geschichtlich erkennbaren Versuche, die Luftfeuchtigkeit zu messen und diese Messung für die Witterungsprognose zu verwerten. Man kann ja den triftigen Einwand erheben[79]), auch Philon und Heron hätten bereits die hygroskopischen Eigenschaften gewisser Substanzen gekannt[80]), allein es bleibt für

---

wie Rosenberger spielen auf die groſse Verwandtschaft an, welche zwischen Cusa's Dialoge und der „Wage der Weisheit" des Arabers Alkhazini besteht, von welchem Werke Rosenberger (a. a. O., S. 79 ff.) sehr merkwürdige Einzelheiten mitteilt. Der Kardinal, der selbst eine Kritik des Korans verfaſste (Scharpff, S. 242 ff.), war mit orientalischer Gelehrsamkeit nicht unbekannt; dürfte man annehmen, daſs seine statischen Elemente durch die Kenntnisnahme einer arabischen Quellenschrift beeinfluſst waren? Auch M. Cantor's an einen weiteren Leserkreis sich wendender Essay „Kardinal Nikolaus von Cusa; ein Geistesbild aus dem XV. Jahrhundert" (Nord und Süd. Eine deutsche Monatsschr., herausg. von Dr. Paul Lindau. LXIX, 188—202, 1894) geht auf die uns hier beschäftigenden Fragen in Kürze ein und wird der Eigenart des seltenen Mannes jedenfalls gerechter, als K. v. Prantl's sehr ausführlicher Artikel im V. Bande der „A. D. Biographie"; ähnlich, wie Maedler, glaubt auch der Münchener Philosoph dadurch, daſs er den Cusaner als „Mystiker" hinstellt, einer tieferen Prüfung seiner Lehren überhoben zu sein. —

77) C. O. O., S. 176. *„Sic experimur, certam aquam in lapides verti, ut aquam in glaciem, et virtutem indurativam et lapificativam certis fontibus inesse, qui imposita indurant in lapidem."*

78) Wenn δ die Dichte, r der Erdhalbmesser ist, so kann man das Erdgewicht gleich $\frac{4}{3} r^3 \pi \delta$ setzen. Cusa meint nun offenbar, wenn er es auch nicht deutlich auspricht, daſs, wenn man von recht vielen der Erde angehörigen Stoffen die spezifischen Gewichte kenne, das arithmetische Mittel derselben ungefähr gleich δ sein werde.

79) Heller, a. a. O., 1. Band, S. 220.

80) Genauer orientiert über die Rolle, welche bei den Mechanismen der

Cusa immer noch das Verdienst übrig, an quantitative Bestimmung und an weitere Benützung des Ergebnisses gedacht zu haben. Er nimmt ein Quantum Wolle, weil dieser Stoff den atmosphärischen Wasserdampf leicht aufsaugt, und wenn er das Gewicht zu verschiedenen Zeiten verschieden findet, so weiſs er[81]), daſs in einem Falle mehr, im anderen weniger Feuchtigkeit in der Luft enthalten gewesen ist. Es wäre das freilich ein etwas primitives Verfahren, allein man wird Poggendorff[82]) darin beitreten müssen, daſs alle die älteren Vorrichtungen, wie man sie von Mersenne, Santorio, Maignan u. a. kennt, weder dem Prinzipe noch der Ausführung nach auf einen besonderen Vorzug vor Cusa's Verfahren Anspruch machen können.

Einem anderen Bereiche gehört der Rat an, die Sonnenwärmen verschiedener Klimate zu vergleichen; man soll eine bestimmte Anzahl von Körnern der nämlichen Getreideart, welche auf Ackerfeldern gleicher Bonität und unter sonst ganz gleichen Verhältnissen gewachsen sind, abwägen[83]); da, wo das Gewicht das gröſsere ist, war auch die Intensität der Bestrahlung durch die Sonne eine gröſsere. Man kann auch ebenso vorgehen, um die Stärke der Erwärmung auf Berggipfeln und in Thälern für Orte gleicher geographischer Breite nach gegenseitigem Verhältnis auszumitteln. Daran reihen sich Betrachtungen über den Luftwiderstand, der sich, je nach der Gestalt, gegen gleich schwere Körper von abweichender Gestalt auch verschieden offenbaren wird. An der Wasseruhr — bei Rivius ist an deren Stelle die volkstümlichere Sanduhr getreten — wird die Zeit gemessen, welche bezüglich eine Kugel und eine Platte beim Herabfallen von gleicher Höhe zum Zurücklegen dieses Fallraumes brauchen, wobei auch auf die Unterstützung des Vogelfluges durch den Widerstand der Luft aufmerksam gemacht wird.

Die Wasseruhr (*clepsydra*) ist überhaupt in der Regel der Helfer aus

griechischen Physiker die Absorption des Wasserdampfes durch gewisse Materien spielt, eine Abhandlung von W. Schmidt (Heron von Alexandria, Konrad Dasypodius und die Straſsburger astronomische Münsteruhr, Abh. z. Gesch. d. Math., VIII, S. 191).

81) Poggendorff, a. a. O., S. 387.

82) C. O. O., S. 176. „*Sic etiam posses venari*“ (herausbringen) „*differentiam vaporis solis, in loco montium et vallium, in eadem linea ortus et occasus*“ (die denselben Meridiane angehören).

83) Die Wasseruhr an sich ist viel älter; sie geht auf das griechische Altertum (Ctesibius), vielleicht sogar auf das assyrische zurück (R. Wolf, a. a. O., S. 144 ff.). Neu ist bei Cusa lediglich das Abwägen des ausgeflossenen Wassers, während man früher das Sinken desselben im Hauptgefäſse durch eine an diesem angebrachte Teilung markiert hatte.

der Not. Ein Wasserbehälter hat unten eine kleine Öffnung, aus welcher stetig Flüssigkeit in ein darunter gestelltes Mefsgefäfs abfliefst; die Quantität Wasser, welche sich in jenem innerhalb einer bestimmten Zeit ansammelt, gilt unmittelbar als Zeitmafs. Man kann sich dieses Hilfsmittels zu astronomischen Zwecken bedienen, die Differenz zwischen Sonnen- und Sterntag ausfindig machen. Sogar als eine Art von Thermometer, dieser Gedanke gemahnt besonders an ALKHAZÎNI, ist die Wage zu verwenden, denn das Gewicht des Wassers variiert mit der Temperatur.[84]) Ihren Triumph jedoch feiert die Uhr und deren physikalische Nutzanwendung bei der Aufgabe, die Tiefe eines Gewässers ohne eigentliche Lotung zu finden. Wenn wir die etwas umständliche Schilderung[85]) mit kurzen Worten charakterisieren wollen, so können wir so uns ausdrücken. Ein schwerer Körper, mit dem ein leichter in Verbindung steht, sinkt im Wasser ein und legt in der Zeit t_1 den unbekannten Weg s_1 zurück, während man sich durch vorgängigen Versuch vergewissert hat, dafs die bekannte Tiefe s in der Zeit t durchmessen wird. Die Zeiten werden den Wassermengen p_1 und p proportional gesetzt, welche resp. beim wirklichen Versuche und beim Vorversuche ausgeflossen sind. Dann hat man:

---

84) C. O. O., S. 178. *„Orator. Nonne calorem et frigus, siccitatem et humiditatem temporis, possemus tali modo venari? Idiota. Possemus certe . . .“*

85) Um auch von der deutschen Version einen Begriff zu geben, stellen wir lateinischen und deutschen Text hier neben einander:

C. O. O., S. 177. *„Orator. Audivi, quodam instrumento voluisse nonnullos maris profunditatem venari. Idiota. Cum plumbo fieret, ad instar Lunae formato, octo dierum: ita tamen, quod cornu unum sit ponderosius, et aliud levius, et in leviori, pomum aut aliquid leve, tali instrumento appendatur, quod plumbo in fundum pomum trahente, et primo cum ponderosiori parte terram tangente, et se sic successive inclinante: pomum de cornu liberatum, sursum revertatur, habita scientia, per simile plumbum et pomum in alia aqua, notae profunditatis. Nam ex diversitate ponderum aquae ex clepsydra, a tempore projectionis plumbi, et reversionis pomi in diversis aquis, scitur quaesitum.“*

RIVIUS, S. MDXLIX. „Durch dergleichen Instrument der Uhren oder Sandhorologien, mag man die tieffe des Meeres und jedes Wassers erfinden, dann so man ein Instrument von Pley machet, in der gestalt des mons, der auff acht Tag lang nach dem Newen Mond scheinet, dieser gestalt, und auff das ein Horn oder Spitze ein Apffel stecket, unnd also zu grundt sencken lasset, so bald es den Boden berürt, so ledigt sich der Apffel herab, und schnell feret er uber sich, so viel dann Sands heraufs gelauffen, sol man abwegen, dann das Instrument mit dem Apffel in ein ander Wasser gleicher gestalt gethan, welches tieffe uns bekannt sein sol, dann das Gewicht eygentlichen gemerckt defs aufslauffenden Sands, und gegen einander verglichen, zeigt an die Proportion der tieffe.“

$$s_1 : s = t_1 : t = p_1 : p; \quad s_1 = \frac{st_1}{t} = \frac{sp_1}{p}.$$

Da s, p und p_1 bekannt sind, so berechnet sich s_1 aus einer einfachen Proportion. Dafs in Wirklichkeit keine der beiden Proportionalitäten zu Recht besteht, dafs folglich auch Wassertiefen auf solche Weise nur dann mit einigermafsen leidlicher Genauigkeit ermittelt werden können, wenn sie sich in sehr bescheidenen Grenzen halten, bedarf kaum der Hervorhebung. Originell und folgenreich ist nur der glückliche Einfall, die Zeiten t und t_1 dadurch zu fixieren, dafs der leichte Zusatzkörper, den der schwere mit hinab genommen hatte, sich beim Auftreffen auf dem Grunde ablöst und wieder zur Oberfläche zurückkehrt. An der Fortbildung dieses Prinzipes hat die Folgezeit mit dem gröfsten Erfolge gearbeitet[86]), aber diese Idee selbst war das geistige Eigentum des deutschen Gelehrten, und zwar zu einer Zeit, als für eine

86) Die Entwicklungsstadien dieser verwendbaren bathometrischen Methode anlangend vgl. Günther, Die bathometrischen Instrumente und Methoden, Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 1882, S. 392 ff., 431 ff.; Wolkenhauer, Zur Geschichte der Tiefenmessungen, Deutsche Rundschau f. Geogr. u. Stat., 1. Band, S. 589 ff.; Günther, Handbuch der Geophysik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 397 ff. Die Tiefenmessung Cusa's wird auch von Kretschmer (Die physische Geographie des Mittelalters, Wien-Olmütz 1890, S. 66 ff.) besprochen. Über Cusa ging zuerst erheblich hinaus der — übrigens zweifellos durch Rivius beeinflufste — Deutschungar Chr. Pühler; s. dessen geometrisches Lehrbuch (Aine kurtze unn grundliche anleytung zu dem rechten Verstand Geometriae, Dillingen 1563, S. 652 ff.). Seine Auslösungsverrichtung ist ganz sinnreich erdacht, aber noch etwas unbeholfen; hinsichtlich der Wasserwägung hat keine Änderung platzgegriffen. Eine ganz ähnliche Verbesserung des primitiven Verfahrens war diejenige des Blancanus (*Sphaera Mundi seu Cosmographia,* Bologna 1620, S. 108), der allerdings selbst wieder einen Baumeister Leo Alberti als Erfinder namhaft macht. In den Haken, den die schwere Sinkkugel unten an sich trägt, ist ein spezifisch leichterer, gekrümmter Körper so eingehängt, dafs die Auslösung beim leichtesten, von unten kommenden Stofse erfolgen mufs, während Cusa's Apfel sehr leicht noch längere Zeit an seinem Halbmonde stecken bleiben konnte. Daniel Schwenter (*Deliciae Physico-Mathematicae,* Nürnberg 1626, S. 514 ff.) hält sich teils an Pühler, teils an Rivius. Die Apparate von Hooke, Bacialli, Molinelli, Stipriaan Luiscius (vgl. wegen der ihrer Zeit viel besprochenen Tiefensonde des letzteren Gilbert's Annalen der Physik, 30. Band, S. 417 ff.) verfolgen sämtlich den gleichen Endzweck, aus der zwischen dem Verschwinden des kombinierten und dem Wiederauftauchen des leichten Körpers verstrichenen Zeit die Tiefe zu berechnen. Diesen Plan hat man, als in der Praxis illusorisch, nach und nach fallen lassen, aber das Auslösungsprinzip als solches hat sich bis auf den heutigen Tag erhalten, so wenig auch dem äufseren Anscheine nach die feinsinnig ausgedachten Tiefenlote eines Brooke, Belknap, Sigsbee, Prinzen von Monaco u. s. w. mit Cusa's Instrumentchen gemein haben mögen.

wissenschaftliche Meeres- und Gewässerkunde noch nicht einmal die ersten Grundlinien gezogen waren.[87])

Wir sind am Ende. Eine zusammenfassende Schilderung dessen, was NIKOLAUS VON CUES den exakten geographischen Disziplinen gewesen, hat ungeachtet so vieler vorzüglicher Vorarbeiten bislang gefehlt, und so mag der Versuch, ein solches Gesamtbild zu zeichnen, wohl seine Rechtfertigung in sich tragen. Der Mann, der vor COPPERNICUS die Krystallsphären der griechischen Himmelskunde zertrümmerte, der offen die Wesensgleichheit der Erde mit den anderen Weltkörpern verkündete, der ganz allgemein die Erdbewegung und konkreter auch die Erdrotation lehrte, der den wesentlichen Inhalt des Galileischen Trägheitsgesetzes vorher erkannte, der als der erste Neuere eine Landkarte in korrektem geometrischem Netze entwarf, der endlich thermometrische, hygrometrische und bathometrische Methoden angab, denen ausnahmslos die theoretische Berechtigung nicht abzusprechen ist — dieser Mann verdient ohne Zweifel

---

87) Als eigentlicher Erfinder des bathometrischen Verfahrens ist freilich wohl CUSA nicht anzusehen. Dasselbe dürfte auf die römischen Gromatiker zurückgehen, denn CURTZE (*Practica Geometriae*, ein anonymer Traktat aus dem Ende des XII. Jahrhunderts, Monatshefte f. Math. u. Phys., VIII., S. 193 ff.) teilt aus einer alten mittelalterlichen Handschrift nachstehende merkwürdige Stelle mit (S. 213): *„Nec praetermittere debemus, quin quidam etiam profunditatem stagnorum vel fluminum tali arte se metiri promittant . . .“* Ein *„globus cum ansula“* wird versenkt; *„sumptoque astrolapsu horam immissionis diligenter attendunt . . .“* Dann kommt das in die „Ansula“ eingehängte, spezifisch leichtere Anhängsel wieder an die Oberfläche. *„Quo emergente rursum horoscopum horae praesentis instans inventum diligenter notat, et quantum temporis a primo momento immissionis usque ad demersionem fluxerit, cautissima computatione distinguit.“* Neben diesem Zeitmessungsmodus, der also auf ein damals geläufiges chronometrisches Instrument bezug nimmt, kommt zu gleichem Zweck auch noch die Wasseruhr zur Verwendung. Diese Art der Tiefenmessung läfst sich aber auch früher schon nachweisen (vgl. OLLERIS, *Oeuvres de* GERBERT, *pape sous le nom de* SYLVESTRE II. *collationées sur les manuscrits, précédées de sa biographie, suivies de notes critiques et historiques,* Paris 1867, S. 446; M. CANTOR, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmefskunst; eine historisch-mathematische Untersuchung, Leipzig 1875, S. 158). Für CUSA bleibt angesichts dieser Thatsachen zweierlei als Eigentum bestehen: Erstlich hat er an dem sinkenden Körper die sehr einfache Auslösungsvorrichtung angebracht, welche er beschreibt, und zum zweiten substituiert er bei Anwendung der Wasseruhr der etwas unzuverlässigen Volumbestimmung die ungleich exaktere Wägung. — Merkwürdig ist, dafs SCHWENTER's Auslösung sich wieder mehr derjenigen der antik-mittelalterlichen Vorschrift nähert, als derjenigen, von welcher der ältere deutsche Gelehrte Gebrauch macht.

in der Geschichte der angewandten Mathematik sowohl, wie auch der Erdkunde einen Ehrenplatz. Wenn seine Thätigkeit einen esoterischen Charakter hatte, den folgenden Generationen nicht in dem Maſse zu gute kam, wie es zu wünschen gewesen wäre, so liegt dies vornehmlich an seiner dem Lehrberufe wenig günstigen äuſseren Lebensstellung, und Cusa erscheint als Schicksalsgenosse des ihm in so manchen Hinsichten ähnlichen Lionardo da Vinci, aus dessen Handschriftenbänden die Forschung auch erst mühselig die Fülle dessen herausschält, was dieser geniale Mensch erdacht und geschaffen hatte. Der Geschichte erwächst umso mehr die Pflicht, das an den Tag zu bringen, was einer früheren Zeit durch ein Zusammentreffen vielfältiger nachteiliger Umstände entgehen muſste.

ON AN ALLUSION IN ARISTOTLE TO A CONSTRUCTION FOR PARALLELS

BY

DR. T. L. HEATH,
CAMBRIDGE.

In the **Analytica priora** II c. 16 ARISTOTLE is discussing the **petitio principii**, which he illustrates by reference to the procedure adopted by certain persons, whom he does not name, in dealing with parallels. The passage in its context is as follows (p. 64^b 38 — 65^a 9).

τοῦτο [sc. *τὸ ἐν ἀρχῇ αἰτεῖσθαι*] *δ' ἔστι μὲν οὕτω ποιεῖν ὥστ' εὐθὺς ἀξιῶσαι τὸ προκείμενον, ἐνδέχεται δὲ καὶ μεταβάντας ἐπ' ἄλλα ἄττα τῶν πεφυκότων δι' ἐκείνου δείκνυσθαι διὰ τούτων ἀποδεικνύναι τὸ ἐξ ἀρχῆς, οἷον εἰ τὸ Α δεικνύοι διὰ τοῦ Β, τὸ δὲ Β διὰ τοῦ Γ, τὸ δὲ Γ πεφυκὸς εἴη δείκνυσθαι διὰ τοῦ Α· συμβαίνει γὰρ αὐτὸ δι' αὑτοῦ τὸ Α δεικνύναι τοὺς οὕτω συλλογιζομένους. ὅπερ ποιοῦσιν οἱ τὰς παραλλήλους οἰόμενοι γράφειν· λανθάνουσι γὰρ αὐτοὶ ἑαυτοὺς τοιαῦτα λαμβάνοντες, ἃ οὐχ οἷόν τε ἀποδεῖξαι μὴ οὐσῶν τῶν παραλλήλων. ὥστε συμβαίνει τοῖς οὕτω συλλογιζομένοις ἕκαστον εἶναι λέγειν, εἰ ἔστιν ἕκαστον· οὕτω δ' ἅπαν ἔσται δι' αὑτοῦ γνωστόν· ὅπερ ἀδύνατον.*

"This may be done in the form of assuming directly what is in question; but it is also possible to pass to certain other things which are naturally proved by means of it, and by means of these things to demonstrate the original proposition, as, for example, if one were to prove A by means of B, and B by means of C, when C would naturally have been proved by means of A, for in effect those who argue in this manner prove A by means of itself. This is what is done by those who think that they draw parallels; for they unconsciously assume such things as it is not possible to demonstrate if parallels do not exist. Thus in effect those who argue in this manner say that such and such a thing exists if it exists; and at this rate everything will be known per se: which is impossible."

Upon this passage the scholiast quoted on p. 47 of WAITZ's edition of the **Organon** has the following note.

ἰδίως γράφειν ἐλέγοντο οἱ ἐν γεωμετρίᾳ ἀποδεικνύντες, ἐπειδὴ καταγράφοντες ἀπεδείκνυον. λέγει δὲ ἐν ἀρχῇ αἰτεῖσθαι, ἐάν τις ὅτι παρ-

ἀλλήλοί εἰσιν ἀποδεικνύῃ διὰ τοῦ πᾶσαν εὐθεῖαν εἰς δύο εὐθεῖα ἐμπίπτουσαν τὰς ἐντὸς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν· τοῦτο γὰρ αὐτ ἂν δειχθείη, τὸ δύο ὀρθαῖς ἴσας εἶναι τὰς ἐντὸς γωνίας, διότι πα ἀλλήλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι.

"The word γράφειν was specially used of those who demonstrat things in geometry, since they were wont to demonstrate them b drawing diagrams. Aristotle then says that it is begging the ques tion if any one demonstrates that (straight lines) are parallel b means of the fact that any straight line which falls upon (the two straight lines makes the interior angles equal to two righ angles; for this fact, namely that the interior angles are equal t two right angles, would itself have been proved from the par allelism of the straight lines."

It is a small point, but I do not think that the scholiast's inter pretation of the word γράφειν is right in this particular case. It is tru that the word very commonly has the meaning here ascribed to it. Amon plenty of instances, two good ones occurring in Archimedes may be quote Thus (1) in the preface to On the Sphere and Cylinder II he speal of "such theorems and problems as are investigated (γράφεται) by mea of these theorems", and again (2) in the preface to the Quadrature (the Parabola he says, "some of those who in former times occupied then selves with geometry tried to prove (γράφειν) that it is possible to find rectilineal area equal to a given circle and to a given segment of a circle Aristotle too uses the word elsewhere in the same special sense (Topic Θ 3, 158[b] 30): "some things in mathematics also seem to be difficult (demonstration (οὐ ῥαδίως γράφεσθαι) for want of a definition ....". No withstanding the frequency of this use of γράφειν, I do not think th οἰόμενοι τὰς παραλλήλους γράφειν could quite bear the meaning "thinkir they prove parallelism"; and it seems more natural to assign to γρ φειν its ordinary signification of drawing.

Waitz interprets γράφειν in this sense and explains the passage his usual lucid way: "Admittunt hoc vitium in demonstrando qui line aequidistantes ita ducendas esse docent, ut aequales sint ii anguli, quoru aequalitas demonstrari non potest nisi ex eo quod lineae sumuntur aequ distantes."

It will be observed that Waitz speaks of the equality of th alternate angles which two parallel straight lines make with anoth straight line meeting them; the scholiast refers to the equality of th two interior angles on the same side to two right angles. The two properties of parallels however come to the same thing, each bein

easily deduced from the other; and whether construction or demonstration is implied by γράφειν is immaterial also, since, even if construction is meant, a construction in geometry is not complete unless followed by a demonstration that what was required is in fact done.

Let us now compare the construction or demonstration as thus explained with EUCLID's course of procedure in Book I of the Elements. In I. 27 he proves that, if a straight line falling on two straight lines makes the alternate angles equal to one another, the two straight lines are parallel, and in I. 28 he proves that, if a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side equal to two right angles, the two straight lines are parallel; lastly in I. 31 he draws, through a given point A, a parallel to a given straight line BC by joining A to any point D on BC and then drawing through A a straight line EA making, with AD, the alternate angle EAD equal to the alternate angle ADC. That is, if we accept the interpretation of the passage of ARISTOTLE given by the scholiast and WAITZ, ARISTOTLE must be supposed to say that the argument in the three propositions of EUCLID referred to involves a petitio principii.

But is it true that we have here a petitio principii? I think that, if the question is considered for a moment, it will be clear that there is no petitio principii whatever involved. EUCLID defines parallel straight lines as straight lines which, being in the same plane, will never meet however far they are produced in either direction. Then in I. 27, 28 he proves that, if the alternate angles are equal, or if the two interior angles on the same side are equal to two right angles, the two straight lines in question will never meet however far they are produced; whence, by the definition, they are parallel. Lastly in I. 31 he draws a straight line in accordance with the criterion of parallelism furnished by I. 27, and it follows that the straight line so drawn is parallel to the given straight line. There is not here even any assumption of a difficult Postulate such as Postulate 5; and the observation of WAITZ that the equality of the (alternate) angles cannot be proved except from the fact that parallel straight lines are taken is certainly not true, because one angle is drawn equal to the other angle (an operation which I. 23 has taught us to effect without any reference to parallels), and the equality of the angles does not depend upon the existence of parallels or upon anything else than the construction.

Further than this, I think that we may conclude from other passages of ARISTOTLE himself that he would not have regarded EUCLID's procedure as open to the charge of petitio principii. Thus in Anal. post. I 5

(74ᵃ 12), where he is showing that *ἀπόδειξις* should be not only *κατὰ παντός* but *τούτου πρώτου καθόλου*, he mentions as an instance the proof that "right angles do not meet" (by which of course he means that straight lines making the two interior angles equal to two right angles will not meet), observing that it is not enough to prove this in the case where each of the two angles is right, because this is only one way in which the two angles can be equal to two right angles, whereas the property depends on the equality of the sum of the angles to two right angles, while the individual angles may bear any ratio to one another. Can it be supposed that ARISTOTLE would have referred to the general proof in this case as a scientific *ἀπόδειξις* if he had regarded it as a petitio principii?

I think it clear therefore that the interpretation of the scholiast and WAITZ cannot be right, and that ARISTOTLE must have referred to some other construction for parallels given by some contemporary geometers. What then was this alternative construction? I think that the comment of PHILOPONUS on the passage gives a clue. PHILOPONUS does in fact allude to a construction different from EUCLID's, and, though the description of it is somewhat vague, it seems possible to make out its essential features:

> (PHILOPONUS f. CXIᵇ) *τὸ αὐτὸ ποιοῦσι καὶ οἱ τὰς παραλλήλους γράφοντες, τὸ ἐν ἀρχῇ αἰτεῖσθαι· βούλονται γὰρ παραλλήλους εὐθείας ἀπὸ τοῦ μεσημβρινοῦ κύκλου καταγράψαι δυνατόν, καὶ λαμβάνουσι σημεῖον ὡς εἰπεῖν πῖπτον περὶ τὸ ἐπίπεδον ἐκείνου, καὶ οὕτως ἐκβάλλουσι τὰς εὐθείας. καὶ ὃ ἐζήτηται, τοῦτο εἴληπται· ὁ γὰρ μὴ συγχωρῶν γίγνεσθαι τὴν παράλληλον οὐδὲ τὸ σημεῖον συγχωρήσει ἐκεῖνο.*
>
> "The same thing is done by those who draw parallels, namely begging the original question; for they will have it that it is possible to draw parallel straight lines from the meridian circle, and they assume a point, so to say, falling on the plane of that circle, and thus they draw the straight lines. And what was sought is thereby assumed; for he who does not admit the genesis of the parallel will not admit the point referred to either."

What is meant is, I think, somewhat as follows. Given a straight line and a point through which we have to draw a parallel to it, we are to suppose that the given straight line is placed in the plane of the meridian. Then we are told to draw through the given point another straight line in the plane of the meridian (strictly speaking, it should be a plane parallel to the plane of the meridian, but the idea is that, compared with the size of the meridian circle, the distance of the given point

from the given straight line is negligible). But how are we to draw, through the point, a straight line in the plane of the meridian? It is practically equivalent (says PHILOPONUS, as I read him) to assuming another very distant point in the meridian plane and joining the given point to it (the assumed point must be at a very great distance, because otherwise the distance of the given point from the given straight line would not be negligible in comparison with its distance from the assumed point). But again, how can we join a point to another point so distant that no ruler will reach to it? The objector will not grant us the existence of a point in the meridian plane which can be used to draw a straight line to. He will, in fact, assert (and rightly) that we cannot really direct a straight line to the assumed distant point except by drawing it, without more ado, parallel to the given straight line. And herein is the petitio principii.

In modern mathematical language we may put the matter thus. Assuming that two straight lines whose intersection is at an infinite distance are parallel, we are to imagine an infinitely distant point on the given straight line, and we are to draw another straight line from the given point to the infinitely distant point. We cannot in practice do this, and the infinitely distant point is of no use to us; our only method is to draw a parallel to begin with, in order, as it were, to locate the infinitely distant point. The objector will rightly say that the infinitely distant point cannot be admitted at all except as the very point in which a parallel will intersect the given straight line; and the petitio principii is obvious.

If the method of drawing parallels condemned by ARISTOTLE was substantially that above described, the idea underlying it would be curiously similar to that which suggested to the editors of certain English text-books of elementary geometry (e. g. J. M. WILSON) the direction theory of parallels. According to this theory different straight lines may have either the same or different directions, and parallels are then defined as straight lines which are not parts of the same straight line but have the same direction. But these editors give us no definition or notion of direction except with reference to straight lines which meet, and then they straightway proceed to use the term with reference to straight lines which do not meet, though they can attach no geometrical meaning to the same direction as applied to the latter class of lines. The logical fallacy could not be better exposed than it is by C. L. DODGSON in EUCLID and his modern rivals, the fact being that the whole idea of the same direction as applied to non-coincident straight lines is derived

from subsequent knowledge of the properties of parallels. And it would seem that practically ARISTOTLE had, even before EUCLID's time, exposed by anticipation the very petitio principii involved in the quite recent attempt to supplant EUCLID's argument by a theory of direction which no doubt struck its authors as being original.

BYZANTINISCHE ANALEKTEN

VON

J. L. HEIBERG
IN KOPENHAGEN.



Die Geschichte der Mathematik in Byzanz zu schreiben ist zur Zeit nicht möglich; das Material dazu ist nur zum kleinsten Teil herausgegeben, und wer in einer gröſseren Handschriftensammlung herumsucht, wird zunächst von der Menge der byzantinischen Anekdota eher erdrückt als ermuntert. Mathematischer Gewinn oder Genuſs steht dabei nicht zu erwarten, und doch muſs die Arbeit gethan werden. Nicht nur hängt von den Studien der Byzantiner die Überlieferung der alten griechischen Mathematiker ab, sondern auch die wichtigsten Probleme der Geschichte der Mathematik im Mittelalter können bei der groſsen Rolle, die Byzanz im geistigen Leben gespielt hat, erst richtig gestellt und gelöst werden, wenn die verschiedenen Einflüsse, die in Byzanz selbst sich kreuzten, klar gelegt sind. So ist die Geschichte des praktischen Rechnens, des Decimalsystems und der Zahlzeichen noch immer recht unklar, und obgleich die Byzantiner auf diesem Gebiet vielleicht mehr als sonst die Empfänger waren, verdient doch, was sich auf diese Fragen bezieht, besondere Beachtung. Ich werde daher hier etwas Material für diese Fragen vorlegen und zugleich auf einige Handschriften aufmerksam machen, die mir für die Geschichte der exakten Wissenschaft in Byzanz nicht uninteressant scheinen; vielleicht kann das dazu beitragen, daſs ein anderer die Bearbeitung dieses Gebiets in Angriff nimmt.

I.

Der Codex Phil. Gr. 65 der Wiener Hofbibliothek, von Busbecke in Konstantinopel angekauft, enthält eine groſse Sammlung byzantinischer Rechenaufgaben, ohne Zweifel vom Schreiber selbst zusammengestellt im XV. Jahrhundert. Die Zahlen sind mit den griechischen Zahlbuchstaben geschrieben, aber nach dem Decimalsystem; Null ist ɥ oder in gewissen Teilen •, also z. B. *αα* 11, βɥ 20, αɥɥɥ 1000 u. s. w. Accentuation und Orthographie ist ganz verwildert; es kommt vor *ἀριθμοιτική*, *λέγι*, *ἐκίνους*, *εὐθασέ* (= *ἔφθασε*), *γλότταν*, *ἔλαττο* (= *ἔλαττον*), *γέγοναι* (= *γέγονε*), *παρασκεβάσι* (= *παρασκευάσῃ*) u. s. w., auch rein neugriechische Formen wie *νὰ λάβει*, *νὰ εὕρεις*, und zahlreiche Fremdwörter. Ich gebe eine nähere Beschreibung.

fol. 1ᵛ—2 *περὶ τοῦ πῶς ἔστι εἰδέναι τοὺς κατὰ τὸν Νικόμαχον τελείους ὄντας ἀριθμούς*. fol. 3 leer.

fol. 4—9 *Μαγεντινοῦ γνώμη περὶ τοῦ πῶς ἐστι ὁ δέκα τέλειος ἀριθμός*. von dem Aristoteleserklärer LEON MAGENTINOS[1]) aus dem XIV. Jahrh.; in diesem Stück ist die Orthographie viel korrekter, weil der Schreiber hier eine ältere Vorlage hatte. fol. 10 leer.

fol. 11—14ʳ Kapitelindex zum folgenden Werke (242 Abschnitte). fol. 14ᵛ leer[2]).

fol. 15—126ʳ ein anonymes systematisches Rechenbuch (die vier Rechenarten mit Multiplikationstabelle, Flächenberechnungen, auch des Kreises, Volumenberechnungen von Häusern, Tonnen, Weinfässern u. s. w. mit Figuren). Der Anfang lautet in berichtigter Orthographie, aber mit den sonstigen Fehlern:

Προοίμιον.

α. Ἡ τῆς ἀριθμητικῆς μέθοδός τε καὶ μεταχείρισις δύο κανόνας περιεκτικοὺς ἔχει καὶ οὐ πλείονας· τὰ μὲν ἐλάττονα πολλαπλασιαζόμενα γίνεσθαι μεῖζον τὸ ἀποτέλεσμα, ἤπερ ἦν πρότερον, τὰ δὲ μείζονα μέρη διατεμνόμενά τε καὶ μεριζόμενα ἐλάττονα πάντως γίνεσθαι τοῦ πρώτου μεγέθους καὶ τῆς τούτου ποσότητος. τοῦτο τοίνυν οὕτως ἔχοντος πολλοὶ μὲν πολλάκις μεθόδους προχειροτάτας καὶ ἀσφαλεῖς ἐπειράσαντο ἐξευρεῖν καὶ ἐπινοῆσαι, ὥστε ἀσφαλῶς ὁμοῦ καὶ προχείρως διερευνᾶν τοῖς ἐπιζητουμένοις αὐτῶν μέρεσι, κἄντε πρὸς τὸ μεῖζον ἀφορῶσι κἄντε πρὸς τὸ ἔλαττον. ἡ πεῖρα δὲ τῶν πραγμάτων καὶ ὁ μακρὸς χρόνος ὁ πάντα δυνάμενος ἐξευρεῖν μὲν καὶ ἐμφανίζειν τὰ μήπω ὄντα, τὰ ὄντα δὲ πάλιν λήθῃ παραδοῦναι καὶ ὑποκρύψαι δυνάμενος τὰ γενόμενα ὡς μὴ ὄντα, καθῶς καὶ σοφός τις[3]) λέγει

ἅπας ὁ μακρὸς κἀναρίθμητος χρόνος
φύει τὰ κρυπτὰ καὶ φανέντα κρύπτεται,

ἔδειξεν ἡμᾶς προχειροτάτην καὶ ἀσφαλῆ μέθοδον, ἥτις εὑρίσκετο μὲν παρὰ τῶν πάντα καλῶς εἰδότων καὶ λίαν σοφωτάτων Περσῶν, πρὸς ἡμᾶς δὲ οὐκ ἔφθασε γενέσθαι γνώριμος αὕτη ἡ μέθοδος, ἀλλ' ἐπὶ πολὺ[4]) λανθάνουσα ταῖς δυτικαῖς ἡμῶν μέρεσι τέως δήλη ἐγένετο πρός τινας τῶν ἀπὸ τοῖς Ἰταλικοῖς

---

1) Der Anfang: *περὶ τῶν δέκα κατηγοριῶν τοῦ Ἀριστοτέλους πολλοί τινες καὶ διάφοροι σοφοὶ ἐξηγήσαντο, μετὰ τῶν πολλῶν δὲ καὶ διαφόρων ἐξηγητῶν ἔστι καὶ Μαγεντινός τις ὁ τὰς δέκα κατηγορίας καλῶς ἐξηγούμενος, ὅστις περὶ τοῦ πῶς ὁ δέκα ἀριθμός ἐστι τέλειος λέγει ταῦτα.* Vgl. KRUMBACHER Gesch. d. byz. Litt.² S. 431.

2) Diese 14 Blätter ohne Quaternionenzahlen; der Rest besteht aus numerierten Lagen von je 8 Blättern (Nr. 12 hat nur 4, von Nr. 20 ist nur 1 Blatt übrig).

3) SOPHOKLES, Aias 646—47, etwas ungenau citiert. *κρύπτεται* auf Rasur.

4) *πολλ* die Hds.

μέρεσι ὄντων Λατίνων· πρὸς ἐκείνους δὲ συναλλάξεως χάριν καὶ πραγματείας ἕνεκεν παραγενομένους καὶ τῇ συναναστροφῇ καὶ πυκνῇ τούτων ἐκεῖσε ἀφίξει παραγενομένους ἐγνωρίσθη καὶ δήλη ἐγένετο. οἶμαι δέ, ὅτι οὐ πλείους τῶν ἑκατὸν χρόνων εὑρέθη αὕτη ἡ μέθοδος καὶ γνώριμος γέγονε πρός τινας τῶν τοῖς Ἰταλικοῖς μέρεσι ὄντων, ἐλάνθανε δὲ πάλιν ἡμᾶς τοὺς τὴν Ἑλληνικὴν γλῶτταν ἐπισταμένους τὸ τῇδε[5]) *ἐγχείρημα. νῦν δὲ καὶ ἡμᾶς ὁ χρόνος δῆλον τοῦτο ἐποίησε. ἵνα δὲ μή, ὡς ἤδη φθάσαντες εἴπομεν, λήθῃ παραδοῦναι πάλιν ἡμᾶς ταύτην*[6]) *παρασκευάσῃ ὁ πάντα δυνάμενος χρόνος οὔπω καλῶς ἐν ἡμῖν παγεωθεῖσα καὶ πλατυνθεῖσα ἡ μέθοδος, μᾶλλον δὲ καὶ ἄγνωστος τοῖς πολλοῖς ἔτι οὖσα, ἔδοξε ἡμῖν δίκαιον εἶναι καὶ ἀναγκαῖον μάλιστα διαγράψασθαι ταύτην, ὡς ἂν καὶ τοῖς μήπω εἰδόσι καὶ βουλομένοις ταύτην μαθεῖν γνώριμος γένηται.*

β. περὶ τῶν δέκα σημείων, δι' ὧν πᾶς ψῆφος γίνεται.

δεῖ τοῦτο πρῶτον γινώσκειν, ὅτι αὕτη ἡ μέθοδός τε καὶ μεταχείρισις δέκα ψήφων μόνον σημεῖα χρᾶται καὶ οὐ πλείονα, μετὰ τῶν δέκα δὲ τούτων σημείων δυνάμεθα, εἰ δυνατόν ἐστι τὴν ἡμῶν φαντασίαν κατέχειν τὴν δηλουμένην ποσότητα, ἐξαριθμῆσαι ὡς εἰπεῖν καὶ τὴν ψάμμον αὐτήν· μέχρι τοσούτου προβαίνειν δύνανται ταῦτα τὰ δέκα σημεῖα. εἰσὶ δὲ τὰ δέκα ταῦτα σημεῖα ὅμοια, μᾶλλον δὲ ταὐτὰ τὰ τὴν κοινὴν καὶ πολιτευομένην[7]) *δηλοῦσαν ἡμῖν μέθοδον μέχρι τῶν ἐννέα σημείων, τὸ δὲ δέκατον ἔχει σημεῖον, ὅπερ εἰώθαμεν γράφειν, ὅτε βουλόμεθα σημειώσασθαι οὐδέν, ἔστι δὲ τὸ παρόν* ϥ. *ἵνα δὲ καὶ σαφέστερον ὑμῖν γένηται τὸ λεγόμενον, διαχαράττω*[8]) *σοι ταῦτα καὶ ἐκτίθεμαι, ὡς ὁρᾷς,*

α β γ δ ε ϛ ζ η ϑ ϥ

καὶ τὸ μὲν πρῶτον ἤγουν τὸ ἄλφα δηλοῖ ἕνα, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς κοινῆς καὶ πολιτευομένης μεθόδου οὕτως λαμβάνεται, τὸ δὲ βῆτα δηλοῖ δύο, καὶ ἑξῆς ὁμοίως μέχρι τῆς θῆτας, ἥτις δηλοῖ ἐννέα· τὸ δὲ ἐλάχιστον καὶ ἔσχατον πάντων σημεῖον, ὅπερ ἐστὶ τὸ παρόν ϥ, *οὐδὲν δύναται δηλῶσαι, ἀλλ' ἔστι καὶ αὐτὸ μὲν δηλωτικὸν τῶν προτιθεμένων αὐτῷ σημείων, αὐτὸ δὲ καθ' αὑτὸ τὸ* ϥ *οὐ δύναται δηλῶσαί τι· τὸ γὰρ οὐδὲν οὐδενός ἐστι δηλωτικόν. διὸ καὶ οὐδὲν γράφεται· ἐν ᾧ γὰρ τόπῳ τὸ* ϥ *εὑρίσκεται, οὐδενός ἐστι δηλωτικός, καθὼς ἀκολούθως ἐροῦμεν σαφέστερον.*

Nach der Ansicht des Verfassers ist also das Decimalsystem von den Persern (die Bezeichnung *ἀριθμοὶ Περσικοί* findet sich ebenso im Scholion

---

5) *τίδε* die Hds., vielleicht *τοιόνδε*.

6) *ταύτη* die Hds. wie oben S. 164 *ἔλαττο*. Der folgende Nom. *ἡ μέθοδος* ist absolut, wie überhaupt der Verfall der Kasussyntax sehr weit geht; das Stück ist daher auch für die Sprache interessant.

7) Geschrieben *πο̂λ τὲβομένην*.

8) Geschrieben *διὰ χαράτο*. Im folgenden *συ ταῦτα καὶ ἐκτίθειμοι*.

des Neophytos, s. Tannery Revue archéologique 1885 S. 101) erfunden und im XIV. Jahrhundert etwa nach Italien gekommen, bei den Griechen aber noch immer so gut wie unbekannt. Das Rechenbuch des Maximos Planudes hat also in den Kreisen, in denen der Verfasser lebt, wenig Erfolg gehabt. Besonders merkwürdig ist, daſs er von den indischen Ziffern keine Ahnung hat. Das Zeichen ϥ für Null bedeutet sonst 5; umgekehrt kommt 0 für 5 (wie jetzt im Türkischen) in byzantinischen Euklidscholien vor (Euclidis Op. V S. XIX). Man hat also in Konstantinopel eine Zeit lang die neue Methode mit Beibehaltung der alten Zahlenbuchstaben geübt, wohl namentlich im täglichen Verkehr.

Das Rechenbuch schlieſst fol. 126ʳ mit den Worten *διὰ τῆς πείρας σαφέστερον*. Es kommt darin auch eine Tafel der Quadratwurzeln vor, aber die meisten Rubriken sind leer gelassen. Ausgerechnet sind folgende Wurzeln (die Quadratzahlen, die bis 36 da sind, lasse ich fort):

β ἡ ῥίζα α καὶ $\frac{ε}{αβ}$

γ ἡ ῥίζα α καὶ $\frac{αα}{αε}$

(am Rande α καὶ $\frac{εζα}{ζηϥ}$)

ε ἡ ῥίζα β καὶ $\frac{αε}{ϛδ}$

ϛ ἡ ῥίζα β καὶ $\frac{ϑ}{βϥ}$

ζ ἡ ῥίζα β καὶ $\frac{γη}{εϑ}$

η ἡ ῥίζα β καὶ $\frac{εγ}{ϛδ}$

αϥ ἡ ῥίζα γ καὶ $\frac{ε}{γα}$

αα ἡ ῥίζα γ καὶ $\frac{αϑ}{ϛϥ}$

αβ ἡ ῥίζα γ καὶ $\frac{αγ}{βη}$

(am Rande γ καὶ $\frac{αηα}{γϑϥ}$)

αγ ἡ ῥίζα γ καὶ $\frac{γζ}{ϛα}$

αδ ἡ ῥίζα γ καὶ $\frac{δγ}{εη}$

αε ἡ ῥίζα γ καὶ $\frac{δη}{εε}$

αζ ἡ ῥίζα δ καὶ $\frac{α}{η}$

αη ἡ ῥίζα δ καὶ $\frac{ζ}{βϑ}$

αϑ ἡ ῥίζα δ καὶ $\frac{βϑ}{ηα}$

βϥ ἡ ῥίζα δ καὶ $\frac{αζ}{γϛ}$

βα ἡ ῥίζα δ καὶ $\frac{βα}{γϛ}$

ββ ἡ ῥίζα δ καὶ $\frac{βϑ}{δβ}$

βγ ἡ ῥίζα δ καὶ $\frac{δγ}{εδ}$

βδ ἡ ῥίζα δ καὶ $\frac{ϑ}{αϥ}$

βϛ ἡ ῥίζα ε καὶ $\frac{α}{αϥ}$

βζ ἡ ῥίζα ε καὶ $\frac{αβ}{ϛα}$

βη ἡ ῥίζα ε καὶ $\frac{αϛ}{εε}$

βϑ ἡ ῥίζα ε καὶ $\frac{ββ}{εζ}$

γϥ ἡ ῥίζα ε καὶ $\frac{βα}{δδ}$

γα ἡ ῥίζα ε καὶ $\frac{βε}{δδ}$

γβ ἡ ῥίζα ε καὶ —

γγ ἡ ῥίζα ε καὶ —

γδ ἡ ῥίζα ε καὶ —		ααα ἡ ῥίζα αϥ καὶ δε/ηδ
γε ἡ ῥίζα ε καὶ αα/αβ		ααβ ἡ ῥίζα αϥ καὶ δϑ/ηδ
γζ ἡ ῥίζα ϛ καὶ α/αβ		ααε ἡ ῥίζα αϥ καὶ ζϛ/αϥε
ϑη ἡ ῥίζα ϑ καὶ αη/βϥ		ααϑ ἡ ῥίζα αϥ καὶ βϥ/ββ
ϑϑ ἡ ῥίζα ϑ καὶ αϑ/βϥ		αβϥ ἡ ῥίζα αϥ καὶ βα/ββ
αϥα ἡ ῥίζα αϥ καὶ α/βϥ		αββ ἡ ῥίζα αα καὶ α/ββ
αϥβ ἡ ῥίζα αϥ καὶ β/βϥ		αβγ ἡ ῥίζα αα καὶ β/ββ
αϥϑ ἡ ῥίζα αϥ καὶ γζ/ηδ		αδζ ἡ ῥίζα αβ καὶ α/η
ααϥ ἡ ῥίζα αϥ καὶ δα/ηδ		

fol. 126ᵛ—140ʳ, flüchtiger und mit dunklerer Tinte geschrieben, aber doch wahrscheinlich von derselben Hand, enthält gelöste Rechenaufgaben (z. T. Gesellschaftsrechnung). Null wird hier • geschrieben (ϥ kommt nicht vor). **Anfang:**

μέϑοδος τῶν τριῶν ἁπλῆ (Regula de tri)

ἡ δὲ τῶν τριῶν μέϑοδος ὁ τῆς λογιστικῆς μάντις ἐστί, καϑῶς φησιν ὁ παλαιολόγος. ἐν ὑποδείγματος χάριν λέγωμεν, ὅτι χάσδιον πι′ ͯ ζ ἐπούλησέ τις διὰ φλουαρίων αε, τὸ δὲ καταληφϑὲν πι′ ͯ ϑ̄ πουλεῖ πρὸς ἕτερον εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν ἀναλόγως. πόσα ὀφείλει λαβεῖν;

(ζ) αε — ϑ   ͵ϛβ
ϑ   ͵α͵γ͵ε ⌊ αϑ ζ′ β/ζ
αγε   ͵ζ͵ζ
τόσον ἀξιοῖ ϑ̄ πι ͯ

Zur Probe habe ich hier die tolle Orthographie beibehalten; eine Übersetzung wird daher vielleicht nicht überflüssig sein.

Die einfache Regula de tri.

Die Regula de tri aber ist der Wahrsager der Rechenkunst, wie das alte Wort[9]) besagt. Sagen wir z. B., dafs Jemand 7 Ellen[10]) Seidenstoff

---

9) *ὁ παλαιολόγος* ist wohl so viel als *ὁ παλαιὸς λόγος*; an einen Kaiser vom Hause der Paläologen zu denken scheint mir wenig ansprechend.

10) Das Compendium ist *πίχας*, d. h. *πῆχας*.

verkauft hat für 15 Gulden[11]), den Rest aber, 9 Ellen, verkauft er an einen anderen verhältnismäfsig zu demselben Preis. Wie viel soll er dafür haben?

⑦ 15 — 9	×62	
9	×1×3×5	⌊ 19 7′ $\frac{2}{7}$
135	×7×7	

So viel verlangt er für 9 Ellen.

Es folgen Beispiele von Regula de tri mit Brüchen (*μετὰ τζακισμάτων*). fol. 140^v—142 leer. Dann ein nicht gezähltes Blatt, recto leer, verso und fol. 143^r mit der Schrift des ersten Teils getilgte Rechenexempel.

fol. 143^v—145 Bruchrechnungen; alles mit der Schrift des ersten Teils, wie überhaupt der Rest der Handschrift.

fol. 146^r leer (nur einige Zahlen mit der flüchtigen Schrift).

fol. 146^v Die 64 fortschreitenden Verdoppelungen des Schachbretts (fol. 146^v—147^r ist alles bis auf die Zahlen mit der flüchtigen Hand, aber mit der Tinte der ersten geschrieben):

Διπλασιασμὸς τοῦ ζατρικίου.

α	α	γϟ	εγϛηζϟθαβ
β	β		u. s. w.
γ	δ		⋮
δ	η	ϛδ	θγηζβαβϟγϛηεδζζεηϟη
u. s. w.			χιλιάδες μιλιούνια ἤγουν χιλιάδες χιλιάδων λυγεώνες ἤγουν χιλιάδες μιλιουνίων χιλιάδες λεγεώνων ἤγουν μιλιούνια μιλιουνίων μιλιούνια λεγεώνων χιλιάδες μιλιουνίων λεγεώνων
⋮			
βη	αγδβαζζβη		
βθ	βϛηδγεδεϛ		

fol. 147^r nach 2 Proben: *ὑψοῦται οὖν ὁ διπλασιασμὸς τῶν ϛδ^{ων} οἴκων ἐς τοσοῦτον· οὗτοι γὰρ οἱ $\overline{αθ}$ ψῆφοι καὶ τόποι δηλοῦσι θ μέρτας καὶ $\overline{γηζ}$*

11) Das Compendium scheint nur so aufgelöst werden zu können, wie ich oben geschrieben habe; sonst steht in den Rechenbeispielen gewöhnlich *φλουρία* = *φλωρία* (vgl. *πουλεῖν* = *πωλεῖν*).

κρίσπας καὶ β̅α̅β̅ γέρμας καὶ γ̅ς̅ λεγεῶνας[12]) *καὶ η̅ε̅δ̅ μιλιούνια καὶ ζ̅ζ̅ε̅ χιλιάδας καὶ ηϤη. καὶ γὰρ αἱ χιλιάδες τῶν χιλιάδων λέγονται μιλιούνια, αἱ χιλιάδες δὲ τῶν μιλιουνίων λέγονται λεγεῶνες, αἱ χιλιάδες δὲ τῶν λεγεώνων γέρμες, αἱ δὲ χιλιάδες τῶν γέρμων κρίσπες, αἱ δὲ χιλιάδες τῶν κρίσπων μέρτες, καὶ οὕτω δηλοῦται ἡ*[13]) *τῶν α̅ϑ̅ ψήφων καὶ τόπων ποσότης.*

Die Namen *γέρμες* (oder *νέρμες*), *κρίσπες* und *μέρτες* sind mir unbekannt.

fol. 147ᵛ—152ʳ Wurzelausziehung (auch Kubikwurzeln).

fol. 152ᵛ leer. fol. 153—156 *περὶ τῶν τριῶν συντρόφων τῶν ἐχόντων ἀποκενόσαι φόρτον νηώς* (so!).

fol. 157—159ʳ andere Rechnungen. fol. 159ᵛ (ult.) leer.

II.

Cod. Marcianus Gr. 333 saec. XV (beschrieben von Zanetti und bei Morelli Bibliotheca manuscr. S. 212 ff.) enthält fol. 32ʳ nach dem Schriftchen des Isaak Argyros *Περὶ εὑρέσεως τῶν τετραγωνικῶν πλευρῶν τῶν μὴ ῥητῶν τετραγώνων ἀριθμῶν* eine Tafel der Quadratwurzeln der Zahlen von 1 bis 102 in Sexagesimalbrüchen, die derselben Abhandlung folgt in cod. Vatic. Gr. 1058 fol. 32ᵛ. Ich lege den Text des Vaticanus zu Grunde (A) und bezeichne den Marcianus als B; nur schreibe ich mit B ō für Null, während A immer ϙ hat, was an das soeben besprochene Rechenbuch erinnert.

Ἔκϑεσις τετραγωνικῶν πλευρῶν τῶν ἀπὸ μονάδος καὶ ἐφεξῆς ἀριϑμῶν.

ἀριϑμοί	μ̊	α′	β′	γ′	ἀριϑμοί	μ̊	α′	β′	γ′	ἀριϑμοί	μ̊	α′	β′	γ′	
α	α	ō	ō	ō	λε	ε	νδ	νζ	νδ	ξϑ	η	ιη	κζ	ō	
β	α	κδ	να	μη	λς	ς	ō	ō	ō	ο	η	κβ	κς	κ	
γ	α	μγ	νς	ō	λζ	ς	δ	νζ	μη	οα	η	κς	ϑ	ι	5
δ	β	ō	ō	ō	λη	ς	ϑ	να	ν	οβ	η	κϑ	ζ	γ	
ε	β	ιδ	ι	ō	λϑ	ς	ιδ	μβ	ō	ογ	η	λγ	ιδ	μ	
ς	β	κς	νη	ō	μ	ς	ιϑ	κη	λ	οδ	η	λς	λε	ι	
ζ	β	λϑ	νϑ	ō	μα	ς	κδ	μδ	ε	οε	η	λϑ	λς	μη	
η	β	μϑ	μβ	ō	μβ	ς	κη	μ	ō	ος	η	μγ	ϑ	ō	10
ϑ	γ	ō	ō	ō	μγ	ς	λβ	νδ	λβ	οζ	η	μς	κϑ	λ	
ι	γ	ϑ	μδ	ō	μδ	ς	λς	νε	κα	οη	η	μϑ	νδ	ζ	
ια	γ	ιϑ	νϑ	ō	με	ς	μβ	κη	λ	οϑ	η	νγ	ιζ	λ	
ιβ	γ	κϑ	νβ	ō	μς	ς	μς	κζ	ō	π	η	νς	λϑ	κδ	
ιγ	γ	λζ	ς	ō	μζ	ς	να	κ	λα	πα	ϑ	ō	ō	ō	15

7 ιδ] corr. ex ις B.

14 κζ] A, μζ B.

11 κϑ] -ϑ e corr. B.
12 νδ] corr. ex νζ B.

12) Immer geschrieben *λεγαιῶνας*. 13) *δηλοῦνται οἱ* die Hds.

	ιδ	γ	μβ	λ	$\bar{o}$	μη	ϛ	νε	μα	μ	πβ	ϑ	γ	ιϑ	κγ
	ιε	γ	νβ	κγ	$\bar{o}$	μϑ	ζ	$\bar{o}$	$\bar{o}$	$\bar{o}$	πγ	ϑ	ϛ	λζ	λγ
	ιϛ	δ	$\bar{o}$	$\bar{o}$	$\bar{o}$	ν	ζ	δ	μα	με	πδ	ϑ	ϑ	νβ	ϑ
	ιζ	δ	ζ	κγ	$\bar{o}$	να	ζ	η	κη	κϑ	πε	ϑ	ιγ	ιζ	λε
5	ιη	δ	ιδ	λβ	$\bar{o}$	νβ	ζ	ιβ	λϑ	νδ	πϛ	ϑ	ιϛ	κε	$\bar{o}$
	ιϑ	δ	κα	λβ	$\bar{o}$	νγ	ζ	ιϛ	μζ	λδ	πζ	ϑ	ιϑ	κζ	λ
	κ	δ	κη	κ	$\bar{o}$	νδ	ζ	κ	νγ	μζ	πη	ϑ	κβ	ν	$\bar{o}$
	κα	δ	λδ	γ	$\bar{o}$	νε	ζ	κδ	νη	να	πϑ	ϑ	κϛ	ιϑ	μδ
	κβ	δ	μα	κε	$\bar{o}$	νϛ	ζ	κη	νϑ	με	Ϙ	ϑ	κϑ	ιβ	λ
10	κγ	δ	μζ	κε	$\bar{o}$	νζ	ζ	λγ	ιβ	η	Ϙα	ϑ	λγ	κϑ	$\bar{o}$
	κδ	δ	νγ	νζ	$\bar{o}$	νη	ζ	λζ	α	μ	Ϙβ	ϑ	λε	λγ	$\bar{o}$
	κε	ε	$\bar{o}$	$\bar{o}$	$\bar{o}$	νϑ	ζ	μα	λδ	μη	Ϙγ	ϑ	λη	λζ	δ
	κϛ	ε	ε	νϛ	λ	ξ	ζ	μδ	με	ιε	Ϙδ	ϑ	μα	μβ	κδ
	κζ	ε	ια	μϛ	$\bar{o}$	ξα	ζ	μη	λϛ	νδ	Ϙε	ϑ	μδ	μη	λ
15	κη	ε	ιζ	λ	$\bar{o}$	ξβ	ζ	νβ	κϛ	κϛ	Ϙϛ	ϑ	μζ	μδ	λϛ
	κϑ	ε	κγ	ϛ	$\bar{o}$	ξγ	ζ	νϛ	ιδ	ε	Ϙζ	ϑ	ν	νε	νε
	λ	ε	κη	λη	$\bar{o}$	ξδ	η	$\bar{o}$	$\bar{o}$	$\bar{o}$	Ϙη	ϑ	νγ	νη	δ
	λα	ε	λδ	δ	$\bar{o}$	ξε	η	γ	μδ	ζ	Ϙϑ	ϑ	νϛ	νϑ	μζ
	λβ	ε	λϑ	κε	$\bar{o}$	ξϛ	η	ζ	κϛ	λβ	ρ	ι	$\bar{o}$	$\bar{o}$	$\bar{o}$
20	λγ	ε	μδ	μ	κϛ	ξζ	η	ι	λγ	$\bar{o}$	ρα	ι	β	νϑ	νζ
	λδ	ε	μϑ	να	ζ	ξη	η	ιδ	κη	$\bar{o}$	ρβ	ι	ε	νη	νε

11 νζ] -ζ e corr. B. — 4 κϑ] A, μϑ B. 13 ιε] A, νε B. — 21 ε] A, β B.

fol. 88ʳ nach einigen Scholien zu Euklid hat B am Rande (vgl. Euclidis Op. V S. XIX)

α β γ δ ε ϛ ζ η ϑ
ı ρ ɰ ƨ ο ч ν ʌ 9
ἰνδικοὶ ἀριθμοί.

Da A ein nicht uninteressantes Corpus späterer Astronomie enthält (wie cod. Vatic. Gr. 1059, s. Krumbacher Gesch. d. byz. Litterat.[2] S. 626; beschrieben von Usener *Ad historiam astronomiae symbola*, Bonn 1876), mag hier eine Beschreibung stehen.

Cod. Vatic. Gr. 1058 chartac. saec. XV ist von mehreren Händen geschrieben (den Hauptschreiber nenne ich a). Sie enthält:

fol. 1—7ʳ mehrere Tafeln, u. a. Länge und Breite einiger Städte (a).

fol. 7ᵛ—8 Vergleichungstabelle verschiedener Monate (a).

fol. 9—12ʳ Kalendernotizen für die Jahre ͵ϛϡλϛ — ͵ζ (1428—92) (a).

fol. 12ᵛ—19 Ἰσαὰκ Ἀργυροῦ *μέθοδοι καὶ ἑρμηνεῖαι τῶν τε κύκλων τῶν πασχαλίων καὶ ἑτέρων ἀναγκαίων* (a).

fol. 20—21r von demselben *δεῖξις, ὅτι ἡ λ̄ τοῦ σεπτεμβρίου ἐστὶ κυρίως ἀρχὴ τοῦ ἔτους* (a).

fol. 21v—28 derselbe *τῷ Οἰναιώτῃ κυρ. Ἀνδρονίκῳ μεθόδους αἰτήσαντι λογικὰς ἐκθέσθαι ἡλιακῶν καὶ σεληνιακῶν κύκλων καὶ τῶν τούτοις ἑπομένων* (a).

fol. 29r *τὸ διορθωθὲν πασχάλιον ὑπὸ Νικηφόρου φιλοσόφου τοῦ Γρηγορᾶ, περὶ οὗ καὶ ὁ Ἀργυρὸς ἐν τῇ ἀνωτέρω ῥηθείσῃ μεθόδῳ διελάμβανε* (a).

fol. 29v—32r *τοῦ Ἀργυροῦ περὶ εὑρέσεως τῶν τετραγωνικῶν πλευρῶν τῶν μὴ ῥητῶν τετραγώνων ἀριθμῶν* (a).

fol. 32v die oben mitgeteilte Quadratwurzeltafel (a).

fol. 33—52 das Einmaleins in grofser Ausführlichkeit (a).

fol. 53—77r astronomische Tafeln (a).

fol. 77v—83 *ἔκδοσις εἰς τὸ Ἰουδαικὸν ἑξαπτέρυγον* (a).

fol. 84—86v *παράδοσις σύντομος καὶ σαφεστάτη τῆς ψηφοφορικῆς ἐπιστήμης* (a), d. h. das Rechenbuch des Nicol. Rhabdas.

fol. 86v—91r das Rechenbuch des Planudes (a), unvollständig.

fol. 91v leer. fol. 92—118v *τοῦ σοφωτάτου ἰατροῦ κυρ. Γεωργίου τοῦ Χρυσοκόκκη ἐξήγησις εἰς τὴν σύνταξιν τῶν Περσῶν ἐκτεθεῖσα πρὸς τὸν αὐτοῦ ἀδελφὸν Ἰωάννην τὸν Χαρσιανίτην* (a).

fol. 118v—128r ein anonymes astronomisches Werk in 24 Kapiteln, *inc.* (nach dem Kapitelindex) *τὸ τῶν Ἀράβων ἔτος*, *des. ὑπὸ γῆν μεσουρανοῦσαν* (a).

fol. 128v—129r ein anderes anonymes Stück mit einer Figur, *inc. ἰστέον ὅτι ἡ τέχνη*, *des. καλὸν εἰς σατράπας* (a).

fol. 129v *κανόνιον τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων ἐκτεθειμένον ἐν ἔτει ͵ςωνδ ἀπὸ κτίσεως κόσμου Περσῶν δὲ ψιε* (1346, bis hierher geht wohl also das Werk des Chrysokokkes, vgl. Krumbacher Gesch. d. byz. Litt.[2] S. 622) (a).

fol. 130—142 *παράδοσις εἰς τοὺς Περσικοὺς προχείρους κανόνας τῆς ἀστρονομίας* (wohl von Argyros, s. Krumbacher S. 623) (a).

fol. 143—145 *μέθοδος δι' ἧς προχείρως εὑρίσκομεν τοὺς Περσικοὺς ἀριθμοὺς τοῖς ἁπλοῖς ἔτεσι τῶν ἀστέρων διὰ τῶν ἔμπροσθεν γεγραμμένων κανονίων* (a).

fol. 146—236 persische astronomische Tafeln (a).

fol. 237—245 *ποίημα Σιάμψ τοῦ Πέρσου περὶ τῆς διδασκαλίας τοῦ ἀστρολάβου* (a).

fol. 246—249 *Ἰσαὰκ τοῦ Ἀργυροῦ μέθοδος περὶ εὑρέσεως συνόδων τε καὶ πανσελήνων ἀπὸ τῶν ἐν τῇ συντάξει* [Ptolem. VI 3] *κανονίων μεταποιηθεῖσα πρὸς τὸν διὰ Βυζαντίου μεσημβρινόν* (a).

fol. 250 *ψηφοφορία πανσεληνιακῆς συζυγίας ἐκλειπτικῆς ἐν ἔτει ἀπὸ κτίσεως κόσμου ͵ς϶ιη* (1410) (a).

fol. 251—253ʳ *ψηφοφορία συνοδικῆς συζυγίας γενομένης ἐν ἔτει ἀπὸ κτίσεως κόσμου ,ϛϡιζ* (1409) (a).

fol. 253ʳ—254ʳ *περὶ τοῦ ἐξ ἀναλόγου καλουμένου ἀποδεικτικοῦ τρόπου* u. s. w. (a).

fol. 254ᵛ—258ʳ astronomische Tafeln (a). fol. 258ᵛ leer.

fol. 259—260 *διὰ συντόμων εὕρεσις κατὰ τὸν ζητούμενον Ῥωμαικὸν μῆνα* u. s. w. (a; von hier an eine flüchtigere Hand aus derselben Zeit).

fol. 261—273ᵛ anonymes astronomisches Werk in vielen Kapiteln (*I περὶ τῆς εὑρέσεως τῆς τοῦ ἡλίου ἐποχῆς*), *inc. ζητοῦνται οἱ χρόνοι τῶν Περσῶν.*

fol. 273ᵛ—321ʳ ein gröfseres astronomisches Werk in vielen *μοῖραι* mit Unterabteilungen, von *Σαντζαρῆ*. fol. 321ᵛ leer.

fol. 322—331 *περὶ τῆς ἐκβολῆς τοῦ αὐθημερινοῦ τῶν Ἰχθύων ἀπὸ τῆς ἀσφαλοῦς συντάξεως τοῦ Σαντζαρῆ* (*Ἰχθύων* geschrieben ·ɔᶜc·).

fol. 332—459 astronomische Tafeln (u. a. Sternkatalog).

fol. 460—463 *μέθοδος ῆ δεῖ κατασκευάζειν ὡροσκόπον ἤτοι ἀστρολάβον.*

fol. 464—471ʳ *ἔκθεσις μεθοδικὴ τῆς τοῦ ἀστρολάβου καταγραφῆς καὶ χρήσεως.*

fol. 471ᵛ *ἡμεροεύρεσις* (römische Monatsnamen).

fol. 472 - 499ʳ *προλεγόμενα τῆς μεγάλης συντάξεως* mit Anhängen, aus einer Handschrift der Syntaxis des Ptolemaios; vgl. Boll Studien über Ptolemäus S. 128 ff. Auf den Anhang komme ich im 2. Band meiner Ausgabe der Syntaxis zurück.

fol. 499ʳ⁻ᵛ einige Rechnungen von einer dritten Hand.

III.

Einige der hier angeführten Schriften stehen auch in der ähnlichen Sammelhandschrift Marcianus Gr. 323 saec. XV (Beschreibung bei Zanetti und bei Morelli Bibliotheca manuscr. S. 203); das Rechenbuch des Planudes bricht ab an derselben Stelle (mit *ἑτέρους δέ* S. 14, 9 ed. Gerhardt); fol. 25—36ʳ steht ebenso das Einmaleins, fol. 152ᵛ—159 *κανόνια τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἑξηκοστῶν.* Aber auf dem letzten Blatte findet sich eine mir sonst nicht vorgekommene Zusammenstellung von Zahlzeichen, die ich hier folgen lasse.

fol. 487ʳ ι· ρ· μ· ϛ· ο· ϥ· ν· λ· ɔ·· ι̇· ιι· ιρ· ιμ· ιϛ· ιο· ιϥ· ιν· ιλ· ιɔ·
ι̇· ρ̇· μ̇· ϛ̇· ȯ· ϥ̇· ν̇· λ̇· ɔ: ῑ ·· ρ̈· μ̈· ϛ̈· ö· ϥ̈· ν̈· λ̈· ɔ̈:

πᾶσα πλευρὰ ἐφ' ἑαυτῆς (lies *ἑαυτὴν*) *πολλαπλασιαζομένη καλεῖται δῡ ὀνομασίαν. Δῡ δύναμις κῡ΄ κύβος Δῡ Δ΄ δυναμοδύναμις Δκῡ δυναμόκυβος κῡκῡ κυβόκυβος ↄ ἄλογος ἀριθμός ⌒ λεῖψις.*

fol. 487ᵛ sieht folgendermaſsen aus:

		ψῆφος	
I	α	Η	ρ
II	β	ΗΗ	σ
III	γ	ΗΗΗ	τ
IIII	δ	ΗΗΗΗ	υ
Π	ε	𐅅	φ
ΠI	ς	𐅅Η	χ
ΠII	ζ	𐅅ΗΗ	ψ
ΠIII	η	𐅅ΗΗΗ	ω
ΠIIII	θ	𐅅ΗΗΗΗ	ϡ
Δ	ι	χ	͵α
ΔI	ια	χχ	͵β
ΔII	ιβ	χχχ	͵γ
ΔIII	ιγ	χχχχ	͵δ
ΔIIII	ιδ	𐅆	͵ε
ΔΠ	ιε	𐅆χ	͵ς
ΔΠI	ις	𐅆χχ	͵ζ
ΔΠII	ιζ	𐅆χχχ	͵η
ΔΠIII	ιη	𐅆χχχχ	͵θ
ΔΠIIII	ιθ		
ΔΔ	κ	μ	α̈
ΔΔΔ	λ	μμ	β̈
ΔΔΔΔ	μ	μμμ	γ̈
𐅄	ν	μμμμ	δ̈
𐅄Δ	ξ	𐅇	ε̈
𐅄ΔΔ	ο	𐅇μ	ς̈
𐅄ΔΔΔ	π	𐅇μμ	ζ̈
𐅄ΔΔΔΔ	ϙ	𐅇μμμ	η̈
		𐅇μμμμ	θ̈

θ.	η.	ζ.	ς.	ε.	δ.	γ.	β.	α.
ϙ	Λ	V	ч	O	ς	ɰ	ρ	I
ϙ̇	Λ̇	V̇	ч̇	Ȯ	ς̇	ɰ̇	ρ̇	İ
ϙ̈	Λ̈	V̈	ӵ	Ö	ς̈	ɰ̈	ρ̈	Ï
ϙ⃛	Λ⃛	V⃛	ч⃛	O⃛	ς⃛	ɰ⃛	ρ⃛	I⃛
͵ϙ⃛	͵Λ⃛	͵V⃛	͵ч⃛	͵O⃛	͵ς⃛	͵ɰ⃛	͵ρ⃛	͵I⃛

ἄνευ κεντημάτων τῶν ἄνωθεν Ἰνδικαὶ μονάδες, μεθ' ἑνὸς κεντήματος τοῦ ἄνωθεν δεκάδες, μετὰ δύο κεντημάτων τοῦ (lies τῶν) ἄνωθεν ἑκατοντάδες, μετὰ τριῶν κεντημάτων τῶν ἄνωθεν χιλιάδες, μετὰ τριῶν κεντημάτων τῶν ἄνωθεν ⟨καὶ⟩ συρμάτων τοῦ (lies τῶν) ἐκ πλαγίου μυριάδες.

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
I	ρ	ɰ	ʖ	8	ч	V	Λ	ɔ
ι	ια	ιβ	ιγ	ιδ	ιε	ις	ιζ	ιη
Iō.	II.	Iρ.	Iɰ.	Iʖ.	I8.	Iч.	IV.	IΛ.
ιθ	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	
		ō		ō	ō	ō	ō	
Iɔ.	ρō.	ɰ.	ʖō.	8.	ч.	V.	Λ.	
ϙ	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	
ō	ōō	ōō	ōō	ōō	ōō	ōō	ōō	
ɔ.	I.	ρ.	ɰ.	ʖ.	8.	ч.	V.	
ω	ϡ	͵α	͵β	͵γ				
ōō	ōō							
Λ.	ɔ.	ōōōI.	ōōōρ.	ōōōɰ.				

͵δ	͵ε	͵ς	͵ζ	͵η	͵θ	α̈
ōōōʖ.	ōōō8.	ōōōч.	ōōōV.	ōōōΛ.	ōōōɔ.	ōōōōI.

β̈	δ̈	ρλγ	͵αρλε	α̈͵δρνς	μο̄ηα′
ōōōōρ.	Iρ. Iʖ.	Iʖɰ.	Iʖɰ8.	Iʖɰ8ч.	

Die Tabelle links enthält eine sonderbare Nachbildung der alten attischen Zahlzeichen. Die Darstellung der indischen Ziffern rechts (mit 0 = 5) zeigt die eigentümliche Verkennung des Positionssystems (mit dem Null über den bedeutenden Ziffern), die TANNERY im Scholion des NEOPHYTOS nachweist und bespricht Revue archéologique 1885 S. 101; neu ist die Verquickung dieses Prinzips mit dem griechischen Tausend-Strich (σύρμα) bei den Myriaden. Die letzte Zeile, wo das wirkliche Positionssystem zur Anwendung kommen soll, ist ganz verschrieben; es müfste heifsen (ō ō ō ō ϡ?, vielleicht eher ⟨ιβ⟩ ⟨ι⟩δ). ıμμ. ııμϑ. ıϡıϑч. Der Schreiber hat offenbar
ıμ· ıϡ·
die Sache nicht verstanden; auch die Schreibfehler in der Erklärung des Systems (vielleicht steht zu Anfang gar ἄνω statt ἄνευ) beweisen, dafs er das ganze nur kopiert, nicht selbst zusammengestellt hat.

Kopenhagen im Juni 1898.

ÜBER DIE AUFGABEN EINER GESCHICHTE DER PHYSIK.

VON

AUGUST HELLER
IN BUDAPEST.

In unsern Tagen ist das Interesse für die Entwicklungsprozesse auf geistigem Gebiete in stetigem Wachstume begriffen, gleichsam als verlangte der menschliche Geist sich im Spiegel der vorüberrauschenden und der längst vorübergezogenen Zeit zu betrachten. Das grofse Problem der Beziehungen des einzelnen Menschen und der ganzen Menschheit zur Natur und den einzelnen Faktoren derselben, gehört zu den fesselndsten Gegenständen, welche den Gedankengang jedes weiter ausblickenden Menschen in dauernder Weise in Anspruch zu nehmen vermag; es bildet zugleich den Inhalt von den Vorstellungen der einfachsten religiösen und mythologischen Anschauungen, gleich wie von jenen der philosophischen Systeme aller Zeiten. Hervorgebracht durch einen unbekannten Schöpfungsakt, oder hervorgegangen aus einer unabsehbar langen Entwicklungsreihe von Lebewesen und hineingestellt in einen wunderbar zusammengesetzten Mechanismus, den wir unsere Welt nennen, ausgerüstet mit mehr oder weniger geeigneten Werkzeugen zur Aufnahme der Einwirkungen der aufser unserm Organismus befindlichen Dinge und zugleich versehen mit geistigem Vermögen diese Eindrücke mit einander zu verknüpfen und daraus ein Abbild jener äufsern Welt herzustellen, hat der Mensch im Laufe der Jahrtausende seines denkenden Lebens eine lange, schier unüberblickbare Reihe von Anschauungen geschaffen, welche das Weltbild, gleichsam eine Projektion des Makrokosmos in den Mikrokosmos der menschlichen Seele, darstellen.

Den Eigentümlichkeiten der auffassenden und verbindenden Fähigkeit des sinnlichen und seelischen Organismus entsprechend, hat dieses Weltbild bei den verschiedensten Denkern in den verschiedensten Zeiträumen ähnliche Züge, wobei die Anschauungen, wie das Resultat jeden organischen Prozesses ihren in der Natur des menschlichen Geistes begründeten, gesetzmäfsigen Entwicklungsgang aufweisen.

Einen derartigen Entwicklungsgang verfolgen wir in der Geschichte einer jeden Wissenschaft. Er ist verworren, wo es sich um die Anschauungen über den geistigen Organismus handelt und um die letzten Fragen, zu denen unser Denkvermögen drängt, wenn wir somit die Thätigkeit des Denkorgans auf sich selbst zu richten beginnen. Auf diesem Gebiete haben die Bemühungen von Jahrtausende alter Gedankenarbeit zu keinem be-

friedigenden Resultate geführt, so bedeutend auch sonst die Ausbeute an weiten Blicken in das Denkreich des menschlichen Geistes sein möge, die auf diese Weise gewonnen wurde.

Anders steht es mit den Erscheinungen der Natur, die wir physikalische Erscheinungen nennen, in deren Entwicklungsgang wir allerdings einen bei weitem tieferen Einblick gewinnen können. Wohl ist auch hier die Entstehung der wissenschaftlichen Grundvorstellungen in tiefes Dunkel gehüllt. Durch ungefüge Vergleichungen sucht der menschliche Geist sich ein Bild von der Umgebung zu machen, das allerdings nur eine ganz rohe Skizze sein kann. Als ersten Schritt finden wir bei allen Naturvölkern den extremsten Anthropomorphismus, dem Menschen gleichgeartete, wenn auch direkt sinnlich nicht wahrnehmbare Wesen sind es, welchen sämtliche Erscheinungen der umgebenden Welt zugeschrieben werden. Der anthropomorphistische Zug ist ein in der menschlichen Natur tief gründender und selbst auf den höchsten Stufen der Kultur nachweisbarer. Selbst in der Naturwissenschaft der Gegenwart ist er deutlich vorhanden, wenn die fundamentalen Begriffe der Mechanik durch Empfindungen im menschlichen Organismus ausgedrückt werden, wie dies der Fall ist beim Begriffe der anziehenden und abstofsenden Kraft und beim Begriffe der geleisteten mechanischen Arbeit, wo der erste aus dem Gefühle der Muskelspannung, der zweite aus dem der Empfindung der Ermüdung hervorgegangen ist.

Dieser anthropomorphistische Zug, der in den andern Wissenszweigen ebenfalls und zwar gewöhnlich in gröfserem Mafse hervortritt, läfst sich durch die ganze Entwicklungsgeschichte der Wissenschaft verfolgen und drückt derselben sein charakteristisches Gepräge auf.

Die Anschauungen über die natürlichen Dinge hängen von der Geistesrichtung und von dem Kulturzustande eines Volkes ab. Dasjenige Volk des Altertums, dessen Entwicklung auf diesem Gebiete wir am besten kennen und welches auf diesem Gebiete durch ihre Verbindungen mit den übrigen Kulturvölkern auch das meiste bieten kann, ist das Griechenvolk, in deren Fufsstapfen in Bezug auf philosophisches Denken und Naturanschauung die Römer treten. So wunderbar entwickelt die intuitiven Erkenntnisse der grofsen Wahrheiten bezüglich unseres Seins bei den philosophischen Denkern Griechenlands sind, so kindisch und ungefüge sind ihre Vorstellungen über die einfachsten Naturerscheinungen. In ergreifenden, erhabenen Worten spricht Lucretius die starren materialistischen Anschauungen des Epikuros über die Vergänglichkeit des menschlichen Daseins aus; wo er jedoch an die Erklärung der uns umgebenden Erscheinungen herantritt, giebt er blofs urteilslose, unhaltbare Annahmen.

Nichtsdestoweniger hat die alte Welt es in der physischen Welt-

anschauung doch genug weit gebracht, am weitesten wohl in der Schaffung eines künstlich ausgedachten Weltsystemes, wenn sie auch eben in dieser Richtung auf ganz falscher Fährte war.

Viele Jahrhunderte hindurch, in welchen der menschliche Geist um andere Güter kämpfte, blieb das Erbe des dahingeschwundenen Altertums unverstanden. Es mufste erst aus seinen Trümmern wieder hervorgeholt werden, bevor vom Weiterbauen auf dem alten Fundamente wieder die Rede sein konnte.

Die Denkweise des mittelalterlichen Scholasticismus, der Denker der klösterlichen Schulen ist wohl auch in unsern Tagen nicht völlig ausgestorben, doch ist sie derzeit, wenigstens auf dem Gebiete der Erfahrungswissenschaften, gänzlich in den Hintergrund gedrängt. In ihrer Blütezeit, im Mittelalter, beschränkte sie sich zuerst auf die Theologie, deren in seiner Wesenheit unantastbarer, über jede kritische Bemerkung erhabener Inhalt den Gegenstand des Studiums bildete. Als teilweise durch Vermittlung arabischer Übersetzungen Aristoteles und andere philosophische Schriftsteller bekannt wurden, da warf sich die scholastische Wissenschaft mit grofsem Eifer auf dieses Material, um es in derselben Weise zu behandeln, wie das theologische. An dem Autor durfte nicht gerührt werden; Aristoteles' Schriften galten fast als so unantastbar heilig, als die Bücher der heiligen Schrift. Es konnte in den zwei Richtungen des Scholasticismus, dem Realismus und dem Nominalismus, nur darüber gestritten werden, ob die Denkbarkeit eines Begriffes dessen Realität beweise, oder ob dessen Nominaldefinition genüge.

Die Herrschaft des Scholasticismus ging mit dem fünfzehnten Jahrhundert zur Neige; das Ansehen desselben verblafste zur Zeit der Wiedergeburt der Wissenschaft; doch machte er seinen unheilvollen Einflufs noch fast zwei Jahrhunderte hindurch geltend. Sein Einflufs ist auch heute noch in engeren Kreisen fühlbar.

Jene Schriften, welche im Mittelalter den Gegenstand einer blofs auf das Äufsere gerichteten Behandlung bildeten, wurden bedeutend vermehrt durch die vielen aus dem griechischen Osten dazugekommenen und wurden in ganz anderer Weise benutzt. Die Wissenschaft befreite sich von der Fessel der unbedingten Autorität dieser Schriften, indem sie deren Behauptungen mit der im Wege der Erfahrung erkannten Wirklichkeit verglich und überall Kritik an denselben übte.

Die Durchforschung von überlieferten schriftlichen Aufzeichnungen, wenn diese aus einer fernabliegenden Zeit stammen, hat ihre grofsen Schwierigkeiten. Die Sprache der alten Völker verstehen wir wohl, so lange es sich um Gegenständliches handelt, um sinnliche, greifbare Dinge, um Beziehungen

und Verhältnisse der menschlichen Gesellschaft; schwer verständlich und vieldeutig wird jedoch die Sprache, wenn der vor mehr als einem Jahrtausende Schreibende mit dem sprachlichen Ausdrucke bezüglich eines der Sinnenwelt entrückten Begriffes ringt. Nehmen wir diese Schwierigkeit doch selbst in den Schriften unserer eigenen Zeit, in uns durchaus bekannten und heimischen Sprachen wahr, sobald es sich um Erörterungen und Begriffsbestimmungen handelt. Der Autor kämpft häufig selbst in seiner eigenen Muttersprache mit dem Ausdrucke seiner Gedanken, er setzt zwei oder drei ähnliche Ausdrücke um einen Begriff zu definieren und zeigt dadurch, dafs keiner dieser Ausdrücke vollständig dem Sinne des Auszudrückenden entspreche. Dieselbe Schwierigkeit wird jedermann fühlen, der ein wissenschaftliches Werk aus einer in die andere Sprache überträgt.

Die Sprachen aller Völker haben sich als Verständigungsmittel der sinnlichen Welt herausgebildet. Sobald wir den Bedürfnissen der Gedankenwelt entsprechen wollen, mufs das Wort seiner eigentlichen Bedeutung entzogen werden, es mufs zu Analogien und Gleichnissen gegriffen werden, um diesem Zwecke zu genügen. So wird unsere wissenschaftliche Sprache zu einer wahren Zeichensprache, in der das betreffende Wort schliefslich jeden Zusammenhang mit seiner ureigenen Bedeutung verliert. In der mathematischen Zeichensprache hat man sich gänzlich von der Wortsprache befreit. Kurz zu bezeichnende Zahlzeichen, Buchstaben und andere Symbole drücken Beziehungen und Verhältnisse, allerdings nur solche von Quantitäten und äufserlichen Beziehungen aus und bilden Aussprüche, welche in Worte umgesetzt entweder höchst langwierig und schwerfällig sein würden, oder mitunter gar nicht ausgedrückt werden könnten.

Die Entwicklung der Sprache als Ausdrucksmittel für die Geisteswissenschaften und die Philosophie im Allgemeinen ist ein Moment, das meiner Ansicht nach noch nicht genügend in Betracht gezogen worden. Und doch kann darüber kein Zweifel obwalten, dafs es sich hiebei um ein wichtiges, höchst interessantes Problem handelt. Wenn wir auch nicht den Satz aussprechen wollen, dafs wir in Worten denken, so ist es doch ein Etwas, eine Kluft, die zwischen dem Begriffe an sich und dem Ausdrucke desselben, seiner Bezeichnung liegt, mit der wir Urteile und Schlüsse bilden und Systeme bereiten. Dafs es nicht auf das bezeichnende Wort ankommt, das zeigt ja die Identität der abstrakten Begriffe, welche bei den Menschen verschiedener Zungen entstehen. Dafs aber das Wortzeichen, das irgend eine Sprache für einen Begriff anwendet, entschieden rückwirkend ist auf die Begriffsbildung selbst, das erfährt jeder, der — wie oben erwähnt — eine abstrakte Materie in einer Sprache ausgedrückt in einer andern Sprache auszudrücken unternimmt. Niemals wird es z. B. gelingen, Kant's „Kritik

der reinen Vernunft" in einer andern, z. B. der französischen Sprache in der vollen Prägnanz des Originals wiederzugeben; unvermeidlich wird es den fremden Hauch der fremden Sprache an sich tragen. — Um wie viel weniger dürfen wir erwarten, dafs wir in den Übersetzungen eines uns sprachlich weit abliegenden Autors, sei es ein griechischer oder gar ein indischer oder orientalischer den genauen Sinn desselben auffinden werden, den wir vielmehr oftmals nur ahnen können, wenn er sich nicht sphinxartig unserem Verständnisse entzieht.

Die Quellen für die Geschichte der Entwicklung der Wissenschaft sind im Allgemeinen viel tiefer liegend, als jene der Geschichte der Weltereignisse. Für ihre Entwicklungsvorgänge haben wir keine Chronisten, wie für die grofsen Staatsaktionen, für die äufserlichen Vorgänge in den verschiedenen Ländern der zivilisierten Welt. Im verborgenen Dunkel des Denkergehirnes entwickeln sich jene Gedanken, welche der Forscher sich über die allgemeinen philosophischen Fragen und über die Naturvorgänge bildet. Die greifbaren Resultate dieses Nachdenkens, die Entdeckungen und Erfindungen, mit deren Hilfe er sich die Naturmächte dienstbar macht, liegen so weit ab von den primären Elementen dieses Gedankenprozesses, dafs der Zusammenhang mit demselben nur schwer zu erforschen ist. So ist es denn auch erklärlich, dafs spätere Geschlechter an dem Buchstaben der Schrift hingen, dafs die Befreiung vom Worte des Autors erst nach langen gewaltigen Geisteskämpfen gelang, welche die Freiheit der Kritik, die Wertschätzung der Erfahrung und die Einsicht über das richtige Erkennen der Thatsachen durchsetzten, gegenüber von unsicheren Wahrnehmungen eines alten Beobachters, dessen Verläfslichkeit in keiner Weise zu kontrollieren ist.

Wir würden uns jedoch einer grofsen Täuschung hingeben, wenn wir glauben würden, dafs dieser Prozefs mit dem Verfalle der mittelalterlichen Scholastik endgiltig abgeschlossen sei, dafs in der neuern Zeit die Wissenschaft über die Natur unbeirrt von allen Banden ihren freien Weg wandle. Auf jedem Schritte begegnen wir dem schädlichen, die freie Entwicklung hemmenden, sie oftmals in falsche Richtung drängenden Einflufs der bewufsten und unbewufsten Autoritätsmacht. Der Entwicklungsgang der Wissenschaft ist als menschliches Erzeugnis eben allen Unvollkommenheiten unterworfen, die unserer menschlichen Natur nun einmal zu eigen sind.

Es mag als paradox erscheinen, wenn wir es aussprechen, dafs jeder grofse Denker neben dem mächtigen fördernden Einflufs auf die Entwicklung einer besseren, vollständigeren Naturerkenntnis gleichzeitig einen hemmenden, schädlichen Einflufs ausübt. Jedes System, das ein menschlicher Genius zu errichten vermag, hat sein eigenes Leben, seinen eigenen Entwicklungs-

gang, der je weiter er fortschreitet, sich um so mehr von der Wirklichkeit abwendet. Und ein solches System, hat es sich einmal im Gehirne der Nachlebenden festgesetzt, beeinflufst deren Blick, so dafs der freien Auffassung der Thatsachen Zwang angethan wird. Denn die Auffassung der Erfahrungsthatsachen ist keinesfalls eine eindeutige, wir können ein und denselben sicher beobachteten Vorgang in mancherlei Weise erörtern. Die grofsen, phantasievollen Theorien eines Descartes, welche den Beifall ihrer Zeit errungen, drängten lange Zeit hindurch die weit vollkomeneren eines Newton in den Hintergrund, so dafs des letzteren Anschauungen gleichsam verstohlen in die Schulen seines eigenen englischen Vaterlandes eingeschmuggelt werden mufsten. Und wenn wir des grofsen Newton Wirkung auf die Philosophia naturalis der nachfolgenden Perioden betrachten? — Mit seiner Entdeckung des Gesetzes der Schwerkraft hat er eine der gröfsten Entdeckungen aller Zeiten gemacht, wobei wir natürlich auch nicht aus den Augen lassen dürfen, dafs seine Entdeckung das notwendige letzte Glied einer langen Entwicklungsreihe war, das früher oder später zu Tage treten mufste. Über ein halbes Jahrhundert dauerte es, bis Newton's Lehre sämtliche Katheder erobert hatte. Von dieser Zeit an begann jene Lehre ihre Wirkung über das weite Gebiet der Physik geltend zu machen. Diese Wirkung war in vieler Beziehung wohlthätig und fördernd, doch in mancher Richtung auch irreführend und damit von hemmender Wirkung. Die schönen Untersuchungen, mit welchen Coulomb das Gesetz der Newton'schen Fernwirkung auf die anziehenden und abstofsenden Kräfte der Elektrizität und des Magnetismus anwendete, gaben diesem ganzen Zweige der Physik eine Richtung, welche später als eine nicht dem Wesen der Erscheinungen entsprechende erkannt wurde. Als Ampère ein dem Newton'schen Gesetze entsprechendes Gesetz auf die gegenseitige Wirkung der elektrischen Ströme errichtete, mufste er diesem Gewalt anthun, und im Weber'schen elektrischen Grundgesetze kam ein angreifbarer Satz zum Ausspruche, wenn dieses Gesetz in anderer Beziehung auch zu wichtigen Schlufsfolgerungen geführt hat. Die Experimentaluntersuchungen Faraday's haben uns auf diesem Gebiete ganz andere Wege gewiesen und die Schlag auf Schlag zu neuen, unerwarteten Erfahrungen führenden Untersuchungen, an der zur Zeit mehrere hundert wohlgeschulter, gelehrter Experimentatoren beteiligt sind, haben so vieles neues Erkenntnismaterial herbeigeschafft, dafs nicht blofs auf dem Gebiete der Elektrizität und des Magnetismus, sondern auf dem der ganzen Physik grofse Umwandlungen in unserer allgemeinen Naturanschauung bevorstehen.

Doch kehren wir zu Newton's Einflufs auf die Naturlehre zurück. Wenige haben, wie er auf unsere physikalischen Anschauungen einen gröfsern

Einflufs ausgeübt. Sein grofser Geist schuf Ordnung in der Lehre vom Lichte. Er wies die Zerlegung des weifsen Lichtes in farbige, einfache Lichtgattungen nach. Er stellte eine wohlgefügte Lichttheorie auf und eben diese Theorie, welche die wohl loser gefügte, jedoch auf richtiger Basis ruhende HUYGENS'sche Schwingungstheorie verdrängte, beherrschte weit über ein Jahrhundert die Anschauungen der ersten Physiker und konnte erst spät, im gegenwärtigen Jahrhundert durch unzweifelhafte Erfahrungen überwunden werden.

Nur in Kurzem weisen wir noch auf die Schwierigkeiten hin, unter welchen ROBERT MAYER's grundlegende Gedanken über die Energielehre zur Geltung gelangten. Diese kurz angedeuteten Thatsachen zeigen uns klar, dafs die Herrschaft der Autorität — wenn auch halb und halb unbewufst — in unsern Tagen ebenso vorhanden ist, als damals als man die Verbreiter neuer Ideen zum Scheiterhaufen führte. — Die Geschichte der Physik ist eben, so wie die jedes andern Wissenszweiges ein fortlaufender Kampf von verschieden gerichteten Ideenzügen.

Die Geschichte der Physik ist übrigens als eine ganz junge Wissenschaft zu betrachten, so wie ja im Allgemeinen das Bedürfnis nach der Erforschung des Entwicklungsganges unseres Wissens sich erst im Laufe unseres Jahrhundertes geltend machte. Was man vor hundert Jahren unter einer Geschichte der Physik verstand, ist von unsern gegenwärtigen Anforderungen wesentlich verschieden. Es handelte sich damals mehr um die Geschichte der Entdeckungen und Erfindungen, wobei, bei vollständigem Mangel an Kritik, die gewöhnlich auf Effekt berechneten und übertreibenden Erzählungen des Altertums und jene des leichtgläubigen Mittelalters als volle Wahrheit angenommen wurden.

Doch auch in der Entdeckungsgeschichte viel späterer Zeit, selbst in der Periode, in der wir leben, giebt es viele Unsicherheiten in dieser Beziehung. Die Zeit, in welcher eine bedeutende Entdeckung gemacht wird, die am besten befähigt wäre die Thatsachen einer strengen Kritik zu unterziehen, läfst diese unbeachtet an sich vorübergehen, da sie ja gewöhnlich die Tragweite einer neuen, anfänglich gewöhnlich in unvollständiger, nebelhafter Gestalt auftretenden Entdeckung nicht nach Gebühr zu bewerten vermag. Einer der prägnantesten, von uns jetzt am besten überblickbaren Fälle ist der eben vordem erwähnte der Entdeckung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie. Die Schwierigkeit wird durch die grofse Zahl der Teilnehmer an einer Entdeckung wesentlich vermehrt. Persönliche und nationale Interessen und Empfindlichkeiten machen die Lösung des Problemes noch bedeutend schwieriger, als wenn die Entdeckung auf einen Forscher zurückzuführen wäre. Eine ganze Reihe von Prätendenten, lebende

und tote, erscheinen auf der Bildfläche, sobald eine derartige Entdeckung zu einer bedeutenden gestempelt wird.

So sind wir in mancher Beziehung noch nicht einmal über die Vorarbeiten zu einer befriedigenden Geschichte der Physik hinaus. Das zur Verfügung stehende Material ist noch recht mangelhaft. So manches was die gröſsten Denker über ihre Ideen bezüglich ihrer physikalischen Ansichten geschrieben haben, liegt in verschiedenen Archiven begraben, die wissenschaftlichen Korrespondenzen, welche eben in der Zeit vor der Begründung der fachwissenschaftlichen Journale von so hervorragender Bedeutung sind, sind nur zum Teile herausgegeben und somit für das wissenschaftliche Publikum unzugänglich.

Wenn nun teilweise das Material für eine Geschichte der Physik auch herbeigeschafft ist, so sind wir doch von der Errichtung des eigentlichen Gebäudes noch recht weit entfernt. Bisher giebt es bloſs Versuche zur Lösung des Problems. Als den Kern desselben müssen wir die Geschichte der Entwicklung der Ideen bezeichnen, welche dieser Wissenschaft zu Grunde liegen. Es ist zu zeigen, wie der menschliche Geist sich das Problem des Weltgeschehens, soweit dies Gegenstand der Physik ist, zurechtgelegt hat, die Hypothesen und Theorien, die er ersinnen muſste, um unsere heutige Weltanschauung aufzurichten, aus den immerhin höchst unvollständigen Erfahrungen, die uns auf Grund unserer Sinneseindrücke zukommen, welche uns ja nur nach einigen beschränkten Richtungen Eindrücke zutragen, während uns ein groſser Teil der Qualitäten vermöge der Einseitigkeit unserer Organisation für ewige Zeit unzugänglich bleiben muſs.

Die Ausfüllung der so bleibenden Lücken zu bewerkstelligen, muſsten Annahmen ausgedacht werden, welche der erfahrungsmäſsigen Bestätigung absolut unzugänglich sind.

So haben diese Hypothesen und Theorien ihre eigene Geschichte. Sie entstanden, vergröſserten den Kreis ihrer Anwendbarkeit und den Grad ihrer Wahrscheinlichkeit, bis sie an die Grenze ihrer Wirksamkeit gelangt waren, worauf sie hinfällig wurden, um anderen Platz zu machen, welche inzwischen aufgesproſst und herangewachsen waren. Wir können auch mit vieler Sicherheit vorhersagen, daſs auch jene Theorien, welche jetzt zu Recht bestehen und überzeugende Kraft ausüben, seiner Zeit weiter ausgreifenden Annahmen werden Raum geben müssen.

Und was nach ihnen kommen wird, wird seine längere oder kürzere Zeit bestehen, um wieder dem unerbittlichen Lose der Vergänglichkeit anheim zu fallen. Denn jede dieser Theorien ist ein dem jeweiligen Stande der Erfahrung und der Denkweise ihrer Zeit entsprechendes Produkt, das sich zum Teile auf Annahmen stützt, welche der reicheren Erfahrung und

dem auf Grund derselben vorgeschrittenen Denkprozesse nicht mehr Stand halten kann. Die Theorien wachsen und grünen am Baume der Erkenntnis — um ERNST MACH's schönes Gleichnis zu gebrauchen — damit sie schliesslich verwelken und abfallen, nachdem sie während der Periode ihrer Lebenszeit den Erkenntnisbaum genährt und sein Wachstum gefördert haben.

Wir sollen deshalb auch jene Theorien stets in Ehren halten, wenn sie schon längst ihre Geltung eingebüfst haben, denn durch sie sind wir dahin gelangt, wo unsere Kenntnis und unsere Anschauung von der sinnlich erfafsbaren Natur sich gegenwärtig befindet, und die heute geltenden und spätere Theorien werden der Wissenschaft dieselben Dienste leisten, als dies die längst überwundenen Theorien einem früheren Stande der Wissenschaft leisteten.

Diesen Gesichtspunkt mufs eine Geschichte unserer Wissenschaft stets vor Augen halten, er mufs ein wichtiges Moment der Darstellung bilden.

In unseren Tagen vollzieht sich wieder ein Umschwung in unseren Anschauungen, wie ihn die Entwicklung unserer Wissenschaft häufig aufweist. Wir sehen die vor drei Jahrhunderten erneuerte alte Theorie der Atomistik wanken. Der Begriff der Materie, deren Existenz, trotz der vielen Schwierigkeiten, welche sie dem Philosophen sowohl, als dem Physiker bereitete, niemals angefochten worden, beginnt ihre Bedeutung für die physikalischen Grundanschauungen einzubüfsen. Als Substrat unserer Sinneseindrücke bildete sie stets die Grundlage des Geschehens, das Greifbare in der Natur. Doch schon die ersten unvollkommenen Erfahrungen wiesen auf ein sinnfälliges, ungreifbares Etwas, das nicht Materie ist und doch in sinnliche Erscheinung tritt.

Es entstand eine unüberbrückbare Kluft zwischen zwei Klassen von Naturerscheinungen; in die erste gehörten jene, bei welchen die zur Erde strebende Materie die Grundlage der Erscheinung bildete, während die zweite die Klasse der Imponderabilien vorstellt. Für die letzteren wurde das Phantom der schwerelosen Materie erfunden, welches auch aus der heutigen Physik noch nicht verschwunden ist. Die grofse Umwälzung in den Grundanschauungen der Physik, wie sie in unserm Jahrhundert sich vollzogen und sich noch gegenwärtig vollzieht, hat mit dem Licht- und Wärmestoffe, dem Fluidum der Elektrizität und des Magnetismus gründlich aufgeräumt, ja es scheint, als ob die immer mächtiger anschwellende Geistesrichtung auch selbst vor der durch Jahrtausende unangefochtenen Grundanschauung der Materie nicht zurückweiche.

Die optischen Entdeckungen zu Beginn des Jahrhunderts haben die Lichterscheinungen auf die Schwingung eines Mediums zurückgeführt, von welchem solche Eigenschaften gefordert werden, die den sämtlichen Eigen-

schaften jedweder Materie direkt widersprechen. Es giebt darinnen Schwierigkeiten, über die keine Künstelei der Theorie hinwegtäuschen kann.

Die grofse Entdeckung ROBERT MAYER's und seiner Zeitgenossen hat der Bedeutung der Materie einen rein mechanischen Begriff vorgeschoben, den der Energie, die vordem in der Mechanik als abgeleiteter Begriff bekannt war. Die wunderbaren Entdeckungen FARADAY's und in unsern Tagen die von HEINRICH RUDOLF HERTZ haben, nachdem die grofsen Entdeckungen auf dem Gebiete der strömenden Elektrizität in der ersten Hälfte des Jahrhunderts den engen Zusammenhang zwischen Elektrizität und Magnetismus gezeigt, die nahe Beziehung zwischen den optischen und den elektrisch-magnetischen Erscheinungen erwiesen, welche Beziehung FARADAY's geniale Intuition schon ein halbes Jahrhundert vorher ahnte.

Die Physik, wie die Philosophie, ja wie die ganze Wissenschaft strebt einer einheitlichen Weltanschauung zu, was jedem, der dem Entwicklungsgang mit offenen Augen folgt, auffallen mufs. Die sinnenfällige mechanische Theorie kann gegenwärtig nicht mehr als die die gesamte Physik beherrschende Theorie betrachtet werden Es besteht der Kampf zwischen der Energetik und der Atomistik, ein Kampf, der voraussichtlich noch lange andauern wird. Die Atomistik, eine in sich gefestigte, Jahrhunderte alte Theorie wird nur langsam den Platz räumen, sie hat den gewaltigen Vorzug für sich, dafs die ganze Theorie der Physik ihr auf den Leib zugeschnitten ist, während die neue Theorie der Energetik noch ihre Kinderkrankheiten nicht durchgemacht hat. Trotzdem scheint doch behauptet werden zu können, dafs die nächste Zukunft ihr gehöre.

Werfen wir nun einen Blick über die Grenzpfähle der Physik, auf ein weiteres Gebiet, das Reich des Lebens. Könnte man es wohl für möglich halten, dafs für die physikalischen und für die darüber hinausliegenden Lebenserscheinungen zwei oder mehrere von einander ganz unabhängige, ja sich vielleicht sogar widersprechende Grundanschauungen aufgestellt werden könnten? Unser Denkvermögen würde sich gegen eine derartige Zumutung energisch verwahren, da die Welt eine ist, in deren ineinandergreifenden Gebieten nur ein Gesetz herrschen kann.

Zwar wurde der Versuch gemacht die physiologischen Prozesse als physikalische und chemische aufzufassen. Die Physiologen der neuesten Zeit wissen es jedoch, wie wenig dieser Versuch gelungen ist. Die Physiologie sucht die Elemente des Organismus nicht in den physikalischen Atomen, sondern in der unsterblichen Zelle, deren geheimnisvolle Lebenserscheinungen wohl noch lange die Forschung beschäftigen werden.

Und wie soll sich die physikalische Auffassung zu den grofsen Rätseln unseres Daseins verhalten? Der krasse Materialismus hat immer zu

einer schmählichen Niederlage geführt, so oft er das unfaſsliche Weltproblem zu einem simpeln Rechenexempel machen wollte. Dieses Problem ist zu fein angelegt, um von solchen stumpfen Werkzeugen angegriffen zu werden. Es scheint, als müsse das menschliche Denken noch eine Reihe weiterer Kreise vollenden, um zu einem gröſsern Ausblick über jene Fragen zu gelangen. Die unzähligen philosophischen Systeme vieler Jahrhunderte haben bloſs die Präzisierung der vorliegenden Probleme gebracht, nicht die Lösung selbst. Die unfruchtbaren Bemühungen führen zur Überzeugung, daſs aus der sinnlich wahrnehmbaren Natur stammende Anschauungen berufen seien, neue Formen zu schaffen, aus welchen ein weiter umfassendes philosophisches System hervorgehen könnte. Die Idee von Stoff und der ihm innewohnenden Kraft tritt in der physikalischen Auffassung in den Hintergrund. In allerdings noch ziemlich schattenhaften Umrissen zeigt sich eine höherstehende Idee, besser geeignet dem nach Einheit strebenden Geiste zu genügen. Was wir als unanfechtbares Wesen der Auſsenwelt glaubten, was wir die durch direkte Sinneseindrücke wahrnehmbare Materie nannten, die wir übrigens in unverständlicher Weise mit Kräften ausstatteten, um sie aus ihrer toten Unbeweglichkeit in Wirkungsfähigkeit zu versetzen, das zeigt sich immer mehr als eine von den vielen Abstraktionen, mit denen wir in der Mechanik rechnen, eine Abstraktion, welche selbst im Gebiete der rein physikalischen Erscheinungen nicht mehr Stand hält.

Allerdings sind wir noch weit davon entfernt, unsere energetische Theorie auf die Erscheinungen des organischen und des physischen Lebens anzuwenden. Unsere bei naturwissenschaftlichen Untersuchungen mit Erfolg gebrauchten quantitativen Messungen sind schwer, gewöhnlich gar nicht in jenen Untersuchungen anzuwenden. Für die Werte festsetzende Vergleichung von Qualitäten fehlt uns gänzlich die Fähigkeit.

Unsere naturwissenschaftliche Forschung hat sich seit geraumer Zeit von der philosophischen Richtung entfernt. Es giebt mancherlei Ursachen, welche diese Trennung hervorgerufen. Einer der bedeutendsten Gründe war wohl die erfolgreiche Entwicklung der experimentellen Forschung, welche jene, die sich derselben widmeten, fast vollständig von andern Studien abzogen. Der groſse Forscher Faraday ist ein treffliches Beispiel für den ohne regelmäſsige Schulung seines Geistes, ganz auf eigener Fährte dahinschreitenden Denker, der uneingenommen von allen erlernten Systemen, sich sein eigenes System schuf.

In den letzten Jahrzehnten hat sich der Gegensatz zwischen der philosophischen und der mathematisch-experimentellen Richtung bedeutend abgeschwächt. Auf beiden Seiten macht sich die Einsicht geltend, daſs die beiden Richtungen unsers Denkens auf einander angewiesen sind. Die

philosophische Schulung kann dem experimentierenden Gelehrten nur zu Gute kommen, sie wird ihm die Wege zeigen seine Erfahrungsresultate brauchbaren Theorien einzuordnen, sie wird seinen Untersuchungen eine vernunftgemäfse Richtung geben und ihn vor ziellosen Versuchen bewahren.

Anderseits haben auch die Philosophen eingesehen, dafs sie in den Naturwissenschaften zielbewufste Forschungsweise finden und dafs die Methoden derselben oftmals auch in den Geisteswissenschaften erfolgreich verwendet werden können. Auch das konnten sie aus den Naturwissenschaften ersehen, dafs die Aufrichtung von Systemen aus reinen Begriffen zu keinem praktisch verwertbaren Resultate führe, während die vielfältigen, erfolgreichen Arbeiten auf dem Gebiete der experimentellen Psychologie ein reiches Material für die Erkenntnistheorie geliefert haben. Wir dürfen uns allerdings nicht verhehlen, dafs alle diese Untersuchungen nur eben an die Grenze der eigentlichen Psychologie reichen. Ebensowenig wie von dieser sogenannten experimentellen Psychologie, können wir von der Sozialstatistik erwarten, dafs sie die Probleme der eigentlichen Psychologie lösen werde.

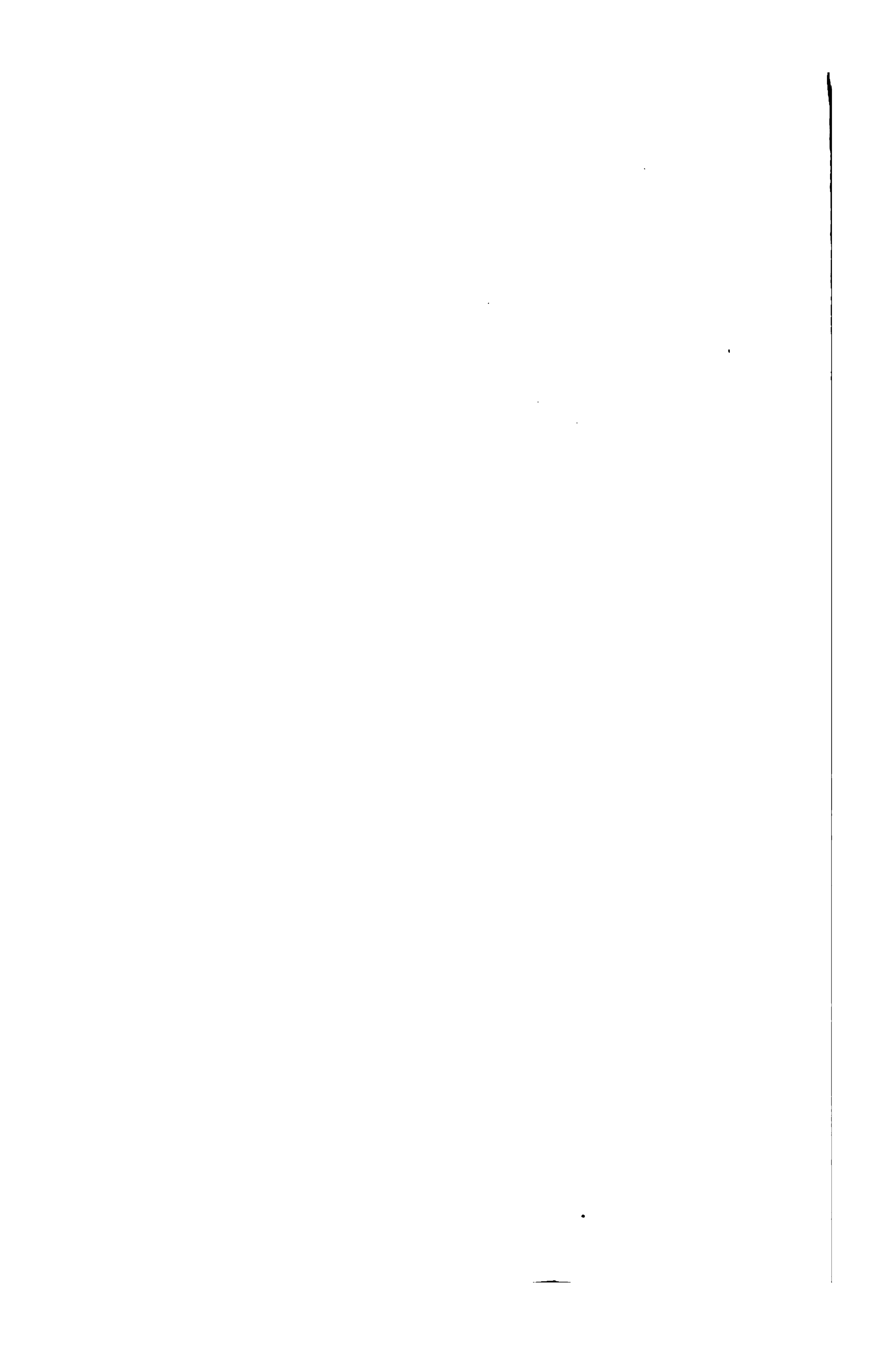
Wenn wir das eigentliche Ziel einer Geschichte der Naturwissenschaft, in erster Linie einer Geschichte der Physik und etwa der ihr enge verwandten Chemie in der Darstellung des Ideenganges der physikalischen Welterkenntnis feststellen und die zur Verfügung stehenden Quellen betrachten, so finden wir uns vor einem schier unübersehbaren, mannigfaltigen Material, dessen Bearbeitung nicht die Arbeit eines einzigen Menschen, sondern die Arbeit von Generationen erfordert. Zwar wurde schon so manches auf diesem Gebiete geleistet, doch sind das alles noch vorbereitende Arbeiten. Je weiter eine Quelle zeitlich von uns abliegt, um so gröfser die Versuchung unsere Auffassung den oft vieldeutigen, kargen Worten des alten Schriftstellers unterzulegen. Zudem ist auch vieles verloren gegangen. Und doch mufs es unser Streben sein uns eine wo möglich vollständige Kenntnis über die Gedankenwelt derjenigen grofsen Denker zu verschaffen, welche die Träger des Entwicklungsganges der wissenschaftlichen Ideen waren. Übrigens wird jede Geschichtsdarstellung mehr oder weniger subjektiv und der Denkweise der eigenen Zeit entsprechend gefärbt sein. Nur die eingehende Kenntnis der allgemeinen Denkweise jener längstvergangenen Zeit kann uns teilweise vor diesem Fehler bewahren.

Es konnte nicht meine Absicht sein, in diesem Artikel alles das ausführlich darzulegen, was ich als Aufgabe einer in jeder Hinsicht entsprechenden Geschichte der Physik halte und somit eine vollständige Aufführung der sämtlichen Requisiten zu geben. Es ist stets Sache des Schriftstellers sich seinen, den „königlichen" Weg zu finden, jedoch die Haupterfordernisse lassen sich kurz wohl in folgendem aussprechen. Die

Geschichte der Physik ist der vornehmste Teil der Entwicklungsgeschichte unseres Naturerkennens und der darauf bezüglichen Weltanschauung. Seine Hauptaufgabe ist die Entwicklungsgeschichte der physikalischen Ideen. Diese bildet gleichsam die innere Geschichte der Physik, um welche sich als äufsere die Geschichte des Lebens- und Werdeganges der Förderer und Forscher der Physik und jene der Resultate ihres Forschens und Nachdenkens herumlegt. Das Zustandekommen einer derartigen Geschichte setzt das Studium eines unabsehbaren Quellenmaterials voraus, welchem gegenüber der Geschichtsschreiber die umsichtigste Kritik in Anwendung bringen mufs.

Am besten wird der die Aufgabe gelöst haben, der imstande ist die Fäden zu entwirren, die von dem Gedankeninhalte eines jeden Forschers zu dem seiner Vorfahren und Zeitgenossen reichen, der imstande ist den hiedurch entstehenden Zug der Ideen in ihrer Entstehung, Entwicklung und Verschmelzung zu folgen und der diesen ganzen Prozefs übersehend, denselben in klarer Weise darstellen kann.

In dieser Art behandelt, stellt sich die Geschichte der Physik als ein wichtiger Bestandteil jener der Philosophie dar, wobei letztere als Geschichte des menschlichen Denkens in seiner Allgemeinheit aufzufassen ist.



WINKELMESSUNGEN
DURCH DIE HIPPARCHISCHE DIOPTRA.

VON

FRIEDRICH HULTSCH
IN DRESDEN.

Die Versuche der griechischen Astronomen kleinste Winkel zu messen haben angeknüpft an die Bestimmung des Gesichtswinkels, unter dem der Sonnendurchmesser erscheint. Vorhergegangen war eine Vergleichung des Sonnendurchmessers mit der Bahn, welche die Sonne an einem Äquinoctialtage von einem Aufgange bis zum andern zu beschreiben scheint. Das aus einem Gefäfse stetig und gleichmäfsig ablaufende Wasser wurde während der Zeit, die von dem Aufleuchten des ersten Sonnenstrahles bis zum Auftauchen der vollen Scheibe über dem Horizonte verging, in ein zweites Gefäfs, und nach vollendetem Aufgange sofort in ein drittes gröfseres Gefäfs geleitet, welches die weiter bis zum Anfang des nächsten Sonnenaufganges abfliefsende Wassermenge aufnahm[1]). Dann ergab sich, dafs das während eines Sonnenaufganges abgeflossene Wasservolumen zu dem während der übrigen Zeit bis zum nächsten Aufgang abgeflossenen Volumen sich annähernd wie 1 : 719 verhielt. Auf den von der Sonne in einem Tageslauf durchmessenen Himmelskreis kamen also 720 Sonnendurchmesser, und da der Zodiacus seit ältester Zeit in 360 Teile und jeder Teil weiter in Sechzigstel zerlegt wurde, so war der Sonnendurchmesser auf 30 Sechzigstel oder, wie wir jetzt sagen, auf 30 Minuten eines Grades annähernd bestimmt. Dieses babylonische Mafs hat wahrscheinlich schon THALES und nach ihm EUDOXOS, später sicherlich ARISTARCHOS gekannt[2]).

1) ACHILL. *isag. in* ARATI *phaenom.* 18 (Uranolog. PETAV., Paris 1630, S. 137), HERON, *περὶ ὑδρίων ὡροσκοπείων*, bei PROKLOS *ὑποτύπωσις* S. 107 f. IDELER, Über die Sternkunde der Chaldäer, Abhandl. der Berl. Akad. 1814/15, hist.-philol. Kl., S. 214. BRANDIS, Münz-, Mafs- und Gewichtswesen in Vorderasien S. 17 ff. BILFINGER, Die babylonische Doppelstunde, Progr. des Eberhard-Ludwigs-Gymn. in Stuttgart 1888 S. 21 ff. HULTSCH, Poseidonios über die Gröfse und Entfernung der Sonne, Abhandl. der Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, philol.-hist. Kl., N. F. Bd. I. Nr. 5, S. 41 f. Einer anderen Tradition folgt KLEOMEDES, *κυκλ. θεωρία μετεώρων* II 1 (S. 136—138 ZIEGLER). Nach ihm sollen die Ägypter mit Hülfe von Wasseruhren (*διὰ τῶν ὑδρολογίων*) den gröfsten Himmelskreis gleich 750 Sonnendurchmessern gefunden haben.

2) DIOG. L. I 1, 24 berichtet „nach einigen Gewährsmännern (*κατά τινας*)", dafs THALES die Sonne 720mal so grofs als den Mond angesetzt habe. Diese Angabe würde vielleicht verdächtig erscheinen, wenn die Zahl 720 nicht in nahem Zusammenhange mit der Sonnenmessung des EUDOXOS stände. Wir werden also

Das Verfahren, die Zeit des Sonnenaufgangs mit der Zeit von 24 Äquinoctialstunden durch Wasserabfluſs zu vergleichen, hat HERON in dem Werke über Wasseruhren einer Kontrolle unterzogen und dadurch vervollkommnet, daſs er einen Ablauf des Wassers in die Maſsgefäſse unter stets gleichmäſsigem Drucke vorsah und im ersten Buche seiner Schrift noch besonders zeigte, auf welche Weise diese Gleichmäſsigkeit herzustellen ist[3]). Die hauptsächliche Voraussetzung muſste dabei sein, daſs das Vorratsgefäſs immer gleichmäſsig voll blieb, mithin einen stetigen Zufluſs von oben erhielt. Da es nun nicht möglich war, diesen Zufluſs so zu regeln, daſs genau so viel Wasser von oben hinzukam als unten ablief, so blieb nur übrig, daſs der Zufluſs von oben ein wenig reichlicher war als der Abfluſs nach unten. Wenn dann am oberen Rande des Gefäſses eine entsprechend breite Abfluſsstelle vorgesehen war, über welche der geringe, von oben hinzuströmende Überschuſs stetig und ohne das Wasser im Gefäſse in unruhige

---

die Schätzung der Sonnengröſse durch THALES als eine Hypothese derselben Art ansehen wie ähnliche Vermutungen, die später bei ARCHIMEDES, bei POSEIDONIOS und anderen Philosophen sich finden. Die Durchmesser von Sonne und Mond erschienen den Alten als gleich; allein in Wirklichkeit muſste schon ein THALES die Sonne für merklich gröſser als den Mond halten. Wenn nun jedes von beiden Gestirnen in seiner Sphäre Kreise beschrieb, auf welche, nach der Lehre der Babylonier, je 720 Durchmesser zu rechnen waren, so war vielleicht die Sphäre der Sonne um so viel weiter entfernt als die des Mondes, daſs der Durchmesser der Sonne zwar dem des Mondes gleich erschien, in Wirklichkeit aber das Volumen der Sonne 720 mal so groſs als das des Mondes war. Hiernach würden auf den Sonnendurchmesser $\sqrt[3]{720} = 8{,}9628$ Monddurchmesser kommen, und diese Zahl finden wir (nach ARCHIM. aren. 1, 9 S. 248, 7 HEIBERG) in der Abrundung auf 9 Ganze bei EUDOXOS wieder. Bei diesem, dem ersten methodischen Astronomen unter den Griechen, war diese Schätzung nicht mehr eine bloſse Vermutung, sondern sie beruhte auf dem Versuche aus der Beobachtung der Sonnenfinsternisse Schlüsse zu ziehen. Wurde dann weiter der Monddurchmesser $= \frac{1}{3}$ Erddurchmesser gerechnet, so ergab sich die Sonne 27 mal so groſs als die Erde, ein Verhältnis, dem noch um ein Jahrhundert später ERATOSTHENES gefolgt sein soll. Vgl. „POSEIDONIOS über die Gröſse und Entfernung der Sonne“, Abhandl. der Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen a. a. O. S. 4 ff. — Daſs ARISTARCHOS (wie die Babylonier) den scheinbaren Sonnendurchmesser als $\frac{1}{720}$ des Zodiacus bestimmt hat, bezeugt ARCHIM. aren. 1, 10 S. 248, 19. Bei HEIBERG ist in der Übersetzung S. 249 hinter *partem septingentesimam* ausgefallen *et vicesimam*.

3) PROKLOS, *ὑποτύπωσις τῶν ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων* S. 107 HALMA: *καὶ πρῶτον, ὅπως συμβαίνει καθ' ὁμαλὴν ῥύσιν ὕδατος ἐκλαβεῖν χρόνον, λέγομεν ὅσα καὶ Ἥρων ὁ μηχανικὸς ἐν τοῖς περὶ ὑδρίων ὡροσκοπείων ἐδίδαξε.* PAPPOS bei THEO in PTOLEM. *magn. construct.* S. 262, 2: *ὅπως δὲ συμβαίνει τὸ ἐν τῷ ἀγγείῳ ὕδωρ καθ' ὁμαλὴν ῥύσιν ῥεῖν ὑπέδειξεν Ἥρων ἐν τῷ πρώτῳ τῶν ὑδρίων ὡροσκοπίων.* — Über die Aufschrift *ὑποτύπωσις* des Werkes des PROKLOS vgl. POSEID., über die Gröſse u. s. w. S. 9, Anm. 6.

Bewegung zu versetzen seitlich abträufelte, so war genügend gesorgt, daſs der Wasserdruck im Gefäſse immer der gleiche blieb.

Da PROKLOS aus der Schrift HERONS über die Wasseruhren einiges wörtlich zitiert, so möge hier eine Übersetzung dieses bisher noch wenig beachteten Fragmentes folgen[4]: „Es wird ein Gefäſs angefertigt, das ähnlich wie die Klepsydra eine Öffnung nahe dem Boden[5]) hat, durch welche das Wasser gleichmäſsig, wie es Brauch ist, herausflieſsen kann. Dieses wird so vorgerichtet, daſs der Ausfluſs beginnt, sobald die Sonne den ersten Strahl vom Horizont aus versendet, und das Wasser, das in der Zeit, bis die Sonnenscheibe über den Horizont gekommen ist, in ein mit Maſsstrichen versehenes Gefäſs[6]) abgeflossen ist, wird in besondere Verwahrung genommen[7]). Sodann wird die Wassermenge, welche später in der ganzen Zeit von Tag und Nacht bis zum nächsten Aufgange gleichmäſsig und stetig abgeflossen ist, in einem andern Gefäſse gemessen[8]), und so wird ermittelt, wie viele Mal in diesem Volumen das Volumen des während des Sonnenaufganges [in dem kleineren Gefäſse] gesammelten Wassers enthalten ist. Diese Volumina werden den Zeiten proportional sein, d. h. wie ein Volumen zu dem andern, so verhält sich die eine Zeit zur andern."

4) *Ὑποτύπωσις* S. 107 f. HALMA. Nachdem ich im J. 1898 die vorliegende Abhandlung an den Herausgeber der Festschrift abgesendet hatte, ist vor kurzem Bd. I der Werke HERONS, herausg. von W. SCHMIDT, erschienen. Daselbst findet sich das Fragment aus PROKLOS S. 456 f. und nachträglich ist S. 506 f. der Bericht des PAPPOS, auf den ich in der Berliner Philol. Wochenschr. 1899, Sp. 47 f. hingewiesen hatte, beigefügt worden.

5) Die Bestimmung „nahe dem Boden", *πρὸς τῷ πυθμένι*, fehlt bei PROKLOS, ist aber bei PAPPOS an der noch anzuführenden Stelle erhalten. Daraus geht zugleich hervor, daſs das von HERON *pneum.* I 4 gezeigte Verfahren hier keine Anwendung gefunden hat.

6) Auch diese Angabe fehlt bei PROKLOS. PAPPOS soll nach der Baseler Ausgabe geschrieben haben *εἴς τι περιεχόμενον ἀγγεῖον*. Hier fehlt vielleicht *γραμμαῖς* vor *περιεχόμενον* oder die Lesart ist in anderer Weise verderbt. Vermutlich hat HERON ein Gefäſs aus durchscheinendem Horn gemeint, auf welchem durch eingeritzte Linien die einzelnen Unterabteilungen des ganzen Maſsgefäſses unterschieden waren. Vgl. *Metrol. script.* I, S. 80. 211, 10—12. 217, 14 HULTSCH.

7) *Τὸ ῥεῦσαν ὕδωρ . . . φυλάττεται χωρίς* PROKLOS, *φυλάσσοντες τὸ ἀποῤῥεῦσαν* (*ἀποῤῥύσαν* BASIL.) *ὕδωρ* PAPPOS. Gemeint ist offenbar die Aufbewahrung in einem verschlieſsbaren Gefäſse, das bis zum nächsten Morgen in den Keller gestellt wurde, um ein Verdunsten der Flüssigkeit möglichst zu verhüten.

8) Der Abdruck bei HALMA ist arg verderbt. HERON hat wahrscheinlich geschrieben *ὁμαλῶς καὶ ἀνεκλείπτως ῥυέν, ἐν ἑτέρῳ ἀγγείῳ παραμετρεῖται*. Zu *καὶ ἀνεκλήπτως* (Verderbnis statt *ἀνεκλείπτως*) hatte ein Interpolator *καὶ ἀπαύστως* und zu *ῥέειν* (Verderbnis statt *ῥυέν*) *ῥεῦσαν* am Rande beigeschrieben und diese Glossen sind dann, die letztere noch dazu an einer falschen Stelle, in den Text gekommen.

Auch PAPPOS, der um etwa 150 Jahre vor PROKLOS schrieb, hat in seinem Kommentare zum fünften Buche der Syntax des PTOLEMAIOS die Schrift HERONS über Wasseruhren benutzt[9]), diese jedoch nur betreffs des schon erwähnten Beweises für die Gleichmäſsigkeit des Wasserabflusses zitiert.

Leider schweigt die Überlieferung über das Ergebnis der Heronischen Vergleichungen der Wasservolumina. PTOLEMAIOS hat sie nicht berücksichtigt, weil sie ihm ungeeignet erschienen, die genauen Maſse der Durchmesser von Sonne und Mond zu ermitteln[10]); doch darf man wohl vermuten, daſs die Nachprüfung des babylonischen Verfahrens durch HERON für den Sonnendurchmesser etwas über 0° 30′ bis etwa zu 0° 32′ ergeben hat.

Auf den richtigen Weg, um zur Lösung des Problems zu gelangen, hat zuerst ARCHIMEDES (aren. 1, 10 ff.) hingewiesen. Nach der Anschauung der Alten sieht unser Auge die Gegenstände durch Strahlen, die es von sich ausgehen läſst[11]). Es war nun zu versuchen, einen Punkt im Auge zu bestimmen, von welchem aus zwei Strahlen je zu einem Ende des Sonnendurchmessers gehen. Zu diesem Zwecke setzte er ein langes Richtscheit auf ein Fuſsgestell, dessen Höhe es ermöglichte, nach der Sonne, so lange sie noch dem Horizonte nahe war und ihr Licht weniger blendete[12]), über das Richtscheit hin zu blicken. Das Auge des Beobachters befand sich also am Anfange des Richtscheites und auf diesem lag (wohl in einer auf der oberen Fläche desselben längshin gezogenen flachen Rinne) eine Kugel von ungefähr gleicher Gröſse wie der Augapfel. Nach dem Ende des Richtscheites hin stand aber ein kleiner, gerader Cylinder, der in die geeignete Entfernung gebracht wurde, um die Sonne gerade zu verdunkeln. Der normale Querschnitt dieses Cylinders bildete also die Basis eines

---

9) THEO ALEX. in PTOLEM. *magn. construct.* V, Basel 1538, S. 261 f. In dieser bisher einzigen Gesamtausgabe des THEONischen Kommentars ist zu Anfang des V. Buches (S. 231) PAPPOS von Alexandria als Verfasser bezeichnet; später (S. 236) heiſst es *λείπει τοῦ Πάππου* und es folgt ein Zusatz *τοῦ Θέωνος εἰς τὸ λεῖπον τοῦ Πάππου*; aber von S. 245 an bis zum Ende des Buches findet sich unter der Aufschrift *τὸ δὲ ἑξῆς τοῦ Πάππου* wieder der Kommentar dieses Autors. Besser ist der Text des PAPPOS in dem cod. Laurent. plut. XXVIII, 18, cod. Vatic. Gr. 183 und anderen Handschriften erhalten. Bei THEON heiſst jedes einzelne Buch des Kommentars *ὑπόμνημα*, bei PAPPOS *σχόλιον*: s. meine Vorrede zu PAPPI collect. Bd. III, S. XIII f.

10) PTOLEM. synt. V 14, S. 416, 20 HEIBERG.

11) EUKL. optic. def. 1—3. DAMIANOS Schrift über Optik, herausg. von R. SCHÖNE, 1—3. GÜNTHER, Gesch. der Mathematik und der Naturwiss. im Altertum, Iw. MÜLLERS Handb. der klass. Altertumswiss. V², S. 268.

12) AREN. S. 250, 14 HEIB.: *ἐόντος* (*τοῦ ἡλίου*) *ποτὶ τῷ ὁρίζοντι καὶ δυναμένου ἔτι ἀντιβλέπεσθαι*, wo ich *ἔτι* nach Konjektur statt des überlieferten *τοῦ* schreibe.

gleichschenkligen Dreiecks, dessen Seiten die erwähnte, nahe dem Auge befindliche Kugel je an einem Punkte berührten und dann im Auge selbst sich zur Spitze des Dreiecks vereinigten. So hatte ARCHIMEDES, ohne eine eigentliche Vorrichtung zum Visieren zu kennen, eine ungefähre Darstellung des Winkels BAC zu Wege gebracht, unter welchem der Sonnendurchmesser dem Beobachter erscheint (Fig. 1). Auf eine genaue Bestimmung konnte es ihm gar nicht ankommen, da er für seine Sandrechnung nur die Begrenzung brauchte, dafs die Basis BC des Dreiecks BAC gröfser ist als die Seite des in den Kreis BC eingeschriebenen Tausendeckes, woraus er dann weiter folgerte, dafs der Winkel BAC an einem gröfsten Himmelskreise eine Sehne abteilt, die gröfser ist als die Seite des in diesen Kreis eingeschriebenen Tausendeckes. Dazu genügte es ihm, nachdem Basis und Seiten des Dreiecks BAC, ohne ihre Dimensionen zu verkleinern, auf einer Tafel eingezeichnet waren, mit dem Radius AC von C über B hinaus eine Peripherie zu beschreiben, deren Sehne die Seite des in den Kreis BC eingeschriebenen Zehnecks war. Durch fortgesetzte Halbierung erhielt er dann eine Peripherie, die 160 mal in dem ganzen Perimeter enthalten war. Hiervon nahm er einmal den vierten, ein anderes Mal den fünften Teil und fand so, dafs die Sehne des von ihm beobachteten Centriwinkels kleiner war als die Seite des eingeschriebenen 640eckes und gröfser als die Seite des eingeschriebenen 800eckes, mithin auch gröfser als die Seite des eingeschriebenen Tausendeckes.

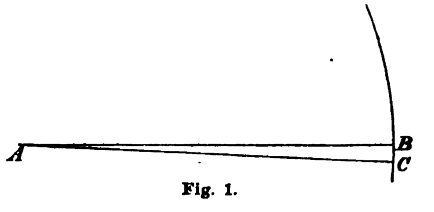


Fig. 1.

Nach der handschriftlichen Überlieferung ist die obere Grenze von ARCHIMEDES noch um ein weniges enger gezogen worden. Statt der angeführten Teile der ganzen Peripherie giebt er in der Sandrechnung Teile des Quadranten an. So würde er als obere Grenze $\frac{1}{160}$ des rechten Winkels erhalten haben; statt dessen aber hat er, wenn nicht etwa ein Fehler in die Überlieferung eingedrungen ist, den etwas geringeren Wert $\frac{1}{164}$, d. i. $\frac{1}{16}$ einer Peripherie gewählt, deren Sehne gleich der Seite des in den Kreis eingeschriebenen 41 eckes ist. Setzen wir nun statt der ARCHIMEDischen Teile $\frac{1}{164}$ und $\frac{1}{200}$ des Quadranten die entsprechenden sexagesimalen Teile des Kreises, so erhalten wir $\frac{1}{164} R = 0^0\,33'$ und $\frac{1}{200} R = 0^0\,27'$. Im Mittel war also ARCHIMEDES bei der Bestimmung zu $0^0\,30'$ stehen geblieben und im ganzen hatte er, da er einen Fehler von 3 Minuten nach beiden Seiten hin offen lassen mufste, minder genau beobachtet als die Babylonier; allein

die neu gefundene Methode, Winkel direkt mit dem Auge zu messen, sollte bahnbrechend weiter wirken.

Es galt zunächst die schwerfällige Rechnung nach den Seiten eingeschriebener Vielecke zu beseitigen und die Sehne eines jeden Kreisbogens ein für alle Mal nach ihrem Verhältnisse zum Diameter zu bestimmen. Wenn auch die Überlieferung schweigt, so spricht doch alle Wahrscheinlichkeit dafür, dafs Hipparchos es war, der zuerst diese Verhältnisse berechnet und sie in einer ähnlichen Übersicht wie später Ptolemaios in seinem *κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν*[13]) zusammengestellt hat. Er hat in einem umfänglichen Werke von zwölf Büchern, das als *πραγματεία τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν* zitiert wird[14]), über die Kreisbögen und ihre Sehnen gehandelt, er hat ferner die Theorie der Epicyklen und das gesamte Gebiet der rechnenden Astronomie in nahezu gleichem Umfange beherrscht, wie später Ptolemaios, dessen Syntax zu einem grofsen Teile auf Werken des Hipparchos fufst; er mufs also auch die Grundanschauungen und die leitenden Sätze gekannt haben, nach denen für einen jeden im Halbkreise gegebenen Winkel das Verhältnis der Sehne zum Diameter bestimmt und damit, wie sofort sich zeigen wird, die Sinusfunktion als Grundformel der Trigonometrie eingeführt wurde.

Ausgegangen ist schon Hipparchos, ähnlich wie die Neueren, vom rechtwinkligen Dreieck, nur dafs ihm jede der beiden Katheten als Sehne (*εὐθεῖα ἐν κύκλῳ*) und die Hypotenuse als Diameter galt. Wenn er also das Verhältnis einer Sehne zum Diameter ausrechnete, so hatte er damit den Sinus eines auf dieser Sehne stehenden Peripheriewinkels gefunden; er schrieb aber zu diesem Verhältnisse nicht, wie später die Inder, Araber und die Neueren, den Peripheriewinkel, sondern den entsprechenden Centriwinkel hinzu (Fig. 2).

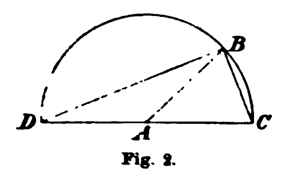


Fig. 2.

Nehmen wir an, dafs er als Beobachter, vom Standpunkte A aus, den Winkel $BAC = 36^0$ und damit zugleich die Sehne BC als Seite des in den Kreis eingeschriebenen Zehneckes bestimmt hatte. Nun hätte es am nächsten gelegen, diese und ebenso jede andere Sehne nach ihrem Verhältnis zum Radius zu bestimmen und dieser Anschauung ist er soweit gefolgt, dafs er fortan nach sexagesimalen Teilen

13) Synt. I 11 (10) S. 48 ff. Heiberg.

14) Theo in Ptolem. synt. I S. 110 Halma: *δέδεικται μὲν οὖν καὶ Ἱππάρχῳ ἡ πραγματεία τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν ἐν ιβ' βιβλίοις*. Dafs das Werk, wie Susemihl, Griech. Litteratur in der Alexandrinerzeit I S. 771 annimmt, *περὶ τῆς πραγματείας τῆς ἐν κύκλῳ εὐθειῶν* betitelt gewesen sei, ist mir nicht wahrscheinlich.

des Radius rechnete[15]). Allein der Boden des rechtwinkligen Dreiecks sollte nicht verlassen werden; es wurde also BC zur Kathete des in den Halbkreis eingeschriebenen Dreiecks, dessen Hypotenuse der Diameter ist. Nun wurde das Verhältnis $\frac{BC}{DC}$ in Einhundertzwanzigsteln des Diameters und deren sexagesimalen Teilen ausgerechnet. Es ist klar, dafs wir für dieses Verhältnis keine besondere Benennung zu suchen, sondern es einfach als Sinus zu bezeichnen hätten, wenn HIPPARCHOS und mit ihm die späteren griechischen Astronomen dasselbe als Funktion des Peripheriewinkels BDC hätten gelten lassen. Da dies aber nicht geschehen ist, müssen wir für die HIPPARCHische Funktion $\frac{BC}{DC}$ eine allgemeine Bezeichnung suchen und dürften mit $\frac{\text{chord.}}{\text{diam.}}$ das Wesentliche in kürzester Form treffen. Dieses Verhältnis erschien nun dem HIPPARCHOS, vom Standpunkte des beobachtenden Astronomen aus, als eine Funktion des Winkels, den er ins Auge fafste, d. i. des Centriwinkels BAC, und so hat er es in seinem durch PTOLEMAIOS überlieferten *κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν* aufgeführt. Wir gewinnen also für die HIPPARCHische Funktion des Gesichtswinkels ω die allgemeine Formel

$$\frac{\text{chord.}}{\text{diam.}}\,\omega = \sin.\,\frac{\omega}{2}\ ^{16)}.$$

Statt der Sechzigstel des Radius waren Einhundertzwanzigstel des Diameters eingetreten. Da nun jeder dieser Teile weiter in erste und zweite Sechzigstel zerfiel, so entstand eine kleinste Einheit im Betrage von $0^p\,0'\,1'' = \frac{1}{432\,000}$ des Diameters, deren Vielfache in den Sehnentafeln bei der *εὐθεῖα* eines jeden Winkels verzeichnet wurden[17]). Als Beispiel sei die Sehne zu $0^0\,30'$ (PTOLEM., Synt. I, S. 38 HEIB.) angeführt. Sie betrug $0^p\,31'\,25'' = \frac{1885}{432\,000}$ des Diameters $= 0{,}0043634$. Vermindern wir diesen

15) Ein *τμῆμα* hat ihm, wie später dem PTOLEMAIOS, als $\frac{1}{60}$ des Radius gegolten und diese Einheit ist dann weiter, wie aus den Tafeln der *εὐθεῖαι* und *ἑξηκοστά* bei PTOLEM. synt. I 11 (10) hervorgeht, in erste, zweite und dritte Sechzigstel zerlegt worden. Vgl. in PAULY-WISSOWA's Realencyklopädie der klass. Altertumswiss. Arithmetica Sp. 1075 f.

16) TANNERY, *Hist. de l'astronomie ancienne* S. 62, Anm. 1 bezeichnet nach üblichem Brauche mit *crd.* das Verhältnis der Sehne zum Radius und setzt demnach $crd.\ \omega = 2\,\frac{\sin.\,\omega}{2}$; allein das Verhältnis zum Diameter mufs beibehalten und rechnungsmäfsig durchgeführt werden, wenn wir das Verfahren der griechischen Astronomen uns verständlich machen wollen.

17) Vgl. ZEUTHEN, Gesch. der Mathem. S. 230 f.

Wert nur um 0,0000001, d. i. um $\frac{1}{23}$ des kleinsten von HIPPARCHOS gesetzten Teiles des Diameters, so erhalten wir mit 0,0043633 die genaue fünfstellige Ausrechnung des Sinus der Hälfte von $0^0\,30'$.

Ferner ergiebt sich, dafs die Hipparchisch-Ptolemäischen Tafeln, die von $0^0\,30'$ bis 180^0 in Abstufungen von je $\frac{1}{2}$ Grad reichen, sobald man statt eines jeden dort verzeichneten Winkels dessen Hälfte einsetzt, eine Sinustabelle darstellen, die in Abstufungen von je $\frac{1}{4}$ Grad von $0^0\,15'$ bis 90^0 sich erstreckt[18]).

In der von HIPPARCHOS verfafsten *πραγματεία τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν* sind vermutlich auch Anweisungen zum Gebrauche der von ihm erfundenen Dioptra enthalten gewesen. Er hat dort das Instrument so genau beschrieben, dafs PTOLEMAIOS es wieder herstellen und ähnliche Messungen wie jener vornehmen konnte[19]). Es war ein vier Ellen langes Richtscheit (*τετράπηχυς κανών*). Da nun PTOLEMAIOS ausdrücklich bemerkt, dafs er *διὰ τῆς ἐν τῷ κανόνι καταμετρήσεως* die HIPPARCHischen Bestimmungen der Durchmesser von Sonne und Mond kontrolliert habe, so folgt daraus zunächst, dafs das Richtscheit mit einer Skala versehen war, auf welcher gleiche Unterabteilungen des Mafsstabes verzeichnet waren. Das können keine anderen gewesen sein als die Fingerbreiten (*δάκτυλοι*), von denen nach allgemein griechischem Brauche 24 auf die Elle, mithin 96 auf den ganzen Mafsstab kamen. Als Teile des Daktylos waren wahrscheinlich Hälften, Viertel und Achtel eingetragen[20]).

Natürlich mufste, um die scheinbaren Durchmesser von Sonne und Mond messen zu können, an der Dioptra noch ein zweiter Mafsstab im

18) ZEUTHEN, Gesch. der Mathem. S. 230. 288. Vgl. auch IDELER, Über die Trigonometrie der Alten, ZACH's monatl. Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Juli 1812, S. 22 f.

19) Synt. V 14, S. 417, 1—15. 20—24 HEIB. Entsprechend dem S. 416, 23 vorhergehenden Aorist *κατῃτησάμεθα* und den S. 417, 18. 20 folgenden Imperfekten *ἠδύνατο* und *κατεφαίνετο* ist S. 417, 5 *εὑρίσκομεν* als Imperfekt zu fassen und dann Z. 13 mit HALMA *κατελαμβανόμεθα* statt des handschriftlichen *καταλαμβανόμεθα* zu schreiben. Vgl. V 2, S. 355, 1—7 *ἐτηροῦμεν* — *κατελαμβάνοντο* (pass.) — *κατελαμβανόμεθα* (med.).

20) Vgl. meine Griechische und römische Metrologie² S. 351. Dafs auch Sechzehntel, wie auf altägyptischen Mafsstäben, eingetragen waren, ist nicht wahrscheinlich, weil schon das Achtel des Daktylos auf den äufsersten Grad der Genauigkeit führte, der bei den Messungen durch die HIPPARCHische Dioptra zu erreichen war. Auch ARCHIMEDES hat in seiner Sandrechnung (2, 4 S. 264, 25) das Achtel des Daktylos als kleinstes Mafs vor sich gehabt und auf dieses 5 Durchmesser von Mohnkörnern gerechnet.

rechten Winkel zu der Skala des Richtscheites angebracht sein. Dies war, wie Ptolemaios andeutet[21]), eine kleine Platte (*πρισμάτιον*), deren halbe Breite die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks bildete, während die andere Kathete durch den Abstand des Plättchens vom Auge des Beobachters gegeben war. Das Nähere erhellt aus dem Berichte des Pappos im Kommentar zum V. Buche des Ptolemaios[22]): „Man verfertigt ein Richtscheit, das mindestens vier Ellen lang und genügend hoch und breit ist, um eine feste Unterlage zu bieten. In die obere Fläche desselben sei mitten in der Längenrichtung eine Rinne dergestalt eingeschnitten, daſs ein beilförmiger, darin eingefügter Keil leicht vor- und rückwärts geschoben werden kann (Fig. 3). Mit dem Keile sei eine kleine Platte verbunden, die im rechten Winkel zum Richtscheite steht und an einer beliebigen Stelle der Rinne verbleiben kann. Ein anderes Plättchen wird am Anfange des Richtscheites und in fester Verbindung mit diesem angebracht, das eine feine Öffnung zum Durchsehen nicht unten (unmittelbar bei dem Richtscheite), sondern in der Mitte hat, damit, wenn unser Auge durch diese Öffnung blickt, die von demselben nach dem beweglichen Plättchen ausgehenden und die [vertikalen] Ränder desselben berührenden Geraden den scheinbaren Sonnendurchmesser, indem sie dessen Endpunkte berühren, umfassen können. Wenn wir nun, bei der [in Fig. 4 angegebenen] Stellung des beweglichen Plättchens, nahe dem Horizonte den einen Endpunkt des Sonnendurchmessers über Z hinaus durch den Strahl KZ, den

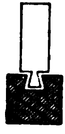


Fig. 3.

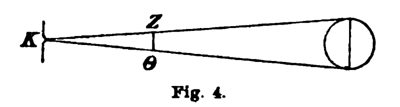


Fig. 4.

21) Synt. V 14, S 417, 20—23: *τῆς ἐν ταῖς ἐπιβολαῖς τοῦ ἐπιπροσθήσαντος πλάτους ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ κανόνος τὸ ἀπὸ τῆς ὄψεως ἐπὶ τὸ πρισμάτιον, πλείσταις οὔσαις, παραμετρήσεως.* Die richtige Lesart *πλείσταις οὔσαις* (statt *πλείστης οὔσης*) ist in der Handschrift D und bei Pappos erhalten; sie deutet auf die verschiedenen Stellungen hin, die das Plättchen bei verschiedenen Beobachtungen einnimmt. Jede von diesen vielen Stellungen bedingt eine besondere, aus den oben angeführten Elementen abgeleitete Messung (*παραμέτρησις*). Die ursprüngliche Niederschrift des Ptolemaios ist auch V 1, S. 351, 13 sowohl in D als bei Pappos überliefert (vgl. Liter. Centralbl. 1898, Sp. 1899 f.), und daraus folgt weiter, daſs I S. 64, 13 nach den Spuren in D *τετράγωνον τῇ περιφερείᾳ* zu schreiben ist.

22) Theo in Ptolem. *magn. construct.* S. 262. Meine freier gehaltene Übersetzung giebt das Wesentliche wieder, berichtigt einiges stillschweigend und läſst weg, was nicht notwendig für die zu den Figuren 4—6 gegebenen Erklärungen erforderlich ist. Pappos selbst hat ein vollständiges Bild der Dioptra beigefügt. Die vordere Platte mit der Visieröffnung K hat er durch $E\Xi$, das bewegliche Plättchen durch $\Gamma\Delta$ und dessen Breite durch ΓH, bez. $PN\Delta$, die obere Fläche des Richtscheites durch AB und die längshin eingegrabene Rinne durch ΠO bezeichnet.

andern Endpunkt aber über Θ hinaus durch den Strahl $K\Theta$ erblicken, so werden wir sagen, dafs der Winkel $ZK\Theta$ den Sonnendurchmesser umfafst. Wenn aber der letztere nicht durch die Gerade $K\Theta$, sondern allein durch KZ erblickt werden sollte, so wird man das Plättchen entfernter vom Auge einstellen müssen (Fig. 5), damit der Winkel kleiner werde und der von der Öffnung K nach den Rändern des Plättchens gehende Gesichtswinkel den Sonnendurchmesser umfasse, wie es bei dem Winkel $\varLambda KM$ zutrifft. Wenn aber der eine Endpunkt des Sonnendurchmessers durch die Gerade $K\varLambda$ erblickt wird, der andere Endpunkt aber über die Gerade KM hinausfällt, sodafs ein Teil des Sonnenkörpers über die Breite des Plättchens hinaus sichtbar wird, mufs man wiederum das Plättchen bewegen und es näher dem Auge in ruhige Lage bringen (Fig. 6), bis ein gröfserer Winkel, der den Sonnendurchmesser umfafst, wie es bei $\varLambda' KM'$ zutrifft, hergestellt ist."

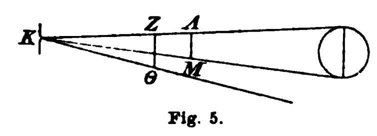


Fig. 5.

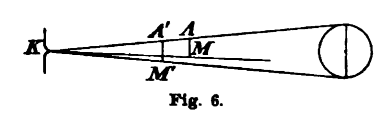


Fig. 6.

Wenn wir nun in dem gleichschenkligen Dreieck $ZK\Theta$ (Fig. 4) aus K die Normale zu $Z\Theta$ ziehen, die in Γ auftrifft, und den Sonnendurchmesser mit $\varDelta E$ bezeichnen (Fig. 7), so ist es klar, dafs sowohl $Z\Gamma$, d. i. die halbe Breite des beweglichen Plättchens, als auch $K\Gamma$, deren Länge von der Skala des Richtscheites abgelesen wird, gegeben sind. Demnach ist auch KZ und das Verhältnis $\frac{Z\Theta}{2KZ}$, d. i. die Hipparchische Funktion $\frac{\text{chord.}}{\text{diam.}}$ des Winkels K, gegeben. Da wir nun, wie bald sich zeigen wird, wenigstens **eine** Messung des Monddurchmessers durch Hipparchos kennen, und daraus auf andere Messungen annähernd schliefsen können, so sind wir im Stande, die Breite des den Mond oder die Sonne verdeckenden Plättchens zu bestimmen.

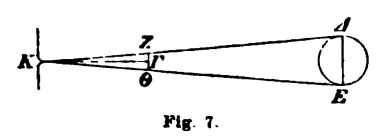


Fig. 7.

Zuerst finden wir, dafs dieser Deckstreifen **weniger breit** als $\frac{7}{8}$ Daktylos war. Denn wenn ein Streifen von dieser Breite am Ende des Richtscheites, d. i. 96 Daktylen vom Auge entfernt, eingestellt war, so verdeckte er einen Bogen von nahezu $0^{\circ}\,31'\,18''$. Das war dann der **kleinste** Winkel, der auf der Dioptra gemessen werden konnte; allein das Instrument mufste auch auf kleinere Winkel bis herab zu $0^{\circ}\,30'$ eingerichtet sein, damit durch unmittelbare Messung festgestellt werden konnte, dafs der Sonnendurchmesser gröfser sei, als die Babylonier ihn angenommen hatten.

Zweitens ergiebt sich, dafs der Deckstreifen breiter als $\frac{5}{8}$ Daktylos gewesen ist. Denn wenn ein Streifen von dieser Breite auf 72 Daktylen Entfernung eingestellt war, so verdeckte er einen Bogen von ungefähr $0^0 29' 50''$; HIPPARCHOS hätte also, um Winkel über $0^0 30'$ zu messen, statt einer Dioptra von vier Ellen nur eine solche von drei Ellen gebraucht.

Also hatte der Deckstreifen eine Breite zwischen $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{8}$ Daktylos. Nehmen wir das Mittel $= \frac{3}{4}$ Daktylos, so verdeckte ein Streifen von dieser Breite, wenn er auf 86 Daktylen eingestellt war, einen Bogen von ungefähr $0^0 30'$, und wenn auf 76 Daktylen, einen Bogen von nahezu $0^0 34'$. Mithin vollzogen sich die für HIPPARCHOS in Betracht kommenden Messungen innerhalb der vierten, auf der Skala eingetragenen Elle in einer Entfernung zwischen drei Ellen vier Daktylen und drei Ellen 14 Daktylen. Das war offenbar eine zweckmäfsige Einrichtung des Instrumentes, und es kommt dabei auch noch in Betracht, dafs die Streifenbreite von $\frac{3}{4}$ Daktylos gleich $\frac{1}{32}$ der Elle war, mithin dieses kleine Mafs durch fortschreitende Halbierung der Elle möglichst genau dargestellt werden konnte.

Eine sichere Zurückführung des von HIPPARCHOS angewendeten Ellenmafses auf neueres Mafs ist leider nicht möglich, da über die verschiedenen griechischen Längenmafse zwar viele Vermutungen aufgestellt, aber einwandfreie Ergebnisse bisher nicht gewonnen sind. Wir begnügen uns daher mit der Umgrenzung, dafs die HIPPARCHische Elle zwischen den Mafsen der königlichen ägyptischen und der römischen Elle, d. i. zwischen 0,525 und 0,4436 m, gestanden hat. Das Richtscheit mafs daher zwischen 2,10 und 1,77 m. Ein Daktylos der Skala ist zwischen 21,9 und 18,5 mm und die Breite des Deckstreifens zwischen 16,4 und 13,9 mm anzusetzen.

Nach PTOLEMAIOS[23]) sind von HIPPARCHOS auf seiner Dioptra „sehr viele" verschiedene Stellungen des Deckstreifens beobachtet und daraus verschiedene Werte für die scheinbaren Sonnen- und Monddurchmesser berechnet worden. Doch ist uns von den Ergebnissen dieser Beobachtungen nur eines zahlenmäfsig überliefert. Er hat gefunden, dafs der Durchmesser des Mondes nahezu 650 mal in dem Kreise enthalten ist, den dieses Gestirn scheinbar beschreibt[24]). Damit war offenbar ein Mittel aus ver-

---

23) Synt. V 14, S. 417, 20—23. Eine erklärende Übersetzung der Stelle wird später folgen.

24) PTOLEM. synt. IV 9 (8) z. Anf.: *συγχρώμενοι κατὰ τὸν Ἵππαρχον τῷ τὴν σελήνην ἑξακοσιάκις μὲν καὶ πεντηκοντάκις ἔγγιστα καταμετρεῖν τὸν ἴδιον κύκλον.* Diese Angabe wiederholt PAPP. synag. VI, S. 556, 14 HULTSCH.

schiedenen Messungen gemeint, je nachdem der Mond näher oder ferne Erde stand. Die Division von 360° durch 650 führt auf einen mitt Monddurchmesser von 0° 33′ 14″ (genauer 0° 33′ 13,85″), und dieses Res ist um so beachtenswerter, als PTOLEMAIOS, der allerlei Einwendungen gegen erhebt, doch durch seine eigenen Messungen zu einem nur unn lich abweichenden Ergebnisse gekommen ist; denn nach ihm hat der M durchmesser in der Erdferne 0° 31′ 20″[25]), in der Erdnähe 0° 35′ 20 mithin im Mittel 0° 33′ 20″ betragen. Da nun die PTOLEMÄischen An über die wirklichen Werte des scheinbaren Monddurchmessers = 29′ für die Erdferne und 32′ 51″ für die Erdnähe merklich hinausgehen, HIPPARCHische Mittel aber relativ etwas genauer ist als das PTOLEMÄisch so darf man annehmen, dafs auch die Einzelmessungen des HIPPAR(je nach der gröfseren oder geringeren Entfernung des Mondes von Erde, so genau ausgefallen sind, als es nur immer bei der Unvollkom heit seiner Dioptra möglich war. Wie er bei der Beobachtung des sichtswinkels, unter welchem der mittlere Monddurchmesser erscheint, das wirkliche Mafs um 2′ 6″ hinausgekommen war, so mögen auch übrigen Messungen mit einem Fehler von reichlich zwei Minuten beh gewesen sein.

Das ist leicht erklärlich. Denn von einer Abblendung der So oder Mondstrahlen durch farbiges Glas verlautet nichts, und wenn auch die Visieröffnung möglichst fein herstellte und zur Beobachtun Sonne, wie ARCHIMEDES es vorgeschrieben hatte, die Zeit ihres Auf wählte, während man in die Mondscheibe, auch wenn sie hoch am Hi stand, mit geringerer Blendung blicken konnte, so mufste doch die Sc heit des Deckstreifens merkliche Fehler bei den Beobachtungen veranl Wenn also in dem einen uns bekannten Falle HIPPARCHOS den Ges winkel nur um · 2′ 6″, d. i. um etwa $\frac{1}{16}$ des genauen Betrages, zu genommen hatte, so war das weder an sich noch im Vergleich mit PTOLEMÄischen Messungen ein ungünstiges Ergebnis.

So kehren wir noch einmal zu dem Ansatze des mittleren M durchmessers auf 33′ 14″ zurück und behaupten, dafs HIPPARCHOS, nach seinen Beobachtungen des Mondlaufes recht wohl wufste, wan Mond in mittlerer Entfernung von der Erde sich befand, durch seine Di einen von jenen 33′ 14″ nicht weit entfernten Wert unmittelbar beoba

25) PTOLEM. V 14, S. 421, 4 f vgl. mit 417, 24—418, 5. PAPP. synag. S 17—19.

26) PAPP. S. 556, 19.

27) Mittel des Monddurchmessers nach den neueren Beobachtungen = 3 nach HIPPARCHOS = 33′ 14″, nach PTOLEMAIOS = 33′ 20″.

hat. Dazu mufste zunächst ein für kleinste Winkelmessungen geeigneter Ausschnitt einer Sehnentafel vorbereitet sein.

Zu einem Winkel von $0^0 30'$ gehörte, wie vor kurzem gezeigt wurde, die Funktion $\frac{\text{chord.}}{\text{diam.}} = 0^p\,31'\,25''$, und zwischen $0^0 30'$ und 1^0 entsprach dem Zuwachs von je 1 Minute ein Mehr von $0^p\,1'\,2''\,50''' = 0{,}0001454$, d. h. die Veränderungen der Hipparchischen Sehnenfunktion wurden proportional den Veränderungen der Bogen gerechnet[28]). Daher dürfen auch die je einer Bogensekunde entsprechenden Veränderungen der Funktion $\frac{\text{chord.}}{\text{diam.}}$ als 60stel von $0^p\,1'\,2''\,50'''$ gerechnet werden, wie der folgende Ausschnitt einer Sehnentafel für die Winkel von 30′ bis 34′ es ausweist:

Winkel	Funktion $\frac{\text{chord.}}{\text{diam.}}$	Interpolation
0°30′ 0″	$0^p\,31'\,25'' = 0{,}0043633$	Differenz für je 1 Sekunde
0°30′ 30″	$0^p\,31'\,56'' = 0{,}0044360$	$0^p\,0'\,1''\,2{,}833''' = 0{,}000\,002\,424$
0°31′ 0″	$0^p\,32'\,28'' = 0{,}0045087$	
0°31′ 30″	$0^p\,32'\,59'' = 0{,}0045815$	
0°32′ 0″	$0^p\,33'\,31'' = 0{,}0046542$	
0°32′ 30″	$0^p\,34'\,2'' = 0{,}0047269$	
0°33′ 0″	$0^p\,34'\,33'' = 0{,}0047996$	
0°33′ 30″	$0^p\,35'\,5'' = 0{,}0048723$	
0°34′ 0″	$0^p\,35'\,36'' = 0{,}0049450$	

Je nachdem nun vom Auge des Beobachters aus der Deckstreifen der Dioptra in einer Entfernung von $77\frac{3}{4}$ oder $77\frac{1}{2}$ Daktylen den Mond verdeckte, erschien sein Durchmesser in einem Winkel von nahezu 33′ 10″ oder 33′ 16″. Die Einrichtung der Skala ermöglichte es aber, noch einen zwischen diesen Grenzen liegenden Winkel zu beobachten. Wenn der Deckstreifen auf einen Abstand von $77\frac{5}{8}$ Daktylen eingestellt werden mufste, um den in mittlerer Entfernung von der Erde befindlichen Mond gerade zu verdecken, so war daraus die Funktion

$$\frac{\text{chord.}}{\text{diam.}} = \frac{Z\Theta}{2\sqrt{K\Gamma^2 + \left(\frac{Z\Theta}{2}\right)^2}}$$

zu berechnen (Fig. 7). Durch die Dioptra waren gegeben $Z\Theta = \frac{3}{4}$, $K\Gamma = 77\frac{5}{8}$. Die Ausrechnung nach sexagesimaler Rechnungsweise war zwar umständlich[29]), führte aber doch, wenn man mit einer Annäherung

28) Ptolem. synt. I 10 (9), S. 47 f. Cantor, Vorles. über Gesch. der Mathem. I² S. 392. 617. Tannery, *Hist. de l'astronomie ancienne* S. 64.

29) Vgl. in Pauly-Wissowa's Realencyklopädie Arithmetica § 11. 15.

auf ganze Sekunden sich begnügte, zu dem gesicherten Ergebnisse

$$\frac{\text{chord.}}{\text{diam.}} K = 0^p\, 34'\, 47''.$$

Dieser durch Beobachtung gefundene Wert war nach der vorhergehenden Sehnentafel um $0^p\, 0'\, 14''$ gröfser als $0^p\, 34'\, 33'' = \frac{\text{chord.}}{\text{diam.}}\, 33'\, 0''$, und dieses Mehr entsprach sehr nahe einem Zuwachs von 13 Sekunden zu dem Winkel von $0^0\, 33'$. Also war durch die Dioptra ein Winkel von $0^0\, 33'\, 13''$ beobachtet worden, und es ergab sich nun leicht, dafs dieser Winkel ἔγγιστα, d. i. nach der Sprache der alten Astronomen „mit einem nicht in Betracht kommenden Fehler", 650 mal in den 360 Graden der Kreisperipherie enthalten war[30]).

Die Hipparchische Bestimmung des mittleren Monddurchmessers hat den durch neuere Beobachtungen gefundenen Wert um $2'\, 6''$ übertroffen (S. 204). Nahezu derselbe Fehler mag auch untergelaufen sein, wenn der Mond in der Erdferne beobachtet wurde. Dies würde auf einen Hipparchischen Ansatz zu ungefähr $31'32''$ statt $29'\, 26''$ führen, und diesem Werte gleich soll nach Ptolemaios (V S. 417, 3—6) der scheinbare Sonnendurchmesser, gleichviel ob die Sonne näher oder ferner zur Erde stand, befunden worden sein. Wenn nun derselbe Autor kurz darauf (S. 417, 12—16) bemerkt, er habe den Winkel, unter dem sowohl der Mond in der Erdferne als auch die Sonne, gleichviel ob sie der Erde näher oder ferner sei, erscheine, um ein beträchtliches kleiner gefunden als die verschiedenen Winkel, welche Hipparchos je nach der gröfseren oder geringeren Entfernung beider Gestirne gemessen hatte, so trifft diese Ausstellung bis zu einem gewissen Grade zu (haben wir doch selbst in dem einen überlieferten Falle ein Zuviel von etwa $\frac{1}{16}$ des wirklichen Wertes annehmen müssen); aber jedenfalls sind die Fehler der Hipparchischen Messungen merklich geringer gewesen, als sie einst dem Ptolemaios erschienen. Denn wenn dieser (S. 421, 4 f.) nur einen Winkel von $31'\, 20''$ für den Sonnendurchmesser zuläfst, so ist das auffällig weniger als das Mittel von $32'\, 4''$, welches die zuverlässigen Messungen der Neuzeit zwischen dem Maximum von $32'\, 37''$ und dem Minimum von $31'\, 32''$ ergeben haben, und dem entsprechend mufsten auch die Hipparchischen Fehler dem Ptolemaios gröfser erscheinen, als sie es in Wirklichkeit waren.

Noch eine Ausstellung erhebt der Verfasser der Syntax (S. 417, 16—24)

---

30) Die Ausrechnung $0^0\, 33'\, 13'' \times 650$ ergiebt $359^0\, 50'\, 50''$; mithin brauchte der durch Beobachtung gefundene Winkel von $33'\, 13''$ nur um weniger als eine Sekunde (genauer um 0,85 Sekunde: oben S. 204) vergröfsert zu werden, um, mit 650 multipliziert, 360^0 zu ergeben.

gegen die Messungen seines grofsen Vorgängers. Wir geben die Stelle in einer freieren, einige Schwierigkeiten des Textes ebnenden Übersetzung: „denn die Einrichtung der Dioptra ermöglichte es, die Fälle festzustellen, wo Sonne und Mond unter dem gleichen Winkel erschienen, weil dann keine weitere Messung (d. i. Ausrechnung nach der Entfernung des Deckstreifens vom Auge u. s. w.) nötig war; allein es blieb uns zweifelhaft, unter einem wie grofsen Winkel (bei jeder einzelnen Messung) die Durchmesser erschienen, weil jenes die Sonne oder den Mond verdeckende Plättchen sehr viele verschiedene Stellungen[31]) längs dem Richtscheite einnahm und demnach auch in verschiedenen Entfernungen vom Auge stand, sodafs die daraus abzuleitende Winkelmessung leicht von der erforderlichen Genauigkeit abirren konnte“.

Also gerade das, was die Hauptsache bei der Hipparchischen Dioptra war, die Berechnung des Gesichtswinkels aus der gegebenen Breite des Deckstreifens und dessen jeweiliger Entfernung vom Auge, läfst Ptolemaios nicht gelten; nur wenn der Deckstreifen bei verschiedenen Beobachtungen gleich weit vom Auge zu stehen kommt, möge man daraus schliefsen, dafs die beobachteten Gestirne unter gleichem Gesichtswinkel erscheinen; sowie aber verschiedene Stellungen des Deckstreifens in Betracht kommen, habe man die Dioptra bei Seite zu lassen, denn die nach den verschiedenen Abständen des Deckstreifens vom Auge anzustellenden Berechnungen seien unzuverlässig. Hier liegt offenbar ein Irrtum des Schriftstellers vor, der darin seine Erklärung finden mag, dafs ihm diese so langwierigen sexagesimalen Ausrechnungen nicht die Mühe zu lohnen schienen, die man dabei aufzuwenden hatte. Das ist jedoch kein stichhaltiger Grund; denn wenn wirklich der Deckstreifen bei einem gewissen Abstande Sonne oder Mond genau verdeckte, bei einem geringeren oder gröfseren Abstande aber einen zu grofsen oder zu kleinen Gesichtwinkel erzeugte, so waren die daraus folgenden Berechnungen untrüglich und die Schwierigkeit, sie durchzuführen, kam dabei nicht in Betracht. Also durfte eine berechtigte Kritik nur bei der Frage einsetzen, ob der schmale Deckstreifen gegenüber dem blendenden Lichte des Gestirns ausreichende Gewähr dafür bot, dafs genau die richtige Deckungsstelle auf der Skala des Richtscheites ermittelt wurde.

Auch Proklos hat sich in seiner schon mehrfach erwähnten Hypoty-

31) Pappos S. 262 g. E. erklärt die oben (S. 201, Anm. 21) angeführten Worte des Ptolemaios *ἐν ταῖς ἐπιβολαῖς . . . πλείσταις οὔσαις* durch *ἐν πλείσταις ἐπιβολαῖς, τουτέστι παραφοραῖς* (*οὐ γὰρ ἥνωται*, d. h. es kommt nicht blofs ein Fall in Betracht).

posis[32]) über die HIPPARCHische Dioptra geäufsert. Zwar stimmt er meistens mit PAPPOS überein; doch findet sich eine hauptsächliche Abweichung, die der Berichterstatter aus einer uns unbekannten Quelle entnommen hat. In der am Anfange des Richtscheites befestigten Platte soll die Visieröffnung Γ möglichst nahe der oberen Fläche desselben angebracht sein und die bewegliche Platte, die gröfser als der Deckstreifen bei PAPPOS zu denken ist, soll unten mit einer kleinen Öffnung B, in gleicher Höhe mit Γ, aufserdem in geeigneter Höhe über B mit einer zweiten Öffnung Z (die auf der von der oberen Fläche des Richtscheites aus durch B geführten Normalen liegen soll) versehen sein (Fig. 8). Dann habe man zur Zeit des Aufgangs oder Untergangs der Sonne die Dioptra so zu richten, dafs die verlängerte Gerade ΓB genau den Endpunkt Δ des parallel mit ZB gezogenen Sonnendurchmessers, und ΓZ genau den Endpunkt E berühre.

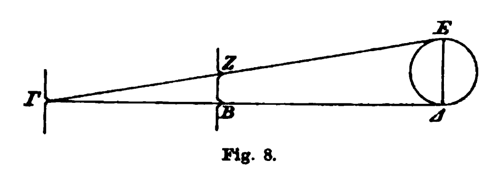


Fig. 8.

Über die hieran zu knüpfenden Ausrechnungen schweigt PROKLOS; es ist aber klar, dafs der von ihm benutzte Autor mit $ZB\Gamma$ einen rechten Winkel bezeichnet hat, wonach aus den gegebenen Katheten ZB und $B\Gamma$ zunächst die Hypotenuse ΓZ und dann das Verhältnis $\frac{ZB}{\Gamma Z}$ auszurechnen war. Damit war der Sinus des Winkels Γ gefunden. Nun sind zwei Möglichkeiten zu setzen. Entweder hat der unbekannte Autor noch keine Sinustafeln vor sich gehabt, sodafs er durch eine Nebenrechnung auf die Funktion $\frac{\text{chord.}}{\text{diam.}}\,2\Gamma$ kommen und mit Hülfe einer HIPPARCHischen Tafel den Winkel 2Γ und zuletzt die Hälfte davon bestimmen mufste, oder er hatte — was wohl wahrscheinlicher ist — von vornherein seine Dioptra so eingerichtet, dafs er unmittelbar $\sin \Gamma$ ausrechnen und in einem dazu geeigneten Ausschnitte einer Sinustafel den Winkel Γ auffinden konnte. Nun habe ich früher nachgewiesen, dafs der Wert 3,1416 für π, der bei dem Inder ARYABHATTA (geb. 476) sich findet, schon um ein oder zwei Jahrhunderte früher von einem griechischen Mathematiker aufgestellt worden ist, der nach einer von APOLLONIOS überkommenen Methode den Kreisumfang als Mittel aus den Perimetern des 96- und des 192eckes in Myriadenbrüchen berechnet hat[33]). Da nun im engen Zusammenhange da-

32) S. 109—111 HALMA. In diesem Abschnitte ist S. 110 a. E. ὡς αὐτὸς διατείνεται und S. 111, 13 παραδέξαιτό (statt παραδέξοιτο) τις, wahrscheinlich auch S. 110, 30 ἐποιοῦμεν zu schreiben.

33) Zur Kreismessung des ARCHIMEDES, Zeitschr. für Mathem. und Phys., hist.-liter. Abteil. 1894, S. 167 - 169.

mit die Inder ein Verfahren ausgebildet haben, wonach die Sehne des eingeschriebenen 96eckes gleich dem Bogen von $\frac{360^\circ}{96} = 3^0\,45'$ gesetzt und daraus weiter Tafeln der Sinus sowohl von gröfseren als kleineren Winkeln entwickelt wurden[34]), so spricht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, dafs die Einführung des Sinus in die Trigonometrie ebenso wie jene Ausrechnung von π in Myriadenbrüchen aus einer griechischen Quelle stammt[35]).

34) Cantor, Vorles. I², S. 616 f. Tannery, *Hist. de l'astron.* S. 64.

35) Wenn der seinem Namen nach nicht bekannte griechische Mathematiker, dessen Bestimmung von $\pi = 3{,}1416$ von Aryabhatta aufgenommen wurde, auch die Sinusfunktion gekannt und angewendet hat, so würde man die früheste Herstellung von Sinustafeln in das dritte bis vierte Jahrh. n. Chr. zu verlegen haben; man darf aber immerhin die Möglichkeit offen lassen, dafs schon zur Zeit des Hipparchos oder vielleicht noch etwas früher griechische Mathematiker statt der Funktion $\frac{\text{chord.}}{\text{diam.}}$ die für eine Weiterentwickelung der Trigonometrie günstigere Sinusfunktion benutzt haben. Vgl. Tannery, *Hist. de l'astron.* S. 66 g. E. Zeuthen, Gesch. der Mathem. S. 288.

DES RHETICUS CANON DOCTRINAE TRIANGULORUM UND VIETA'S CANON MATHEMATICUS.

VON

KARL HUNRATH,
RENDSBURG.

Zu den selten gewordenen mathematischen Schriften, welche die Ständische Landes-Bibliothek zu Kassel birgt, gehören

> *Canon doctrinae triangulorum, nunc primum a* GEORGIO JOACHIMO RHETICO, *in lucem editus, Lipsiae 1551,* (s. GRAESSE, Trésor de livres rares et précieux, tome VI, p. 102, zweite Spalte)

und

> *Canon mathematicus seu ad Triangula cum Adpendicibus, Lutetiae 1579,*

nebst

> FRANCISCI VIETAEI, *Universalium inspectionum ad Canonem mathematicum liber singularis, Lutetiae 1579* (s. CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2. Band, S. 537).

Die erste Schrift umfaſst nur 12 Blätter in Quart, je vier mit einem Buchstaben bezeichnet. Das erste Blatt, A_1, gibt nur den Titel, das zweite Blatt, A_2, auf der Vorderseite ein Gedicht. Auf der Rückseite von A_2 beginnt die Tafel und reicht bis auf die Vorderseite des Blattes C_1. Die letzten Seiten enthalten den „*Dialogus de canone doctrinae triangulorum* JOACHIMI RHETICI".

Die Tafel gibt die trigonometrischen Linien für den Halbmesser 10 000 000 von 10′ zu 10′, hat einen doppelten Eingang, geht also in fortschreitender Richtung von 0° bis 45°. Auf die Seite fallen 7°, auf die letzte Seite 3°. Eine Doppelseite sieht folgendermaſsen aus:

(linke Seite) | (rechte Seite)

Canon doctrinae triangulorum in quo triquetri | *cum angulo recto in planitie partium 10 000 000 ponitur*

		Subtendens angulum rectum				Maius latus includen-		tium angulum rectū		Minus latus includentium angulum rectum					
		Perpendicul.	Different.	Basis	Different.	Hypotenusa	Drā.	Perpendic.	Different.	Hypotenusa	Different.	Basis	Different.		
35	0													0	55
	10													50	
	20													40	
	30													30	
	40													20	
	50													10	
36	0													0	54
		Basis	Different.	Perpendic.	Different.	Hypotenusa	Different.	Basis	Different.	Hypotenusa	Different.	Perpendicul.	Different.		

Die Zahlen für die trigonometrischen Linien sind schwarz, die für die Differenzen rot gedruckt, die zugehörigen Überschriften umgekehrt; rot gedruckt sind auch bei den Eingängen die Zahlen für die Minuten, die Zahl 10 000 000 und die Worte 'Maius latus includentium angulum rectū. Die Einrichtung der Tafel ist dieselbe, wie im „Opus Palatinum"; was man wohl mit Recht vermissen könnte, wäre eine Fufsleiste:

Subtendens angulum rectum	Maius latus includentium angulum rectū	Minus latus includentium angulum rectum

Nach unserer Bezeichnungsweise enthalten die sechs Spalten der Reihe nach die Werte für

$$10^7 \cdot \sin\alpha,\quad 10^7 \cdot \cos\alpha,\quad 10^7 \cdot \sec.\,\alpha,\quad 10^7 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha,\quad 10^7 \cdot \mathrm{cosec}\,\alpha,\quad 10^7 \cdot \cot\alpha$$

$$\text{für } \alpha < 45^0.$$

Der Dialog wird zwischen einem „Hospes“ und einem „Philomathes“ geführt. Der „Philomathes“ scheint identisch mit dem Verfasser des einführenden Gedichts auf der ersten Seite des Blattes *Aij* zu sein, der sich folgendermaſsen unterschreibt:

MATHIAS S. R.
φιλομαθής. F

Aus dem Inhalt des Gesprächs möchte ich hervorheben:

RHETICUS gehe bei der Auflösung der Dreiecke seinen eigenen Weg, besonders bei der Auflösung der sphärischen. Seinen Ausgang nehme er vom ebenen rechtwinkligen Dreieck. In der ersten Reihe seines Canons setze er die Hypotenuse = 10 000 000; dann sei das Perpendiculum die halbe Sehne des doppelten Winkels oder der *sinus rectus* der Araber, die Basis aber der *sinus secundus* oder die halbe Sehne des doppelten Komplementwinkels. Und ohne Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes, nur durch Multiplikation oder Division, ergebe sich aus der ersten Reihe sowohl die zweite, als auch die dritte, indem man für die zweite Reihe die gröſsere, für die dritte Reihe die kleinere Kathete = 10 000 000 setze. Links lese man in der Tafel einen Winkel $< 45^0$, rechts einen solchen $> 45^0$ ab. Bei der Auflösung der sphärischen Dreiecke (*doctrina triquetrorum globi*) folge RHETICUS weder dem PTOLEMAEUS noch GEBER, dessen Methode von PEURBACH, REGIOMONTAN und WERNER ausgebaut sei, sondern gehe von der Betrachtung von Pyramiden aus, deren gemeinsame Spitze der Mittelpunkt der Kugel sei und deren Grundflächen ebene Dreiecke seien. Gemeint ist das Verfahren, welches in den beiden Abhandlungen des *„Opus Palatinum“*

GEORGII JOACHIMI RHETICI *de triangulis globi cum angulo recto,* 1596,

und

L. VALENTINI OTHONIS *Parthenopolitani de triangulis globi sine angulo recto libri quinque,* 1596,

entwickelt ist. Der Verfasser der zweiten Abhandlung, der bekannte Schüler des RHETICUS, scheint für sich nur die Ausarbeitung in Anspruch zu nehmen, indem er im Schluſsworte sagt: *Ita igitur universa Triangulorum doctrina absoluta est, et quidem ea methodo, quam auctor huius operis* GEORGIUS JOACHIMUS RHETICUS *instituit.* Die Behandlung, welche OTHO dem schiefwinkligen sphärischen Dreieck zu teil werden läſst, ist übrigens nach unserem Geschmack unglaublich weitschweifig.

Eigentümlich berührt es, dafs RHETICUS in seinem Dialog den Satz von den vier Gröfsen als *„inventum“* bezeichnet, *„quod sibi* GEBER *ascribit“*. Richtig ist die Bemerkung, die RHETICUS dem Hospes des Dialogs in den Mund legt: *immerito* PTOLOMAEUM *a* GEBRO *reprehendi, quod in quantitatibus sex perquirat ignotum, hoc enim* GEBER *in quatuor tantum vestigat, et tamen* PTOLOMAEO *quoque illae non nisi quatuor sunt, si ad compendia Logistices respexeris.*

Hier sei mir eine kleine Abschweifung zu GEBER gestattet.

KÄSTNER in seiner Geschichte der Mathematik, Bd. 1, S. 581, nimmt in GEBER's Definition:

sinus arcus est medietas cordis dupli eius[1])

cordis für den Genetiv von *cor*; es liegt ein einfacher Druckfehler vor, *cordis* statt *cordae*, wie es beständig[2]) statt *chordae* heifst.

Nach CANTOR[3]) könnte es scheinen, dafs GEBER im 13. Satze des ersten Buches den Sinussatz nur in seiner Anwendung auf die Hypotenuse und eine Kathete eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks lehre. Dies ist aber nicht der Fall. Denn der Satz lautet bei GEBER:

Omnis trianguli ex arcubus circulorum magnorum proportio sinus cuiusque lateris ad sinum arcus anguli, cui subtensum est, est proportio una.

Den Beweis führt GEBER zunächst für das rechtwinklige sphärische Dreieck, dann für das schiefwinklige; daher mag der Irrtum entstanden sein.

Noch ein Wort über das Verhältnis REGIOMONTAN's zu GEBER. Abhängig von GEBER erscheint REGIOMONTAN in dem Satz von den vier Gröfsen (bei jenem lib. I, prop. XII, bei diesem *de Triangulis* lib. IV, prop. XV). Ebenso entsprechen dem 13. Satze[3]) GEBER's die proposs. XVI und XVII REGIOMONTAN's im lib. IV *de Triang.* In der prop. XVI behandelt REGIOMONTAN den Satz für das rechtwinklige, in XVII für das schiefwinklige sphärische Dreieck. Der Beweis der prop. XVII ist genau der GEBER's. Endlich entspricht dem 14. Satze[3]) GEBER's die XVIII., dem 15. Satze[3]) GEBER's die XIX. Prop. REGIOMONTAN's im lib. IV *de Triang.* Der Fortschritt bei REGIOMONTAN besteht darin, dafs er seine Lehrsätze XVI, XVIII, XIX auch

---

1) GEBER's neun Bücher der Astronomie, in der von APIAN zu Nürnberg 1534 herausgegebenen lateinischen Übersetzung GERHARD's VON CREMONA, S. 3.

2) z. B. a. a. O. S. 18, Z. 2.

3) CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Bd., S. 683.

für die Fälle beweist, dafs beide Katheten durch stumpfe Winkel, oder die eine durch einen stumpfen, die andere durch einen spitzen Winkel gemessen wird, während GEBER sich bei seinen Beweisen auf den Fall beschränkt, dafs diese beiden ebenen Winkel spitze sind.

Wenden wir uns nun zu dem so selten gewordenen Werke VIÉTA's.

Das Kasseler Exemplar ist in einem reich verzierten Einband enthalten, der auf der Vorderseite das hessische, auf der Rückseite das würtembergische Wappen trägt, ähnlich wie der Einband von ROTHMANN's Handschrift *„Tabula observationum stellarum fixarum"* und andere alte Einbände der Kasseler Landes-Bibliothek. Das weist mit Sicherheit als ersten Besitzer den 1592 verstorbenen Landgrafen WILHELM IV nach, der mit SABINA VON WÜRTEMBERG vermählt war, den bekannten Förderer der Astronomie und ihrer Hülfswissenschaften. Auch enthält das Exemplar handschriftliche Verbesserungen aus alter Zeit, die aber von geringem Belang sind.

Der knapp bemessene Raum gestattet mir nur das Wesentlichste des Inhalts anzugeben.[4])

Die Einrichtung der Tafel ist folgende (Vorderseite des Blattes *Bij*):

4) Die bibliographische Beschreibung des Werks siehe bei GRÄSSE, *trésor de livres rares et précieux,* Bd. VII, S. 312. Das Kasseler Exemplar gehört zu denen, die auf der Rückseite des ersten Blattes den *„Elenchus adpendicum"* bringen und bei denen der das *„Canonion triangulorum, Ad singulas partes quadrantis Circuli, secundum Ἑξεκοντάδων* (so immer bei VIETA) *Logisticem"* enthaltende Bogen unbezeichnet ist (sonst mit *** bezeichnet).

Eig…
von de…
ascribit…
in den …
quantitati…
vestigat, …
compendio…

Hi…

K…
in Geb…

cordis …
cordis…

N…
ersten
und …
aber …

Den
dam…

hän…
Gr…
Eb…
Re…
de…
D…
sp…
N…
K…

…anguli

	Perpendiculum 100,000		lo addati Residua Basi congrua
	Basis	Hypotenusa	
	E canone Faecundo Faecundissimoque		
	Tertia		
	1,270,621	1,274,550	XXX
	4,708	4,695	
	1,265,913	1,269,855	XXIX
	4,674	4,659	
	1,261,239	1,265,196	XXVIII
	4,640	4,625	
	1,256,549	1,260,651	XXVII
	4,605	4,590	
	1,251,994	1,255,981	XXVI
	3,868	3,854	
	1,146,848	1,151,199	I
	3,842	3,827	
	1,143,006	1,147,372	
	Tertia		Scrup.
	Faecundissimóque E Canone Faecundo		LXXXV. Part.
	Perpendiculum	Hypotenusa	congrua Perpendiculo Peripheria dati lo ad-
	100,000 Basis		

Rectanguli

Bij

… gedruckt, ebenso bei den Eingängen die W…
… Tertia', endlich auch die Anfangsbuchsta…

ies in der vierten Spalte 100,316 1 statt 100,516 1, in der sechsten 260,671 statt 1,260,651. Abgesehen von diesen Druckfehlern ist mehr- letzte Stelle ungenau. Für die Funktionen der zweiten und vierten sind an der gewählten Stelle auch noch die Zehntel angegeben.

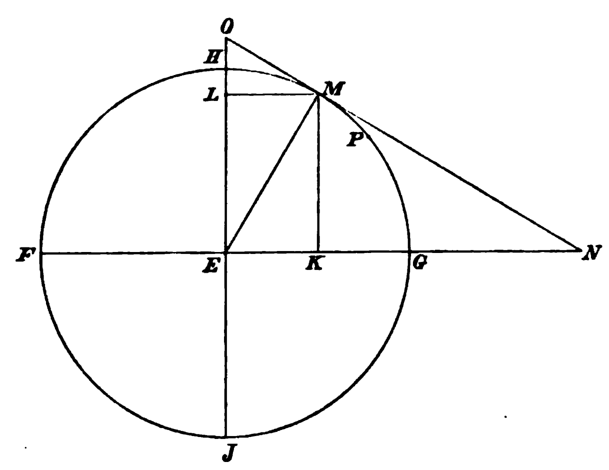
Tafel hat einen doppelten Eingang, geht daher in fortschreitender ung bis 45⁰ und giebt die trigonometrischen Linien von Minute zu . Jede Seite enthält die Funktionen eines halben Grades, linke und Seite zusammen die Funktionen eines ganzen Grades. Nach unserer hnungsweise geben die sechs Spalten der Reihe nach die Werte für

sin α, $10^5 \cos\alpha$, $10^5 \operatorname{tg}\alpha$, $10^5 \sec\alpha$, $10^5 \cot\alpha$, $10^5 \operatorname{cosec}\alpha \cdot\cdot$ für $\alpha < 45^0$.

Zur weiteren Erklärung ziehe ich heran

VIETAE *Opera mathematica ed.* FR. v. SCHOOTEN, Lugd. Bat., 1646, S. 415 ff.

„*Exponatur circulus cuius E centrum, quadrisectus à duabus diametris FEG, HEJ, & in quadrante circuli HG sumatur quaecunque peripheria GM, & cadant in semidiametrum EG, EH perpendicula MK, ML. Sed*



& tangat circulum ad M recta MN, quam continuatae semidiametri EG, EH secent in N, O. Tria igitur in conspicuo sunt triangula plana rectangula similia, Primum EKM seu MLE, Secundum EMN, Tertium OME, latus unum EM, commune habentia, quod quidem primi fit Hypotenusa, secundi Basis, tertii Perpendiculum, quando videlicet angulus MEK, cuius amplitudinem peripheria GM definit, acuti nomine exauditur. Idemque latus commune EM constituitur semidiameter circuli. Canon igitur mathematicus adsumit latus EM particularum 100 000, sectaque GH bifariam in P, promovet P[5])

5) soll *M* heifsen.

punctum per quaecunque peripheriae GH segmenta, id est ex instituta partitione, per sexagesima quaecunque partium quadragenarum quinarum scrupula, quae sint loca 2700. Et totidem exhibita terna similia triangula rectangula.

Punctum M mobile consistit in P, quoniam ab eo signo idem est progressus versus H, qui regressus versus G. Itaque MH convertitur in quandam MG & vice versa, ut invertenda quoque sit sola denominatio laterum vel angulorum."

— — — — — — — — — — — — —

Die Figur enthält alle trigonometrischen Linien; denn wenn man ∢ MEN mit α bezeichnet und den Halbmesser $EM = 1$ setzt, so ist nach unserer Bezeichnungsweise

$$MK = \sin\alpha, \quad EK = ML = \cos\alpha, \quad MN = \operatorname{tg}\alpha, \quad EN = \sec\alpha,$$
$$OM = \cot\alpha, \quad OE = \operatorname{cosec}\alpha.$$

Zu der Bezeichnung *Triangulum planum rectangulum circulo adcommodatum* (Kopf der Tafel, s. S. 218) s. S. 417 a. a. O.:

— — — „*Itaque in accommodatione trianguli plani ad circulum serie primâ, Perpendiculum fit semissis inscriptae duplo peripheriae, ejus videlicet quae anguli acuti vel sui exterioris amplitudinem definit. Basis semissis inscriptae duplo reliqui è recto, seu complementi. Hypotenusa semidiameter.*

In serie secunda, Perpendiculum fit semissis circumscriptae duplo peripheriae. Basis semidiameter. Hypotenusa educta è centro ad metam semissis circumscriptae duplo peripheriae.

In serie tertia, Perpendiculum fit semidiameter. Basis semissis circumscriptae duplo complementi. Hypotenusa educta è centro ad metam semissis circumscriptae duplo complementi.

Quoniam vero triangulum ipsum non omne describitur intra vel circa circulum, ideo ne vocum catachresis quempiam deludat, dicitur rudiuscule triangulum circulo adcommodari."

Zu den Ausdrücken *Canon faecundus, C. faecundissimus* s. a. a. O. S. 417:

„*Ex canonibus deinde Sinuum derivaverunt recentiores Canonem semissium circumscriptorum, quem dixere Faecundum, & Canonem eductarum è centro, quem dixere Faecundissimum & Beneficum, Hypotenusis addictum.*"

Das eine ist also die Tafel der Tangenten bezw. Cotangenten, das andere die Tafel der Secanten bezw. Cosecanten.

Dem Canon math. unmittelbar angeheftet ist im Kasseler Exemplar der mit **** bezeichnete Bogen, welcher auf zwei nebeneinanderstehenden Blättern *Mathemati Canonis Epitome* enthält.

Es ist eine von Grad zu Grad fortschreitende Tafel mit doppeltem Eingang, welche die trigonometrischen Linien für den Halbmesser 100 000 auf Tausendstel angiebt. Gegen den Canon math. hinzugefügt sind die zu den Winkeln gehörigen Bogen, ebenfalls für den Halbmesser 100 000 auf Tausendstel berechnet.

Es folgt auf 24 Blättern, je vier mit griechischen Buchstaben (α bis ζ), aber auch mit Seitenzahlen, (1—48) bezeichnet, das *Canonion triangulorum Laterum rationalium.* Auf Seite 3 beginnt die eigentliche Tafel und reicht bis Seite 45. Zur Erklärung der Tafel gehe ich von den beiden letzten Seiten aus (s. die folgenden beiden Seiten). Zur Erklärung benutze ich, aufser den auf S. 47 (die Seiten 46 und 48 sind unbedruckt) gegebenen

Syntaxis Numerorum Canonij
und *Syntaxis numerorum in Justo Canone,*

aus Viétaei *Univ. insp. ad Can. math. lib. sing.* die *prop. III: Consectarium, quod esto Norma Canonij* (S. 4 ff.).

Dort heifst es auf S. 6, Z. 2—4: . . . . *„contenti fuimus per singulos CB*[6]*) impares numeros centum progredi, eosque continua duplà progressione Geometricâ augere, ad metam usque sex figurarum, ultra quam effusa hujusmodi primorum numerorum (sc. baseos) vastitas vix ad rem quicquam conducere visa est.“*

Viéta will die Basis der Reihe nach den ersten 100 ungraden Zahlen gleich setzen, von 1 bis 199, dann den Zahlen 1. 2, 3. 2, ... 199. 2; 1. 2^2, 3. 2^2, ... 199. 2^2 usw. bis zu der letzten so gebildeten Zahl, welche 6 Stellen hat. Wirklich ist Viéta bei Berechnung der Tafel so vorgegangen, ordnet dann aber nach der wachsenden Gröfse der für die Basis eingesetzten Zahlen. Auf der 45. Seite unten (s. die folgende Seite) steht als *numerus primus baseos 1,* dann folgen nach oben die Zahlen 2, 3, 4 usw. bis 200 (200 auf S. 40, Z. 1), darauf die geraden Zahlen von 202—400 (S. 39—37), dann die durch 4 teilbaren Zahlen von 404—800 (S. 36—34) und so fort. Zuletzt auf S. 3 unten steht 827 392 = 101.2^{13}, nach oben als letzte Zahl 999 424 = 122.2^{13}, darüber noch *„&c.“* In der That ist 123.2^{13} = 1 007 616

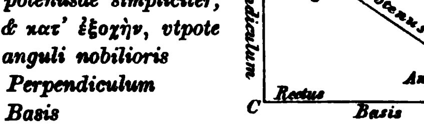
6) Lib. sing., prop. I (S. 2): *Trianguli plani Rectanguli Diagramma & Notae.*

Anguli

C, perpetua nota anguli Recti
B, acutus a Perpendiculo subtensus
A, acutus subtensus a Base.

Latera

AB, Perpetua nota Hypotenusae Recti vel Hypotenusae simpliciter, & κατ' ἐξοχὴν, vtpote anguli nobilioris
AC, Perpendiculum
CB, Basis



Beilage zu

44 CANONION TRIANGVLORVM

	Series III		Series II		Series I	
68	$1,701,470\frac{10}{17}$	$1,698,529\frac{7}{17}$	$100,173\frac{37}{231}$	$5,887\frac{103}{231}$	$99,827\frac{161}{1,157}$	$5,877\frac{311}{1,157}$
67	....	....	....	....	....	....
66						
65						
36	$902,777\frac{7}{9}$	$897,222\frac{2}{9}$	$100,619\frac{63}{323}$	$11,145\frac{165}{323}$	$99,384\frac{8}{13}$	$11,076\frac{12}{13}$
35	$877,857\frac{1}{7}$	$872,142\frac{6}{7}$	$100,655\frac{245}{1,221}$	$11,466\frac{14}{1,221}$	$99,349\frac{79}{1,229}$	$11,391\frac{401}{1,229}$
Numeri primi Baseos	Hypotenusa	Perpendiculum	Hypotenusa	Basis	Perpendiculum	Basis
	100,000 Basis		100,000 Perpendiculum		100,000 Hypotenusa	

Seite 221 und 224 und 225.

LATERVM RATIONALIVM 45

Series I		Series II		Series III		
$11,724\frac{4}{29}$	$99,310\frac{10}{29}$	$11,805\frac{5}{9}$	$100,694\frac{4}{9}$	$847,058\frac{14}{17}$	$852,941\frac{3}{17}$	34
$12,076\frac{932}{1,093}$	$99,268\frac{76}{1,093}$	$12,165\frac{195}{217}$	$100,737\frac{71}{217}$	$821,969\frac{23}{33}$	$828,030\frac{10}{33}$	33
80,000	60,000	$133,333\frac{1}{3}$	$166,666\frac{2}{3}$	75,000	125,000	4
$92,307\frac{9}{13}$	$38,461\frac{7}{13}$	240,000	260,000	$41,666\frac{2}{3}$	$108,333\frac{1}{3}$	3
100,000	•	•	•	•	100,000	2
•	•	•	•	•	•	1
Basis	Perpendiculum	Basis	Hypotenusa	Perpendiculum	Hypotenusa	Numeri primi Baseos
100,000 Hypotenusa		100,000 Perpendiculum		100,000 Basis		

die erste mit 7, 999 424 die letzte mit 6 Stellen geschriebene Zahl dieser arithmetischen Progression mit der Differenz $2^{13} = 8192$.

In der angezogenen prop. III des lib. sing. lehrt Viéta die Berechnung Pythagoreischer Dreiecke, indem er von folgendem Satze ausgeht. Ist AB[7]) die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ABC, ist ferner $\frac{AB - AC}{2} = 1$, so ist $AB - 1 = AC + 1 = \left(\frac{CB}{2}\right)^2$ oder $AB = \left(\frac{CB}{2}\right)^2 + 1$, $AC = \left(\frac{CB}{2}\right)^2 - 1$. Viéta zeigt das Verfahren an einer ganzen Reihe von Beispielen, von denen ich anführe: für $CB = 3$ ist $AB = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = 3\frac{1}{4}$, $AC = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = 1\frac{1}{4}$.

In der *Syntaxis Numerorum Canonij* giebt nun Viéta Regeln, die, in unsere Zeichensprache übersetzt, so lauten würden: Geht man von einem solchen rechtwinkligen $\triangle ABC$ aus, nimmt in der Figur auf Seite 219 $\triangle NEM \sim MEK \sim EOM \sim ABC$ an und setzt $EM = 100000$, so ist für Ser. III. $EM = 100000$ die Basis,

$$EN \text{ die Hypotenuse} = 100000 \cdot \frac{BC}{4} + \frac{100000}{BC}\ ^{8)}$$

$$MN \text{ das Perpendiculum} = 100000 \cdot \frac{BC}{4} - \frac{100000}{BC}\ ^{9)},$$

für Ser. II. $EM = 100000$ das Perpendiculum,

$$EO \text{ die Hypotenuse} = 100000 + \frac{200000}{AC} = 100000 + \frac{200000}{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 - 1}\ ^{10)}$$

$$MO \text{ die Basis} = 100000 \cdot \frac{BC}{AC}$$

---

7) S. Anm. 6 p. 221.

8) Offenbar aus $100000 \cdot \frac{AB}{BC} = 100000 \cdot \frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 1}{BC}$.

9) „ „ $100000 \cdot \frac{AC}{BC} = 100000 \cdot \frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 - 1}{BC}$.

10) „ „ $100000 \cdot \frac{AB}{AC} = 100000 \cdot \frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 1}{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 - 1}$

$$= 100000 \cdot \left[1 + \frac{2}{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 - 1}\right].$$

für Ser. I. $EM = 100000$ die Hypotenuse,

MK das Perpendiculum $= 100000 - \frac{200000}{AB} = 100000 - \frac{200000}{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 1}$ [11]

EK die Basis $= 100000 \cdot \frac{BC}{AB}$.

Um das Verfahren an einem Beispiel zu zeigen: Setzt man $BC = 34$, also $AC = 17^2 - 1 = 288$, $AB = 17^2 + 1 = 290$, so ist $100000 \cdot \frac{BC}{4} + \frac{100000}{BC} = 850000 + 2941\frac{3}{17} = 852{,}941\frac{3}{17}$, $100000 \cdot \frac{BC}{4} - \frac{100000}{BC} = 847{,}058\frac{14}{17}$, $100000 + \frac{200000}{AC} = 100000 + 694\frac{4}{9} = 100{,}694\frac{4}{9}$, $100000 \cdot \frac{BC}{AC} = 11{,}805\frac{5}{9}$, $100000 - \frac{200000}{AB} = 99{,}310\frac{10}{29}$, $100000 \cdot \frac{BC}{AB} = 11{,}724\frac{4}{29}$. Das sind die auf S. 45, Z. 1 (s. S. 223, Z. 5) für $BC = 34$ angegebenen sechs Werte, von rechts nach links gelesen.

Über den Zweck des *Canonion* spricht sich VIÉTA selbst im lib. sing., S. 6, Z. 1 und 2, folgendermaſsen aus: „*Nobis in constructione Canonij ea praecipuè cura fuit, isque scopus, ut in summâ angulorum acutie res felicius & propius verò, quàm fortè per Canonis κυϱίου progressionem liceret, quoties opere pretium videbatur, examinaretur.*“

Sehen wir uns nun die einleitenden Worte zur *Syntaxis numerorum in Justo Canone* an. Sie lauten: *Cum sint Prostaphaereses*[12]) *in serie tertiâ subdupla ad Faecundum dimidiae Residuae Peripheriae, adsumantur eae abs Fragmentis, utpote per continuam octonarij numeri progressionem, videlicet 8, 16, 24, 32, 40 etc., donec ad Prostaphaeresim*[12]) *20,212* (soll heiſsen 20,712) *deueniatur, quae fere est subdupla ad Faecundum Peripheriae xxij, cum semisse. Et locus, in quem cadit Prostaphaeresis*[12]) *8 primus esto, 16 secũdus, 24 tertius, et sic de reliquis et erunt 2,589 loca. Qui numerus accedit ad 2,700, numerum scrupulorũ partium xlv. et locorum consequenter, qui solent constitui in Canone irrationalium; et ita Canonici numeri conflantor, et constituuntor. Et Peripheriae e Canonibus Faecundis, uti eae congruunt constituarum* (soll heiſsen *constitutarum*) *Prostaphaeresôn, duplantor; Et è regione numerorum collocantor.*

---

11) Offenbar aus $100\,000 \cdot \frac{AC}{AB} = 100\,000 \cdot \frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 1}$
$= 100\,000 \cdot \left[1 - \frac{2}{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 - 1}\right]$.

12) Bei VIÉTA immer mit t statt mit th geschrieben.

„Cum sint Prostaphaereses in serie tertia subdupla ad Faecundum dimidiae Residuae Peripheriae“: die *Prostaphäresis in serie III* (s. o.)

$$\frac{100\,000}{BC} \text{ ist } = \frac{EN-MN}{2} = \frac{10^5\cdot\sec\alpha - 10^5\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2} = \frac{10^5}{2}(\sec\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha)$$

$$= \frac{10^5}{2}\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{10^5}{2}\cdot\frac{1-\cos(90^0-\alpha)}{\sin(90^0-\alpha)} = \frac{1}{2}\cdot 10^5\cdot\mathrm{tg}\,\frac{90^0-\alpha}{2},\quad 10^5\,\mathrm{tg}\,\frac{90^0-\alpha}{2}$$

der *Faecundus dimidiae Residuae Peripheriae.*

„adsumantur eae abs Fragmentis, utpote per continuam octonarij numeri progressionem, videlicet 8, 16, 24, 32, 40 etc., donec ad Prostaphaeresim 20,712 deueniatur“: es sollen für $EM = 100000$ und $\frac{EN-MN}{2} = 8\cdot 1,\ 8\cdot 2,\ 8\cdot 3$ und so weiter bis $8\cdot 2{,}589 = 20{,}712$ EN und MN berechnet werden. Für die Berechnung der trigonometrischen Linien giebt die *Syntaxis numerorum in Justo Canone* selbst folgende Regeln:

für Ser. III. $EM = 100000$ die Basis;

$$EN \text{ die Hypotenuse} = \frac{2\,500\,000\,000}{\left(\frac{EN-MN}{2}\right)} + \frac{EN-MN}{2}\text{ [13]};$$

$$MN \text{ das Perpendiculum} = \frac{2\,500\,000\,000}{\left(\frac{EN-MN}{2}\right)} - \frac{EN-MN}{2}\text{ [13]};$$

für Ser. II. $EM = 100000$ das Perpendiculum;

$$EO \text{ die Hypotenuse} = 100\,000 + \frac{(EN-MN)\cdot 100\,000}{MN}\text{ [14]};$$

$$MO \text{ die Basis} = 2\,(EN-MN) + \frac{(EN-MN)^2}{MN}\text{ [15]};$$

für Ser. I. $EM = 100000$ die Hypotenuse;

$$MK \text{ das Perpendiculum} = 100000 - \frac{(EN-MN)\cdot 100000}{EN}\text{ [16]};$$

$$EK \text{ die Basis} = 2\,(EN-MN) - \frac{(EN-MN)^2}{EN}\text{ [17]};$$

---

13) $2\,500\,000\,000 : \frac{EN-MN}{2} = \left(\frac{EM}{2}\right)^2 : \frac{EN-MN}{2} = \frac{EN+MN}{2}$

14) $= EM + EM\cdot\frac{EN-MN}{MN} = \frac{EM\cdot EN}{MN}.$

15) $= \frac{\overline{EN}^2 - \overline{MN}^2}{MN} = \frac{\overline{EM}^2}{MN}.$

16) $= EM - EM\cdot\frac{EN-MN}{EN} = \frac{EM\cdot MN}{EN}.$

17) $= \frac{\overline{EN}^2 - \overline{MN}^2}{EN} = \frac{\overline{EM}^2}{EN}$ — Die Prosthaphäresis $\left(\frac{EN-MN}{EN}\right)^2$ ist irrtümlich als '*additiua*' statt als '*ablatiua*' bezeichnet.

„quae fere est subdupla ad Faecundum Peripheriae xxij, cum semisse". Nun ist $\frac{1}{2} \cdot 10^5 \operatorname{tg} 22\frac{1}{2}^0 = 20710{,}68$, also sehr nahe der Prosthaphäresis 20712.

„Qui numerus accedit" bis zum Schlufs: in den Sinn dieser Worte bin ich nicht eingedrungen.

Jedenfalls handelt es sich um ein Verfahren, die irrationalen Zahlen des *Canon mathematicus* durch die rationalen Mafszahlen Pythagoreischer Dreiecke zu kontrolieren, ein Verfahren, das, mag es gestaltet sein wie es will, äufserst mühsam ist. Aber auch da erhebt sich noch eine Frage: Warum enthält das *„Canonion"* nur einen Teil der Zahlen von der Form $8 \cdot n$ als *numeri primi baseos*, sodafs wieder besondere Regeln für die Berechnung der trigonometrischen Linien für die fehlenden Zahlen aufgestellt werden müssen?

Auf das *„Canonion"* folgt noch

1) ein im Kasseler Exemplar unbezeichneter, nach GRAESSE (s. o.) in andern Exemplaren mit *** bezeichneter Bogen, enthaltend

Canonion triangulorum, Ad singulas partes quadrantis Circuli, secundum Ἑξηκοντάδων Logisticem,

eine Tafel, die von Grad zu Grad die trigonometrischen Linien in Sexagesimalbrüchen angiebt,

2) ein mit * bezeichneter Bogen, überschrieben

Ad Logisticem per Ἑξηκοντάδας, Tabella,

eine Multiplikationstafel, ein „Einmaleins", für Sexagesimalbrüche,

3) ein mit ** bezeichneter Bogen, überschrieben

Fractionum apud Mathematicos usitatarum alterius in alteram reductionibus, tabula adcommoda,

eine Tafel zum Umrechnen von Sexagesimalbrüchen in gemeine Brüche und für die umgekehrte Aufgabe.

Es bleibt noch übrig, den Inhalt von

FRANCISCI VIÉTAEI *Universalium inspectionum ad canonem mathematicum liber singularis*

anzugeben. Hierbei sei vorweg bemerkt, dafs ständig unsere jetzige Formelsprache von mir angewandt wird und überall[18]), wo VIÉTA den Kreishalbmesser 100000 gebraucht, ich denselben = 1 setze.

S. 1 enthält den Titel, S. 2 die prop. I, die schon auf S. 8 in der Anm. wiedergegeben ist, S. 3 als prop. II den Pythagoreischen Lehrsatz in Form der beiden Proportionen: $(AB + AC) : CB = CB : (AB - AC)$ und $(AB + CB) : AC = AC : (AB - CB)$. Auf S. 4—7 prop. III, die bei

18) Ausgenommen: prop. XXV, 7) und 23).

Erklärung des „*Canonion*“ (S. 221) benutzt worden ist. S. 8 (9) prop. IV (V) *Triangulum planum rectangulum circulo adcommodatum inscriptione (circumscriptione)* — s. o. S. 220 — mit Figuren.

Auf S. 10 behandelt prop. VI die *Triangula inscripta:*

1) $s_6 = r$, $s_4 = \sqrt{2r^2}$, $s_3 = \sqrt{3r^2}$, $s_{10} + \frac{1}{2}s_6 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$,
$s_5 = \sqrt{r^2 + s_{10}^2}$ [s_n die Seite des einbeschr. regelm. n-ecks]

2) $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$,

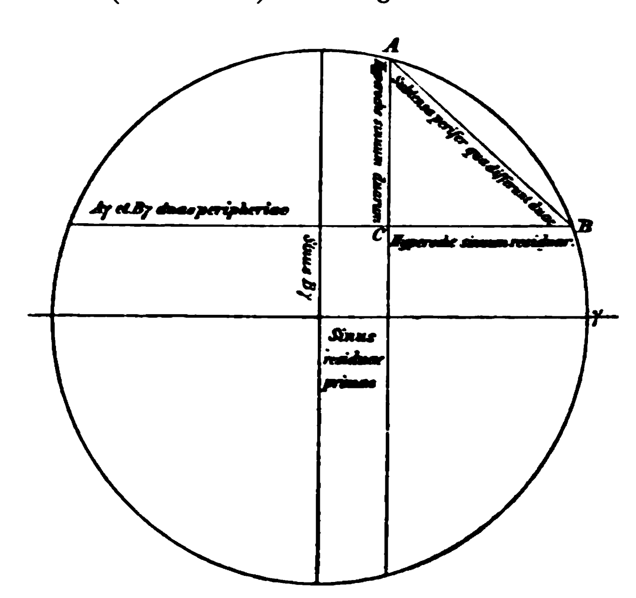
3) $\sin \text{vers}\, \alpha = 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

4) $\left(2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = (\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\beta - \cos\alpha)^2$,

unde Consectarium:

$$\sin(60^0 + \delta) - \sin(60^0 - \delta) = \sin\delta.$$

‘*Et ideò, Datis Sinubus ad partes XXX. dantur Sinus reliqui soli Additionis, vel Subtractionis viâ*’: also, wenn die Sinus und die Cosinus (die ‘*sinus reliquorum è recto*’) der Winkel bis 30⁰ bekannt sind, liefert diese Formel die Sinus (und Cosinus) der übrigen Winkel nur durch Addition



und Subtraktion. Zu den 3 ersten Sätzen die Figuren auf S. 12. Zum 4. Satze auf S. 13 obenstehende Figur:

also Bogen $A\gamma = \alpha$, Bogen $B\gamma = \beta$, Sehne $AB = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$,
$AC = \sin\alpha - \sin\beta$, $BC = \cos\beta - \cos\alpha$, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$.

Für $A\gamma = 60^0 + \delta$, $B\gamma = 60^0 - \delta$, also Bogen $AB = 2\delta$ ist, wenn B mit dem Kreismittelpunkt M verbunden wird, $\sphericalangle ABM = 90^0 - \delta$, $\sphericalangle CBM = BM\gamma = 60^0 - \delta$, also $\sphericalangle ABC = (90^0 - \delta) - (60^0 - \delta) = 30$. Daher $AC = \frac{1}{2} AB = \sin\delta$, und da AC auch $= \sin(60^0 + \delta) - \sin(60^0 - \delta)$ ist, so folgt

$$\sin(60^0 + \delta) - \sin(60^0 - \delta) = \sin\delta\,.$$

Auf S. 11 in prop. VII für die *Triangula circumscripta* angegeben:

1) der Winkel des gleichseitigen Dreiecks $= 60^0$

2) $\operatorname{cosec}\alpha + \cot\alpha = \cot\frac{\alpha}{2}$,

3) $\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

Figur zu 2) und 3) auf S. 13.

S. 14, Prop. VIII. Definitionen.

S. 15, Prop. IX. $3{,}141\,592\,653\,7 > \pi > 3{,}141\,592\,653\,5$,

Mittelwert $3{,}141\,592\,653\,6$;

(dazu in den *Additamenta* auf S. 69 noch angegeben: $r = 0{,}318\,309\,886\,2$ in Teilen der Peripherie)

$$0{,}000\,290\,888\,205\,6 > \sin 1' > 0{,}000\,290\,888\,195\,9\,,$$

Mittelwert $0{,}000\,290\,888\,204\,6$.

S. 16, Prop. X. Definitionen.

S. 16—17 eine längere Auslassung über Einrichtung und Berechnung der Tafel. In derselben wird den Dezimalbrüchen der Vorzug vor den Sexagesimalbrüchen gegeben.

S. 18—22, Propp. XI—XIII. Trigonometrische Sätze, an rechtwinkligen ebenen Dreiecken abgeleitet. Als Beispiele führe ich an von S. 20 in Prop. XIII:

1) $1 : 2\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} : (1 - \cos\alpha) = \sin\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) : \sin\alpha$

2) $1 : 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} : (\cos\beta - \cos\alpha)$

$$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2} : (\sin\alpha - \sin\beta);$$

es ist also

1) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

2) $\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

und $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

S. 23: Prop. XIV, Sinus-Satz für das ebene rechtwinklige **Dreieck**, abgeleitet *„ex inscriptione Trianguli in Circulo"*.

S. 24: Prop. XV, 1) Cosinus-Satz.

S. 25 (so lies st. 33):

Prop. XV, 2) Derselbe Satz mit anderer Ableitung.

3) *„Anceps triangulum"*, wenn a, b, α gegeben sind.

S. 26 (nicht 34):

Prop. XV, 4) Ein $\triangle ABD$ mit umbeschriebenem Kreise, Transversale DG verlängert bis zum Durchschnitt mit dem Kreise in L, dann $DG:BG = AG:GL$ (Sehnen-Satz) und $2DG < AD + BD$.

S. 26—28:

Prop. XV, 5) *In Miscellaneis denique Planorum Selectiores aliquot Analogiae, ac primum*

ΕΙΔΙΚΩΤΕΡΑΙ.

j) Proportionen am rechtwinkligen Dreieck, in dem die Höhe zur Hypotenuse konstruiert ist.

ij) — *v*) Verwickeltere Sätze, z. B. *iiij* ein Satz über das in ein Dreieck beschriebene Quadrat.

S. 28 und 29. ΓΕΝΝΙΚΩΤΕΡΑΙ[19]).

j) *In linea recta:*

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}[(a+b)^2-(a^2+b^2)]} : a = b : \sqrt{\tfrac{1}{2}[(a+b)^2-(a^2+b^2)]}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2} : a = b : \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

ij) *In linea secta media et extrema ratione:*

$$a : x = x : (a-x);\quad x = \sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2};\quad (a+x) : a = a : x;$$

$$(2a-x) : (a-x) = a : \frac{2a-x}{5};\quad (a-x) : x = (2x-a) : (a-x).$$

iij) *In duabus lineis.*

$a : b = ab : b^2 =$ [20]) $a^2 : ab$.

iiij) *In tribus proportionalibus.*

Wenn $a : b = b : c$, dann $a : c = a^2 : b^2$

und [20])

$$c : \sqrt{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2} : (a+b).$$

---

19) γενικώτεραι ist gemeint.

20) Aus den *Additam.* (S. 69) ergänzt.

v) In quatuor continue proportionalibus.

Wenn $a:b = b:c = c:d$, dann $a:d = b^3:c^3$.

vj) Sectio quadrati.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 2a^2 + 2b^2 - (a-b)^2.$$

vij) Sectio cubi.

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b.$$

Noch auf S. 29:

Prop. XV, 6) „*Quatuor continue Proportionalium Diagrammata*", 3 Figuren, in die solche 4 stetig proportionierte Linien eingezeichnet sind.

S. 30:

Prop. XV, 7) „*Ex dato rectangulo aequali ei, quod sub Lateribus continetur, cum Differentiâ, vel aggregato eorundem, dantur Latera.*"

Also gegeben $x \mp y$ und xy, gefordert x und y. Die Lösung ist sehr weitschweifig. In den Additamenta (S. 69) die elegante Lösung: suche $\left(\frac{x \pm y}{2}\right)^2$ aus $\left(\frac{x \mp y}{2}\right)^2 \pm xy$.

S. 31 (so lies statt 39):

Prop. XV, 8) „*Ex dato rectangulo aequali ei, quod sub Lateribus continetur, cum Ratione eorundem, alterius ad alterum, dantur Latera.*"

Also die Aufgabe, aus $x \cdot y$ und $x:y$ x und y zu finden. Hier soll aus den „Additamenta" (S. 70, 71) eingefügt werden:

Prop. XV, 9) *Regula, quam vocant, Falsi.*

„*Si duae proponantur lineae, à tertiâ quâpiam discrepantes, & nota sit affectio illarum discrepantium, deficientiae, an excessus, ipsa etiam ratio deficientiarum, vel excessuum inter se, vel excessus ad deficientiam, erit tertia Linea data.*" Es werden also drei Fälle unterschieden:

I. $(a-x):(b-x) = m:n$, II. $(x-a):(x-b) = m:n$,

III. $(a-x):(x-b) = m:n$.

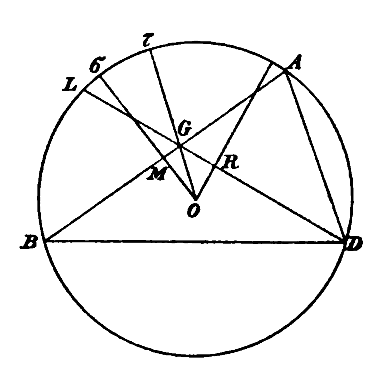
Die Lösungen werden auf geometrischem Wege gesucht; zu II auch ein Zahlenbeispiel: $(x-12):(x-36) = 12:8$, also $= 3:2$, Lösung 84.

S. 32 (so lies statt 40) u. 33:

Prop. XVI: *Plani obliquanguli in obliquangula secti theoria & adsequendi Methodus aliquibus datis.*

Das schiefwinklige Dreieck ABD sei durch DG in zwei schiefwinklige Dreiecke DGA und DGB geteilt, und gegeben sei $\sphericalangle ADB$, $DG:GB$ oder $DG:GA$, ferner $GB:GA$. Dann seien die Dreiecke DGA und

DGB (der Gestalt nach) bestimmt. O Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, $OM \perp AB$, $OR \perp DG$. Aus $LG \cdot DG = GA \cdot GB$ und den gegebenen Verhältnissen läſst sich die Maſszahl für LG finden, ebenso die Maſszahl für r aus $\frac{GA + GB}{2} : \sin AOD$, die für LR aus $\frac{LG + GD}{2}$, die für GR aus $LR - LG$. Ferner ist $\sin ROL = \frac{DL}{2r}$ und $\sin ADB = \frac{AB}{2r}$, also $\sin ROL = \frac{AB}{DL} \cdot \sin ADB$ und $RO = r \cos ROL$. Dann kann man $\operatorname{tg} GOR$ aus $GR : RO$ finden; endlich aus $OM = r \cos ADO$ und $MG = BG - \frac{BG + GA}{2}$ die $\operatorname{tg} GO\sigma$.



(S. 32, Z. 5 v. u. lies GL statt AL, S. 33, Z. 2 lies GOR statt gOa, S. 33, Z. 7 v. u. lies $GO\sigma$ statt gOn.)

S. 34: Prop. XVII. Für das sphärische rechtwinklige Dreieck sollen dieselben Bezeichnungen gelten, wie für das ebene rechtwinklige, also AB für die Hypotenuse u. s. w. (s. Prop. I).

S. 35—41: Propp. XVIII bis XXII. Auflösung des sphärischen rechtwinkligen Dreiecks, im Wesentlichen übereinstimmend mit Op. math. ed. v. Schooten, S. 427 und 428.

NB. Auf S. 72 und 73 Verbesserung der Seiten 36 und 37.

S. 42, 43: Prop. XXIII (verdruckt XXII). 1) Sphärischer Sinussatz, 2) seine Anwendung, 3) Teilung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks in zwei rechtwinklige.

S. 44—49: Prop. XXIV ... auf S. 44 fehlt die Angabe der Prop., ergänzt auf S. 74 unter „*Errata alia nonnulla*".

1) (S. 44) *Ex coacervatione duarum Peripheriarum, & ratione sinuum eorundem, discernentur Peripheriae.*
2) (S. 45) *Ex differentia duarum Peripheriarum, & ratione sinuum corundem, discernentur Peripheriae.*
3) (S. 46—49) Schiefwinkliges sphärisches Dreieck, wenn entweder die Seiten oder die Winkel gegeben sind. Auflösungen in engem Anschluſs an Regiomontan, der citiert wird.

S. 50, Prop. XXIV (soll heiſsen XXV, verbessert auf S. 74). *Angulum Planisphaericum.*

1) In Planisphaericis *Καθολικώτερα.*

I. Ut Diameter ad Diametrum, ita est Peripheria ad Peripheriam. Papp. Theor. 5 lib. xj.

II. Angulus ex Peripheria & Diametro minor est angulo Recto, sed maior quouis Acuto. Eucl. Prop. 16 lib. iij Element.

S. 51:

Prop. XXV, 2) arc 10 800′ = 3,141 592 653 6

arc 1′ = 0,000 290 888 208 672

1 = arc 3 437′,746 770 3 (also arc 57° 17′ 44″,806 22).

3) Teilung nach dem goldenen Schnitt.

Tota	*Maius segm.*	*Minus segm.*
1	0,618 033 988 9	0,381 966 011 2
2,618 033 988 9	1,618 033 988 9	1
1,618 033 988 9	1	0,618 033 988 9.

Tota	*Proportionalis inter totam & maius segmentum*
1	0,786 151 377 7
1,272 019 649 6	1.

Tota continuata minore segmento	*Minus segmentum*
1,381 960 011 2	0,381 960 011 2
1	0,276 393 202 2
3,618 033 988 9	1.

4) *Geodaesia Triangulorum.* Sätze über den Flächeninhalt von Dreiecken.

S. 52:

Prop. XXV, 5) *Geodaesia Circuli.*

6) *Geodaesia Sphaerarum.*

7) *Ad Circulos Superficiesque Sphaerarum è Diametris, & harum soliditates è Cubis, & è contra Adpositi numeri.*

Diameter.	*Quadratum Diametri.*	*Circulus. Plana Superficies, subquadrupla Sphaericae superficiei.*
200 000	400 000 000 00	314 159 265 36
100 000	100 000 000 00	78 539 816 34
159 577	254 647 908 94	200 000 000 00
112 838	127 323 954 47	100 000 000 00

Diameter.	*Cubus.*	*Soliditas Sphaerae.*
2 000 [21])	8 000 000 000	4 188 890 205 [22])
2 155 [21])	10 000 000 000	5 235 987 756

S. 52:

Prop. XXV, 8) *Ad Sphaeras è Diametris & è contra, Archimedaea mensura.*

Diameter.	*Quadratum Diametri.*	*Cubus.*	*Sphaera.*
$\frac{1}{40}$ *digiti*	$\frac{1}{1600}$	$\frac{1}{64000}$ *digiti*	*Papaver ferè* $\frac{10000}{1}$ *Arenae* [23]) *ferè.*

Bei 7) und 8) sind die auf S. 74 angegebenen Verbesserungen benutzt worden.

S. 53:

Prop. XXV, 9) *Quadratura Hippocratica Menisci.* Mit Figur und eingeschriebenen Zahlen.

10) *Parabole.* Figur mit den Abscissen 3, 6, 9 und den Ordinaten $\sqrt{27}$, $\sqrt{54}$, $\sqrt{81}$ (Parameter also 9).

11) *Quadratura Paraboles Euclidaea.* Figur mit eingeschriebenen Zahlen.

12) *Latus Quadrati Circulo circumscripti* 2, *inscripti* 1,414 213 562 4, *aequalis* 1,772 453 850 9.

S. 54:

Prop. XXV, 13) *Duae Mediae continuè proportionales inter Semidiametrum, & Latus Quadrati inscripti*

1,122 462 05 und 1,259 921 06.

14) *Duae Mediae in eâdem proportione continua inter L. Quadrati inscripti, & L. circumscripti, seu Diametrum:*

1,587 401 06 und 1,781 797 44.

15) *Duae ex his Mediae inter Semi-diametrum, & Diametrum.*

Norma duplicationis cubi:

1,259 921 06 und 1,587 401 06.

---

21) Diese Zahlen sind auf S. 74 gegen einander vertauscht; übrigens $\sqrt[3]{10\,000\,000\,000} < 2\,154$.

22) Soll heifsen 4 188 790 205.

23) Archimedes setzt 1 papaver $= \frac{1}{64\,000}$ digiti $=$ 10 000 Sandkörner, „*Arenae*“.

S. 54:

Prop. XXV, 16) *Proportionalis Media inter L. Quadrati inscripti, & L. circumscripti:*

1,681 792 84.

17) Figur zu 13).

18) Figur zu 16).

S. 55:

Prop. XXV, 19) *Detecta tandem reductionis Peripheriae ad lineam rectam, & tetragonismi circuli Orontiana & aliorum pseudographia.*

Eine lange Auseinandersetzung über die Möglichkeit der Rektifikation der Kreislinie und die Quadratur der Kreisfläche. Von Interesse scheint mir zu sein, daſs Viéta für die Unmöglichkeit der Lösung beider Aufgaben eintritt, wenn auch mit Gründen, die nicht durchschlagend sind.

Am Schluſs dieser Auseinandersetzung sagt Viéta:

Alterũ latus è medijs proportionalibus inter latus inscripti, & circumscripti prodidit Orontius *aequale quadranti Perimetri, alterũ lateri Quadrati Circulo aequalis.*

Viéta weist diese Behauptungen mit der Begründung zurück: die erste mittlere Proportionale (s. Prop. XXV, 14) sei

$$> 1{,}587\,40\,, \qquad \frac{\pi}{2} \text{ aber } < 1{,}570\,80\,,$$

die zweite mittlere Proportionale (eod. l.) sei

$$> 1{,}871\,79\,, \qquad \sqrt{\pi} \text{ aber } < 1{,}772\,46.$$

Schluſswort: „*Arguitur nõ dissimili methodo in alijs aliorúmque Tetragonismis error, & vitium, vt omnino abhorrenda sit ista ingeniorum crux, & operâ & otio deinceps non abutẽdum, praesertim vbi semel nacti fuerimus expeditum & facilem Tetragonismum, & satis propinquum vero.*“ Es folgen dann

S. 56—58:

Prop. XXV, 20) und 21) Näherungs-Konstruktionen für beide Aufgaben, die aus den Op. math. ed. v. Schooten S. 392, 393 schon bekannt sind; beide kommen darauf hinaus, daſs $\pi = 0{,}6\,(3 + \sqrt{5})$, also $= 3{,}141\,64$ gesetzt wird.[24])

---

24) Cantor, Bd. 2, S. 546, 547. — Aus der „*Mathematici Canonis Epitome*“ (s. o. S. 220, 221) ergiebt sich arc 15° = 0,261 799, also arc 150° = 2, 617 99; das ist annähernd (s. o. S. 233, Z. 13) $2{,}618\,03 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Folglich

$$\pi = \text{arc}\,180^\circ = \frac{6}{5}\,\text{arc}\,150^\circ = \frac{6}{5}\cdot\frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 0{,}6\,(3 + \sqrt{5}).$$

Noch auf S. 58:

Prop. XXV, 22) *Uti Sector quilibet commodè quadretur, modò ratio Perimetri ad Basim Sectoris non ignoretur.* Lösung unter Anwendung von XXV, 21).

23) *Latera Quinque regularium corporum inscriptorum Sphaerae.* (Unter Berücksichtigung der auf S. 74 unter *Errata alia nonnulla* gegebenen Berichtigungen.)

Qualium Diameter Sphaerae	*L.* 40 000 000 000	$200\,000\frac{000\,00}{}$
Talium Latus Pyramidis, seu Tetraëdri	*L.* $26\,666\,666\,666\frac{2}{3}$	$163\,299\frac{310\,28}{}$ [25]
Latus Cubi, seu Exaëdri	*L.* $13\,333\,333\,333\frac{1}{3}$	$115\,470\frac{053\,84}{}$
Latus Octaëdri	*L.* 20 000 000 000	$141\,421\frac{356\,24}{}$
Latus Icosaëdri	*L.* 11 055 728 090 ἔγγυστα	$195\,146\frac{222\,42}{}$ [26]
Latus Dodecaëdri	*L.* 5 092 880 149 ἔγγυστα	$71\,364\frac{417\,95}{}$

Die Seite des Icosaëders ist berechnet worden aus $r\sqrt{2-\sqrt{0{,}8}}$, also aus

$$\sqrt{2\cdot 10^{10}-\sqrt{8\cdot 10^{19}}}=\sqrt{20\,000\,000\,000-8\,944\,271\,910}$$
$$=\sqrt{11\,055\,728\,090},$$

die des Dodecaëders aus $r\left[\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$, also aus

$$\sqrt{16\,666\,666\,666\frac{2}{3}}-\sqrt{3\,333\,333\,333\frac{1}{3}}=129\,099\frac{444\,87}{}-57\,735\frac{026\,92}{}.$$

S. 59:

Prop. XXV, 24) *Duplicatio Cubi.*

Diese Näherungs-Konstruktion gewährt einen Blick in die Gedanken-Werkstatt Viéta's:

$$\text{Nach XXV, 14) ist } 1{,}781\,797\,44 = 1{,}414\,213\,56\,\sqrt[3]{2}=\sqrt{2}\,\sqrt[3]{2}$$
$$\text{„ XXV, 16) „ } 1{,}681\,792\,84=\sqrt{2.1{,}414\,213\,56}=\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}$$

Nun ist $1{,}781\,797\,44 - 1{,}681\,792\,84 = 0{,}100\,004\,60$, also sehr nahe $=\frac{1}{10}$.

Man kann daher näherungsweise $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{2}=\sqrt{2}\,.\,\sqrt[4]{2}+\frac{1}{10}$ oder $a\sqrt[3]{2}$ $=a\sqrt[4]{2}+\frac{1}{20}\cdot a\sqrt{2}$ setzen. Viéta spricht das so aus: „*Si sunt quatuor*

---

25) Soll heifsen $163\,299\frac{310\,18}{}$. 26) Soll heifsen $105\,146\frac{222\,42}{}$

Rectae continuè proportionales, quarum Quarta sit dupla ad Primam potentiâ: Erit Tertia, ut Media proportionalis inter Potentem Rectangulum sub mediis vel extremis contentum, & Quartam, continuata vigesimâ parte Quartae ἔγγυστα."

Ist $a : x = x : y = y : a\sqrt{2}$, also $x = a\sqrt[6]{2}$ und $y = a\sqrt[3]{2}$, so giebt $\sqrt{a\sqrt[3]{2}\,a\sqrt[6]{2}}$ oder $\sqrt{a\,.\,a\sqrt{2}}$ (beides $= a\sqrt[4]{2}$), vermehrt um $\frac{1}{20}a\sqrt{2}$ annähernd $a\sqrt[3]{2}$. Wirklich ist $\sqrt[4]{2} + \frac{1}{20}\sqrt{2} = 1{,}259\,918$, $\sqrt[3]{2} = 1{,}259\,921$.

Die Konstruktion gestaltet sich sehr einfach: Suche zwischen der Seite und der Diagonale des Quadrats, über welchem der Würfel errichtet ist, die mittlere Proportionale und verlängere dieselbe um $\frac{1}{20}$ der Diagonale.

S. 60—66. *Demonstratio Limitum Analogiae Perimetri Circuli ad Diametrum.*

Am besten glaube ich die Darstellung mit S. 64, 65 zu beginnen.

Viéta geht aus von $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, schliefst dann $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ zwischen Grenzen ein:

$0{,}866\,025\,403\,8 > \cos 30^0 > 0{,}866\,025\,403\,7$, ebenso sin vers 30^0:

$0{,}133\,974\,596\,2 < \text{sin vers } 30^0 < 0{,}133\,974\,596\,3$, bildet dann

$0{,}066\,987\,298\,1 < \frac{1}{2}\text{ sin vers } 30^0 < 0{,}066\,987\,298\,2$, also

$0{,}066\,987\,298\,1 < \sin^2 15^0 < 0{,}066\,987\,298\,2$ und

$0{,}933\,012\,701\,9 > \cos^2 15^0 > 0{,}933\,012\,701\,8$, daher

$0{,}965\,925\,826\,3 > \cos 15^0 > 0{,}965\,925\,826\,2$

$0{,}034\,074\,173\,7 < \text{sin vers } 15^0 < 0{,}034\,074\,173\,8$ u. s. w.

Auf S. 63 wird $\text{tg}^2\,\alpha$ berechnet aus $\sin^2\alpha : \cos^2\alpha$, der obere Grenzwert aus dem oberen für $\sin^2\alpha$, dem unteren für $\cos^2\alpha$, der untere Grenzwert aus dem unteren für $\sin^2\alpha$, dem oberen für $\cos^2\alpha$, also

$$\frac{669\,872\,982}{9\,330\,127\,018} > \text{tg}^2\,15^0 > \frac{669\,872\,981}{9\,330\,127\,019} \text{ oder}$$

$$0{,}071\,796\,769\,9 > \text{tg}^2\,15^0 > 0{,}071\,796\,769\,7 \text{ u. s. w.}$$

Nach S. 62, Abs. 1 soll $\cot^2\frac{\alpha}{2}$ aus $2(\cot^2\alpha + \text{cosec}^2\,\alpha) - \text{tg}^2\frac{\alpha}{2}$[27])

---

27) S. 62, Abs. 2, abgeleitet aus Prop. XV, 5) „γενικώτεραι" *vj*:

$$2(a^2 + b^2) - (a - b)^2 = (a + b)^2$$

für $a = \text{cosec}\,\alpha,\quad b = \cot\alpha,\quad a - b = \text{cosec}\,\alpha - \cot\alpha = \text{tg}\,\frac{\alpha}{2},$

$$a + b = \text{cosec}\,\alpha + \cot\alpha = \cot\frac{\alpha}{2}\,.$$

berechnet werden. Da $\cot^2 30 = 3$, $\operatorname{cosec}^2 30 = 4$, und (s. 2 Z. **vorher**)

$$0{,}0717967699 > \operatorname{tg}^2 15^0 > 0{,}0717967697 \text{ ist, ergibt sich}$$

$$2(4+3) - 0{,}0717967697 > \cot^2 15^0 > 2(4+3) - 0{,}0717967699 \quad \text{oder}$$

$$13{,}9282032303 > \cot^2 15^0 > 13{,}9282032301.$$

Für 30^0 sind die Werte für $\cot^2\alpha$ und $\operatorname{cosec}^2\alpha$, 3 bezw. 4, **genau**. Weiter soll nach S. 62, Abs. 5, so verfahren werden: um die $\begin{Bmatrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{Bmatrix}$ Grenze für $\cot^2\frac{\alpha}{2}$ zu finden, sollen für $\operatorname{cosec}\alpha$ und $\cot\alpha$ die $\begin{Bmatrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{Bmatrix}$ Grenzwerte, für $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ der $\begin{Bmatrix}\text{untere}\\ \text{obere}\end{Bmatrix}$ Grenzwert eingesetzt werden.

Endlich (S. 62, Abs. 3) soll $\operatorname{cosec}^2\alpha$ aus $1 + \cot^2\alpha$ berechnet werden, z. B.

$$14{,}9282032303 > \operatorname{cosec}^2 15^0 > 14{,}9282022301.$$

Auf S. 60 und 61 eine Tafel, welche die Grenzwerte für die Quadrate der Sinus, der Cosinus, der Tangenten, der Cotagenten und der Cosekanten enthält für die Winkel bis zu $\frac{60^0}{2^{17}}$, also bis zu $\frac{225'}{8192}$.

S. 66, Abs. 1. $$\pi^2 > \frac{n^2}{\operatorname{cosec}^2\frac{180^0}{n}},$$

wenn n die Zahl der Seiten des einbeschriebenen regelmäfsigen Vielecks bedeutet und für $\operatorname{cosec}^2\frac{180^0}{n}$ der obere Grenzwert genommen wird. Die Tafel auf S. 60, 61 geht bis zum Vieleck mit $3 \,.\, 2^{17} = 393216$ Seiten und giebt für $\frac{180^0}{3\,.\,2^{17}} = \frac{60^0}{2^{17}} = \frac{225'}{8192}$:

$$15666162125{,}4 > \operatorname{cosec}^2\alpha > 15666162125{,}0.$$

Daher $$\pi^2 > \frac{154618822656}{15666161225{,}4} \text{ oder } > 9{,}86960440076,$$

also $$\pi > 3{,}1415926535.$$

S. 66, Abs. 2: $$\pi^2 < \frac{n^2}{\cot^2\frac{180^0}{n}},$$

für die gleiche Bedeutung von n und den unteren Grenzwert von $\cot^2\frac{180^0}{n}$. Nun ist nach der Tafel auf S. 60, 61

$$15666162124{,}4 > \cot^2\alpha > 15666162124{,}0,$$

daher $$\pi^2 < \frac{154618822656}{15666162124{,}0} \text{ oder } < 9{,}86960440166,$$

also $$\pi < 3{,}1415926537.$$

S. 67. *Demonstratio Limitum Sinus unius scrupuli.*

Nach den *Theoremata ad angulares sectiones, demonstrata per* Alexandrum Andersonum, [Vietae op. math. ed. v. Schooten (pag. 286—304)] könnte man vermuten, daſs bei der Berechnung von sin 1′ Viéta nach den dort (S. 303, 304) gegebenen Regeln[28]) verfahren sei, zumal da Anderson im Schluſswort (S. 304) die *„sectionum angularium principia ex purioris Analyseos fonte derivata"* als *„a maximo iam a multis saeculis Mathematico* Francisco Vieta *olim excogitata et proposita"* bezeichnet. Das ist aber keineswegs der Fall.

Vielmehr entnimmt Viéta aus der Tafel auf S. 60, 61

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{225'}{128} < 3\,824\,746{,}945\,886\,102\,6,$$

also

$$\sin^2 \frac{225'}{128} > 0{,}000\,000\,261\,455\,205\,834$$

und

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{225'}{256} > 15\,298\,986{,}783\,264\,742\,9,$$

also

$$\sin^2 \frac{225'}{256} > 0{,}000\,000\,065\,363\,805\,733.$$

Da nun $\sin^2 1' < \frac{128^2}{225^2} \sin^2 \frac{225'}{128}$, wenn für $\sin^2 \frac{225'}{128}$ ein zu groſser, und

$> \frac{256^2}{225^2} \sin^2 \frac{225'}{256}$, „ „ $\sin^2 \frac{225'}{256}$ ein zu kleiner Wert

eingesetzt wird, so ist

$$\sin^2 1' < \frac{128^2}{225^2} \cdot 0{,}000\,000\,261\,455\,205\,834$$

oder

$$< 0{,}000\,000\,084\,615\,948\,100,$$

aber

$$> \frac{256^2}{225^2} \cdot 0{,}000\,000\,065\,363\,805\,733$$

oder

$$> 0{,}000\,000\,084\,615\,942\,565,$$

und als Grenzwerte ergeben sich für sin 1′

$$0{,}000\,290\,888\,205\,6 \quad \text{und} \quad 0{,}000\,290\,888\,195\,9.$$

---

28) Berechne aus der Teilung des Halbmessers nach dem goldenen Schnitt sin 18°, dann auf algebraischem Wege $\sin \frac{18^0}{5} = \sin 3^0\,36'$; ferner auf algebraischem Wege $\sin \frac{60^0}{3} = \sin 20^0$ und $\sin \frac{20^0}{3} = \sin 6^0\,40'$, hierauf $\sin 3^0\,20'$, sodann $\sin (3^0\,36' - 3^0\,20') = \sin 16'$ und unter fortgesetztem Halbieren des Arguments sin 8′, sin 4′, sin 2′, sin 1′. Die durch ein Annäherungsverfahren zu lösenden Gleichungen sind (Probl. I und II, a. a. O. S. 301) $3r^2 \operatorname{chord} \alpha - \operatorname{chord}^3 \alpha = r^2 \operatorname{chord} 3\alpha$ und $5r^4 \operatorname{chord} \alpha - 5r^2 \operatorname{chord}^3 \alpha + \operatorname{chord}^5 \alpha = r^4 \operatorname{chord} 5\alpha$.

„Quoniam verò inter Peripherias $\frac{450}{256}$ *&* $\frac{225}{256}$ *vnius scrupuli, non omninò media est Peripheria* $\frac{256}{256}$ *quaesita, sed hâc maior* $\frac{31}{256}$, *illâ vero minor* $\frac{194}{256}$[29]. *Differentia inter sinum maiorem & minorem inaequaliter secanda est, servatâ Analogiâ, & maius segmentum addendum minori verâ, vel à maiore minus auferendum, vt prodeat tandem Sinus vnius scrupuli satis accuratè.“*

Gemeint ist die Anwendung der Regula Falsi (Prop. XV, 9) für den dritten Fall, $(a - x) : (x - b) = m : n$. VIÉTA giebt a. a. O. die Lösung

$$x = b + \frac{n}{m+n}(a - b) \quad \text{oder} \quad = a - \frac{m}{m+n}(a - b).$$

Dieses Verfahren würde für sin 1′ den Wert 0,000 290 888 204 3 liefern, während VIÉTA sowohl auf S. 67, als auch auf S. 15 an letzter Stelle eine 6 angiebt.

Schlufswort auf S. 67:

Porro Sinu vnius scrupuli satis accuratè ita comparato, comparantur ex Analogia Ia inspectionis XIIIae sinus duorum scrupulorum, deinde quatuor, pòst octo, sexdecim, & ita continuè duplando. Sinus vero ad tria scrupula, vel ex collatione duorum extremorum satis accuratè constituetur[30]), *ex quo deinde sinus elicietur sex scrupulorum, XII. XXIV & ita deinceps, donec Canonica series, pro instituti ratione compleatur. Atque hic esto tandem*

Explicitus

Universalium Inspectionum ad Canonem

Mathematicum, Liber singularis.

---

29) So lies für $\frac{99}{256}$.

30) Gemeint ist wohl, sin 3′ genügend genau aus $\frac{\sin 2' + \sin 4'}{2}$.

IL „GIORNALE DE' LETTERATI D'ITALIA" DI VENEZIA

E LA „RACCOLTA CALOGERÀ"

COME FONTI PER LA STORIA DELLE MATEMATICHE NEL SECOLO XVIII.

DI

GINO LORIA

GENOVA.



I.

Il 1665 è sommamente memorabile nella storia letteraria del mondo intero perchè in quell' anno cominciò ad uscire in Parigi il *Journal des Savants*, che è la prima pubblicazione periodica avente per còmpito di render conto delle nuove produzioni dell' umano ingegno. Quale sia stato il successo di tale impresa, magnanima ed ardita ad un tempo, quale sia stata l' accoglienza che ricevette, quale e quanta la influenza che esercitò, non è quì luogo per descrivere. Importa invece di notare che l' Italia non rimase spettatrice indifferente a quella pubblicazione di nuovo genere[1]). Ed invero a partire dal 1668 e sino al 1681 l' Abate Francesco Nazari pubblicò a Roma un *Giornale de' Letterati*, il quale è in parte una traduzione di quello francese, ma in parte è una raccolta di notizie sopra lavori italiani non menzionate in quello. L' esempio del Nazari venne ben tosto seguito in varie parti della penisola, onde sono numerose le pubblicazioni italiane di quell' epoca tagliate sul modello del *Journal des Savants*: così Pietro Moretti e Francesco Miletti diressero dal 1671 al 1689 il *Giornale Veneto*, il Padre Roberti e l' Abate Bacchini diedero fuori dal 1686 al 1689 il *Giornale di Parma*, al quale seguirono dal 1692 al 1697 il *Giornale di Modena*, dal 1688 al 1689 il *Giornale di Ferrara*, nel 1696 a Venezia la *Galleria di Minerva* e uel 1701 il *Gran Giornale di Forlì*.

Questi giornali — la cui imperfezione può misurarsi dalla vita effimera che ebbero — servirono, se non ad altro, a porre in piena luce la somma utilità di un' opera periodica contenente dei resoconti fedeli intorno alle opere stampate in Italia, senza escludere quelle investigazioni parziali troppo brevi per dare argomento ad un intero libro. Onde non deve recare meraviglia se ad un letterato di alta e ben acquistata rinomanza, qual era Apostolo Zeno, abbia sorriso l' idea di porsi alla testa di un' impresa di tal fatta, se non abbia penato a trovare nel fratello suo Pier Catarino Zeno e in Scipione Maffei, Antonio Vallisneri e Giovanni Poleni quattro coadiutori dotti, intelligenti, volonterosi, e nel Granduca di Toscana un

1) Lo si potrebbe credere osservando che, fra i periodici analoghi al *Journal des Savants* ricordati da M. Cantor, (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, T. III, p. 8), non se ne trova alcuno di patria italiana.

protettore augusto e potente. Per tal modo potè venir pubblicato a Venezia nel 1710 il primo volume del *Giornale de' letterati d' Italia*. La pianta novella mise bentosto salde radici, tanto che potè sopravvivere al morbo, che sembrava dovesse tornarle fatale, da cui venne colpita nel 1718, per la chiamata a Vienna di colui che avevala seminata e con tanto amore coltivata. Nella direzione del *Giornale* ad Apostolo seguì Pier Catarino Zeno; tale passaggio segna un' indiscutibile decadimento di quel periodico: tuttavia esso potè raggiungere il trentasettesimo volume, senza contare i tre, di eguale formato, intitolati *Supplementi al Giornale de' letterati d' Italia*, che apparvero sotto la protezione del Duca di Parma Francesco I, per cura del Conte Girolamo Leoni e coll' ajuto di Jacopo Riccati[2]). La malattia e poi le morte di Pier Catarino fecero interrompere la pubblicazione del *Giornale*; più tardi l'editore riuscì a mettere insieme un XXXVIII tomo, a cui poi ne vennero aggiunti due altri: ma il 1740 segna la morte dell' ottima effemeride in cui per trent' anni si è fedelmente riflessa la vita intelletuale d' Italia.

Durante il periodo di decadenza e dopo che si spense il *Giornale de' letterati d' Italia*, altre opere congeneri vennero concepite ed effettuate in ogni parte del bel paese, a Venezia come a Firenze, a Roma non meno che a Palermo. Non importa l' enumerarle tutte, ma bisogna citarne almeno tre. Una è intitolata *Osservazioni letterarie che possono servire di continuazione al Giornale de' Letterati d' Italia;* è una pubblicazione in sei tomi fatta de Scipione Maffei, sotto gli auspici dell' imperatore Carlo VI, durante gli anni 1737—1740. Una seconda è la *Minerva, o sia Nuovo Giornale de' letterati d' Italia,* uscita a Venezia del 1762 al 1766 sotto la protezione di Ferdinando IV, re delle Due Sicilie: essendo questo periodico ed il precedente informati in massima ai concetti che Apostolo Zeno pose a base di quello da lui fondato, devono considerarsi come un naturale proseguimento di questo. Simile ufficio, rispetto ai *Supplementi* più sopra citati, fa la *Raccolta di opuscoli scientifici* e *filologici* compilati da Angiolo Calogerà: di questa collezione, importantissima per la storia scientifica dell' Italia, mi occuperò nella seconda parte del presente articolo. Quì osservo che il *Giornale de' letterati d' Italia* con i *Supplementi,* le *Osservazioni* del Maffei e la *Minerva* formano un tutto che i matematici conoscono forse unicamente perchè accolsero alcuni scritti di Jacopo Riccati e quegli «schediasmi matematici» che trassero dall' oscurità il Conte di Fagnano e lo posero in prima linea fra i dotti dell' età che fu sua. Ma, poichè

2) È questi la «persona dotta a meraviglia» con cui il compilatore dice d'essersi consigliato.

quegli articoli vennero ripubblicati nella raccolta delle *Opere* del RICCATI e questi schediasmi sono *magna pars* delle famose *Produzioni matematiche,* nessuno, o quasi, pensa oggi di ricorrere ai simpatici volumetti in-18. che per primi li accolsero. Da ciò deriva che alcune altre non trascurabili investigazioni, pubblicate nel *Giornale* del quale ci stiamo occupando, passarono inosservate anche ai più diligenti cultori della storia delle scienze esatte. Per rimediare a tal fatto deplorevole, presentiamo quì il completo

Indice delle memorie matematiche contenute nel «Giornale de' letterati d' Italia» di Venezia.

1. Metodo d' investigare l' Orbite de' Pianeti, nell' ipotesi che le forze centrali o pure le gravità degli stessi Pianeti sono in ragione reciproca de' quadrati delle distanze, che i medesimi tengon dal Centro, a cui si dirigono le forze stesse. Del Sig. GIO. JACOPO ERMANNO[3]), Pubblico Professore di Matematica nello Studio di Padova. T. II, 1710, p. 447—467.

2. Metodo di trovare l' orbita, che descrivono i Pianeti, qualunque sia la loro forza chiamata Centrale, con una regola per la detta forza dentro un mezzo di variante densità, che resista al mobile. Del Sig. GIUSEPPE VERZAGLIA, da Cesena. T. III, 1710, p. 495—510.

3. Tre problemi Geometrici con un Sistema sopra la Gravità, proposti dal Sig. GIOVANNI CEVA, e sciolti dal Sig. BERNARDINO ZENDRINI. T. IV, 1710, p. 316—340.

4. Continuazione dell' Articolo XV del Tom. II di questo Giornale; ovvero: Soluzione generale del Problema inverso delle Forze centrali, per via del metodo ivi proposto, e solo applicato ad un' ipotesi particolare. Con l' aggiunta d' una Soluzione d' un' (*sic*) altro Problema più generale toccante le forze requisite ad un mobile per descrivere in un mezzo fluido e resistente (qual sia la legge delle resistenze) una data Curva. Del Sig. GIO. JACOPO ERMANNO, Pubblico Professore di Matematiche nello Studio di Padova. T. V, 1711, p. 312—335.

5. Ristretto di una lettera del Sig. VARIGNON dell' Accademia Regia delle Scienze di Parigi, ad un suo Amico in Italia, circa la controversia dei *più ch' Infiniti*; tradotto dal Francese in Italiano. T. V, 1711, p. 336—341.

6. Breve aggiunta agli articoli XV e XVI del Secondo, e Quinto Tomo del Giornale de' letterati d' Italia. Del Sig. JACOPO ERMANNO. T. VI, 1711.

7. Estratto di una Lettera del P. GUIDO GRANDI al sig. N. N. in risposta di quella del Sig. VARIGNON inserita nel Giornale precedente

---

3) HERMANN.

Articolo XVII circa la controversia dei *Più che Infiniti.* T. VI, 1711, p. 308—314.

8. Considerazioni sopra l' articolo XVI del Tomo V del Giornale de' Letterati, nel quale si tratta del Problema inverso generale delle forze centrali nel voto, e di questo in un mezzo fluido, e resistente, presupposta qualsia legge delle resistenze. Del Sig. GIUSEPPE VERZAGLIA, da Cesena. T. VI, 1711, p. 411—440.

9. Riflessioni geometriche in difesa dell' Articolo XVI del T. V del Giornale de' Letterati, intorno ai Problemi delle forze Centrali nel voto, e nel pieno, contro l' impugnazioni fattene nell' art. XI del tomo sesto del Giornale. Del Sig. JACOPO ERMANNO, Pubbl. Prof. di Matematiche nello Studio di Padova. T. VII, 1712, p. 173—229.

10. Modo generale di ritrovare la linea di refrazione, che viene da' corpi celesti alla superficie della terra in qualsivoglia supposizione di densità variante dell' aria, supposta pure questa di figura sferica intorno alla terra, con la legge della forza centrale, che obbliga il raggio a descrivere la stessa linea di refrazione. Del Sig. BERNARDINO ZENDRINI. T. VII, 1712, p. 136—155.

11. Soluzione generale del Problema inverso intorno a' raggi osculatori, cioè, data in qual si sia maniera per l' ordinata l' espressione del raggio osculatore, determinar la curva, a cui convenga una tal espressione. Del Sig. Conte JACOPO RICCATO. T. XI p. 204—220. [Riprodotto in *O. R.* (= *Opere del Conte Jacopo Riccati Nobile Trevigiano.* Lucca 1761—1765), T. III, p. 1—8.]

12. Metodo facile di determinare la legge delle forze Centrali, e continuamente applicate al mobile, perchè questo in vigore di quelle forze descriva nel pieno qualunque curva data; con alcune cosiderazioni importanti sopra la natura delle forze continuamente applicate. Del Sig. JACOPO ERMANNO, Pubblico Professore delle Matematiche nello Studio di Padova. T. XIII, 1713, p. 321—362.

13. Proposizione, e Soluzione di due Problemi Meccanici ultimamente pubblicati. T. XV, 1713, p. 82.

§ 1. Problemi Meccanici proposti a' Matematici d' Italia da Prete STUDIAPESI Canonico Perugino p. 83—84.

§ 2. Soluzione dei suddetti Problemi Meccanici, data dal P. Maestro D. GUIDO GRANDI, Camaldolese, Professore Ordinario di Filosofia nello studio di Pisa ecc. p. 84—87.

§ 3. Soluzione dei suddetti Problemi Meccanici, data dal Sig. GIULIO CARLO DE' FAGNANI, Patrizio di Sinigaglia p. 87—96.

14. Breve schediasma geometrico per la costruzione di una gran parte

dell' equazioni differenziali del primo grado. Del Sig. Dottor GABBRIELLO MANFREDI. T. XVIII, 1714, p. 309—315.

15. Vita di FEDERICO COMMANDINO scritta da Monsignor BERNARDINO BALDI, da Urbino, Abate di Guastalla. T. XIX, 1714, p. 140—185.

16. Risposta ad alcune opposizioni fatte dal Sig. GIOVANNI BERNULLI (*sic*) alla soluzione del Problema inverso delle forze centrali nel voto in ragione reciproca de' quadrati delle distanze, pubblicata dal Sig. JACOPO ERMANNO nel secondo Tomo del Giornale de' Letterati d' Italia, Art. XIV. Del Sig. Conte JACOPO RICCATO. T. XIX, 1714, p. 185—190. [V. anche *O. R.* T. III, p. 20—29.]

17. Problema proposto dal Sig. GIULIO CARLO DE' FAGNANI. T. XIX, 1714, p. 438.

18. Annotazioni del Sig. NICCOLÒ BERNULLI, Nipote del Sig. GIOVANNI, sopra lo Schediasma del Sig. Conte JACOPO RICCATO pubblicato nel Tomo decimonono del Giornale de' Letterati d' Italia, Articolo VII. Coll' annessa soluzione propria del Problema inverso delle forze centrali agenti in un mezzo resistente, dedotta da principj medesimi del Signor NEWTON. T. XX, 1715, p. 317—351. [V. anche *O. R.* T. III, p. 29—42.]

19. Avvertimento sopra il Problema proposto a' Geometri d' Italia[4]) T. XXI, 1715, p. 422.

20. Controrisposta alle Annotazioni del Sig. NICCOLÒ BERNULLI inserite nel XX Giornale d' Italia Art. XIII con un metodo di separar le indeterminate nell' equazioni differenziali, e con alcune riflessioni intorno le forze centrali, tanto nel voto, quanto nel pieno. Del Sig. Co. JACOPO RICCATO. T. XXI, 1715, p. 304—354. [*O. R.*, T. III, p. 42—59.][4 bis]) (vedi a p. 273).

21. Nuovo Metodo per rettificare la differenza di due Archi (uno dei quali è dato) in infinite specie di Parabole irretificabili, con la Soluzione del Problema proposto nel XIX di questo Giornale, p. 438, del Sig. GIULIO CARLO DE' FAGNANI. T. XXII, 1715, p. 229—262. [Riprodotto in *P. M.* (= *Produzioni Matematiche,* Pesaro, 1750), T. II, p. 317—330.]

22. Soluzione del Problema proposto nel Tomo XX del Giornale de' Letterati d' Italia, Artic. XIII ove, posto per centro delle forze centripete il termine d' una dritta linea, dimandasi in qual ipotesi di forze i tempi delle discese, dopo la quiete di ciascun punto di essa linea, fino al centro,

4) Il problema fu proposto da NICCOLÒ BERNOULLI nella chiusa dell' articolo n. 18. La direzione del GIORNALE avverte di averne ricevute parecchie soluzioni, che non pubblica perchè la questione è assai facile ed è risoluta da una parabola cubica. Tuttavia a quel problema sono consacrate le memorie contrassegnate, nel presente *Indice,* con i numeri 20 e 22.

sieno proporzionali alle forze corrispondenti a' principj delle discese. Del Sig. SEBASTIANO CHECCOZZI, Vicentino. T. XXIII, 1716, p. 153—181.

23. Risposta del Sig. NICCOLÒ BERNULLI, Nipote del Sig. GIOVANNI, a quelle cose che il Sig. Conte JACOPO RICCATO inserì nel T. XXI del Giornale de' Letterati d' Italia all' artic. VIII. T. XXIV, 1716, p. 105—139. [*O. R.*, T. III, p. 59—67.]

24. Giunta allo Schediasma, inserito nel XXII tomo del Giornale, sopra la maniera di rettificare, la differenza di due Archi in infinite specie di Curve Paraboliche, con una nuova proprietà della Parabola d' ARCHIMEDE, ec. Del Sig. GIULIO CARLO DE' FAGNANI. T. XXIV, 1716, p. 362—375. [V. anche *P. M.*, T. II, p. 331—335.]

25. Teorema da cui si deduce una nuova misura degli Archi Ellittici, Iperbolici e Cicloidali. Del Sig. GIULIO CARLO DE' FAGNANI. T. XXVI, p. 266—279. [*P. M.*, T. II, p. 336—340.]

26. Teorema nuovo concernente il Calcolo Integrale, di GIULIO CARLO DE' FAGNANI. T. XXVII, 1717, p. 395—400.

27. Osservazione intorno al Teorema proposto dal Sig. GIULIO CARLO DE' FAGNANI nell' art. XI del Tomo XXVII del Giornale de' Letterati d'Italia. Del Sig. NICCOLÒ BERNULLI, Pubblico Professore di Mattematica nello Studio di Padova. T. XXIX, 1718, p. 150—163.

28. Dimostrazione Analitica di un teorema il qual serve per la soluzione del Problema proposto nel T. XX del Giornale de' Letterati d' Italia all' Art. XIII. Del Sig. NICCOLÒ BERNULLI, Pubblico Professore di Mattematica nello Studio di Padova. T. XXIX, 1718, p. 163—171.

29—30. Metodo per misurare la Lemniscata, del Sig. GIULIO CARLO DE' FAGNANI. Schediasma Primo, T. XXIX, 1718, p. 258—269. Schediasma Secondo, T. XXX, 1718, p. 87—11. [*P. M.* T. II, p. 343—348 e 356—368.]

31. Difesa dell' Art. XI del Tomo XXVII di questo Giornale, del Sig. GIULIO CARLO DE' FAGNANI. T. XXXI, 1718, p. 65—82.

32. Compimento delle Soluzioni analitiche del problema proposto nel tomo XX articolo XIII, del nostro Giornale, date da' Signori NICCOLÒ BERNULLI e BASTIANO CHECCOZZI. T. XXXIII, 1721, p. 174—198.

33. Metodo per trovare nuove misure negli archi della parabola cubica primaria, del Sig. Conte GIULIO CARLO DE' FAGNANI, T. XXXIV, 1722, p. 148—158. [*P. M.* T. II, p. 369—374.]

34. Supplemento al Quinto Libro di Euclide, del sig. Co: GIULIO CARLO DE' FAGNANI. T. XXXVIII, 1726—27, p. 390—304. [*P. M.*, T. II, p. 423—464.][5])

5) Il FAGNANO è ritornato sullo stesso tema con maggior larghezza nella *Teoria generale delle proporzioni geometriche,* che si legge in *P. M.* T. I, p. 1—422.

35. Difesa dell' Articolo VII del Tomo XXXI del Giornale de' Letterati d' Italia in risposta alla Dissertazione pubblicata dal Sig. NICCOLÒ BERNULLI negli Atti di Lipsia dell' anno 1720 nel Mese di Luglio, con la soluzione d' un problema spettante al Calcolo Integrale. Del Sig. Conte GIULIO CARLO DE' FAGNANI. Supplementi, T. I, 1722, p. 157—200. [*P. M.*, T. I, p. 275—282.]

36. Della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esistenti, da cui vengono prodotte: Dissertazione fisico-matematica del Sig. Conte JACOPO RICCATO. Supplementi, T. I, 1722, p. 114—141. [*O. R.*, T. III, p. 287—297.]

37. Soluzione d' un problema appartenente al Calcolo Integrale: Del Sig. GABBRIELLO MANFREDI Pubblico Professore di Analisi nell' Università di Bologna. Supplementi, T. II, 1722, p. 241—269.

38. Sopra le leggi delle resistenze, con le quali i mezzi fluidi ritardano il moto de' corpi solidi. Dissertazione Fisico-Matematica del Sig. Co: JACOPO RICCATO. Supplementi, T. II, 1722, p. 313—343. [*O. R.*, T. III, p. 376—386.]

39. Due Soluzioni d' un problema spettante al Calcolo Integrale. Dissertazione del Signor Conte GIULIO CARLO DE' FAGNANI, Supplementi, T. III, 1726, p. 181—216. [*P. M.*, T. I, p. 293—307.]

40. Nuova, e generale proprietà de' Poligoni, del Sig. Co: GIULIO CARLO DE' FAGNANI, T. XXXVI, 1724, p. 230—240. [*P. M.*, T. II, p. 201—209.]

Lo spazio di cui disponiamo non consente che noi ci addentriamo in una completa analisi di queste memorie, non poche delle quali hanno uno spiccato carattere polemico. Vogliamo però fare un eccezione a favore di due di coloro che collaborarono al *Giornale de' letterati d' Italia*.

La prima concerne BERNARDINO BALDI, il quale ha somministrata (v. la memoria n. 15 dell' *Indice* precedente) la biografia più completa e particolareggiata a noi nota di FEDERICO COMMANDINO, erudito assai benemerito a cui il LIBRI aveva dedicate poche linee della sua storia[6]); tale biografia appartiene alla serie di *Vite inedite di matematici italiani scritte da* BERNARDINO BALDI, di cui alcuni elementi vennero pubblicati dal NARDUCCI[7]), e deve annoverarsi fra le migliori, forse perchè ha per soggetto uno che fu compatriotta e contemporaneo dell' autore. La seconda eccezione è a beneficio di GABBRIELLO MANFREDI, distinto analista, non isfuggito all' attenzione del MONTUCLA[8]) e del POGGENDORFF[9]), ma che è in pericolo di venire

6) *Histoire des sciences mathématiques en Italie,* T. III (Paris 1840) p. 118—121.

7) *Bullettino di Bibliografia ecc.,* T. XIX, p. 335—640 e T. XX, p. 197—308.

8) *Histoire des Mathématiques,* Nouvelle édition, T. II, p. 198, T. III, p. 135 e 155.

9) *Biogr.-lit. Handwörterbuch*, T. II, p. 33.

travolto nel gran mare dell' oblio, non avendo ottenuto un posto nelle *Vorlesungen* di M. CANTOR. Di lui troviamo un articolo nel *Giornale de' letterati* (v. n. 14 dell' *Indice*) ed uno nei *Supplementi* (v. n. 36). Nel primo si legge la integrazione delle equazioni differenziali di I ordine e primo grado omogenee fra due variabili x, y mediante la consueta sostituzione $t = \frac{y}{x}$; ora tale risultato e tale procedimento si sogliono[10]) attribuire a GIOVANNI BERNOULLI, il quale ne fece una fugace menzione negli *Acta eruditorum* dell' anno 1725 e li espose poi l' anno seguente[11]). Siccome d' altronde l' articolo del MANFREDI fu stampato nel 1714, così — attenendoci alla data di pubblicazione come unico criterio per risolvere le questioni di priorità — sembra inevitabile la conclusione: *l' integrazione delle equazioni differenziali omogenee di I ordine con due variabili appartiene a* G. MANFREDI. Il secondo lavoro del MANFREDI risolve una questione fondamentale di calcolo integrale che BROOK TAYLOR aveva proposta e che l' HERMANN aveva toccata. Questi, negli *Acta Eruditorum* dell' Agosto 1719[12]), aveva pubblicata la proposizione affermante che „qualsia trinomio della forma $x^{2m} + 2nax^m + a^2$ è decomponibile in fattori quadratici, purchè m sia una potenza di 2"; da ciò egli dedusse che, in tale ipotesi, l' integrale

$$\int \frac{dx}{x^{2m} + 2nax^m + a^2}$$

può esprimersi mediante archi di circolo e di iperbole; orbene nell' articolo citato del MANFREDI (articolo che porta la data 6 Agosto 1620) è dimostrato che, in generale, di analoga espressione è suscettibile ogni integrale della forma

$$\int \frac{x^{\frac{r}{p}}\, dx}{\left(x^{\frac{t}{q}} \pm a^{\frac{t}{q}}\right)^u}$$

qualunque siano gl' interi p, q, r, t, u. Tale estensione è degna di nota, non soltanto perchè risolve completamente la questione proposta dal TAYLOR, ma anche perchè libera l' enunciato della stessa da una condizione restrittiva superflua. Al citato risultato il MANFREDI giunge mostrando prima come si possano decomporre in fattori lineari o quadratici tutti i binomi del tipo $x^m \pm a^m$ qualunque sia l'intero m, e poi trasformando l' integrale precedente

10) CANTOR, *Vorlesungen*, T. III, p. 460 e p. 581.

11) *De integrationibus aequationum differentialium* (Comment. Acad. Petrop. T. I, 1726, oppure JOH. BERNOULLI, *Opera omnia*, T. III, 1742, p. 108).

12) V. l'articolo *Solutio duorum problematum* etc.

mediante la sostituzione $x = y^{pq}$. Questo artificio è tuttodì largamente applicato e quella decomposizione — benchè avrebbe bisogno di qualche osservazione complementare che ponesse in luce l' esistenza di radici reali nelle equazioni ausiliari invocate — merita di venire apprezzata da chiunque abbia presente lo stato della teoria delle equazioni in principio del Sec. XVIII.

Queste due produzioni matematiche dimostrano che il MANFREDI seppe mantenere le promesse che aveva date quando nel 1707 aveva pubblicato un' opera[13]) — la prima sul calcolo integrale che abbia visto la luce in Italia — colla quale egli intese di sopperire alla seconda parte dell' *Analyse des infiniment, petits* che la morte vietò al Marchese DE L' HÔPITAL di pubblicare. Quell' opera non ha oggi la notorietà di cui avrebbe diritto, e poichè è ormai una vera rarità bibliografica[14]), così non mi si darà torto di dedicare qualche linea ad esporne il piano e la materia.[14bis]) (vedi a p. 273).

Essa consta di sei sezioni. La I deve ntendersi come una introduzione, avendo essa per intento di insegnare come si ottenga l' equazione differenziale (di I ordine sempre) a cui soddisfa una curva soggetta a certe condizioni geometriche; tale risultato si consegue servendosi delle espressioni che hanno la suttangente e la sunnormale, la tangente e la normale, l' area ecc. di qualsia curva, non soltanto nel caso in cui questa si riferisca ad un sistema cartesiano ortogonale, ma (lo si noti) anche quando si prendano come coordinate di un punto di un piano la lunghezza della normale condotta da esso ad una data curva (considerata come asse) e l' arco della stessa compreso fra il piede di quella normale ed un' origine fissa[15]); un gran numero di esempi bene scelti illustrano il procedimento generale. Altrettanti se ne trovano nella II Sezione, ove l' autore entra nel tema scelto, trattando della costruzione delle equazioni differenziali di I ordine e I grado in cui le due variabili sono separate. Della stessa natura sono le equazioni della forma $dy = f(x)\,dx$ alle quali è dedicata la III Sezione,

---

13) *De constructione aequationum differentialium primi gradus* (Bononiae MDCCVII). Cfr. *Giornale de' letterati d'Italia.* T. I, 1710, p. 391—411.

14) Soltanto dopo reiterate ricerche io ne trovai una copia, *senza tavole,* nella Biblioteca Nazionale di Firenze.

15) Tale caso speciale delle coordinate in generale concepite da LEIBNIZ (cf. CANTOR, *Vorlesungen*, T. III, p. 204), appartiene al MANFREDI? Altri risponda. Io noto che, in questo sistema di coordinate, come suttangente si assume il segmento della tangente all' asse compreso fra il relativo punto di contatto e la sua intersezione con la tangente nel punto corrispondente della curva. Per tale segmento il MANFREDI dà una espressione assai semplice, sulla cui esattezza ho qualche dubbio, per dissipare o confermare il quale occorrerebbe di avere sotto occhio la figura su cui ragionava il matematico bolognese

l' importanza della quale sta specialmente nelle osservazioni esposte dall' autore sugli esempi da lui considerati. Alle equazioni differenziali di I ordine e grado superiore, a variabili separate, è dedicata la seguente sezione IV, e la V a quelle di I ordine e I grado, in cui le variabili si possono separare con semplici operazioni algebriche. L' ultima sezione dell' opera manfrediana è quella di maggior valore, perchè contiene una serie di artifici mediante cui si possono separare le variabili in certe equazioni differenziali. Ecco quali sono e quali operazioni il Manfredi suggerisce di applicarvi:

$y\,dx - x\,dy = ay\,dy$; s' integra scrivendola: $d\frac{x}{y} = a\frac{dy}{y}$;

$y\,dx - x\,dy = f(y)y\,dy$; s' integra scrivendola: $d\frac{x}{y} = \frac{f(y)\,dy}{y}$[16];

$a\,dx = y\,dy - x\,dy$; s' integra colla sostituzione $y = a \log z$;

$a^2 dy = b\varphi(x)\,dx + \psi(x) y\,dx$; posto $z = \int \frac{\varphi(x)\,dx}{a^2}$ l' equazione data può scriversi: $\frac{z\,dy - y\,dz}{z^2} = \frac{b\psi dz}{z^2\varphi}$;

$b^{n+1} dy = b^{n-1}\varphi(x)\,dx + \psi(x) y^n dx$; colla sostituzione $y = \frac{u^{\frac{1}{1-n}}}{b^{\frac{n}{1-n}}}$ si riduce alla forma precedente[17]).

Bastino questi cenni a dimostrare come a Gabbriello Manfredi non si possa negare un bel posto nella storia del calcolo integrale: egli, infatti, non solo determinò la natura analitica di un' importante classe di integrali, non solo cercò di mettere un po' d' ordine nelle cognizioni che avevano i geometri del tempo suo intorno alla costruzione delle equazioni differenziali di I ordine, ma suggerì dei metodi per integrare tali equazioni, che, per la loro genialità ed estensione, costituiscono un vero progresso dell' analisi matematica.

Ritorniamo, dopo questa digressione, al tema proprio del presente lavoro per osservare che il *Giornale de' letterati d' Italia* merita di essere annoverato fra le fonti preziose a cui deve attingere lo storico della matematica — oltrechè pei lavori originali, di cui presentammo l' elenco completo, e per le biografie di uomini illustri che contiene — per le abbondanti infor-

16) Anche le equazioni analoghe i cui primi membri sono $y\,dx + x\,dy$ sono incidentalemente considerate dal nostro autore che le integra scrivendo quei primi membri $d(xy)$.

17) I metodi del Manfredi furono ulteriormente svolti ed ampliati da J. Riccati (v. *O. R.*, T. I, p. 433 e seg.).

mazioni ivi sparse intorno alle opere matematiche che videro la luce in Italia nella prima metà del Sec. XVIII, opere in gran parte sepolte negli scaffali delle nostre biblioteche e che (al pari di quella del MANFREDI) sono in procinto di scomparire dal catalogo di quelle che segnano un passo in avanti nel cammino che guida alla verità. Taccio dei documenti ivi analizzati riferentisi ad una questione dibattuta con tenacia e vivacità tra il celebre Abate camaldolese GUIDO GRANDI ed ALESSANDRO MARCHETTI, oggi ricordato, meno come fisico e matematico, che come elegante traduttore di LUCREZIO [18]); e fo rapido cenno di una macchina aritmetica, differente da quelle di PASCAL e LEIBNIZ, che il Marchese GIOVANNI POLENI ha immaginata [19]) e di cui il *Giornale* riferisce una descrizione diffusa e fedele [20]). Voglio poi richiamare l' attenzione di chi legge sulla versione latina [21]) eseguita a Padova degli *Éléments de géométrie, suivis d' un traité des logarithmes* del DUCA DI BORGOGNA (1682—1712) [22]), il ben noto discepolo di FÉNÉLON, che fu padre di LUIGI XV. Dalla particolareggiata analisi inserita nel *Giornale* [23]) degli „*Elementi geometrici* del Serenissimo DUCA DI BORGOGNA, la cui morte immatura ha tronche nel più bel fiore l' alte speranze che i suoi popoli avevano di lui concepute", si apprende, fra l' altro, che in essi „si legge una dimostrazione aritmetica di MADAME LA DUCHESSE DU MAINE, perchè in quattro termini proporzionali, il prodotto dei mezzi sia eguale al prodotto degli estremi". Ecco dunque un nuovo nome da aggiungere a quello dei rappresentanti che il sesso gentile possiede nell' assemblea dei cultori delle scienze esatte!

Mentre tali notizie fornite dal *Giornale* saranno giudicate forse da taluno come oggetti di pura curiosità, altre possiedono un valore difficilmente revocabile in dubbio, se non altro perchè concernono un matematico ormai dimenticato; alludo a quelle relative alla seguente opera: LUDOVICI A RIPA, *astronomiae ac metereologiae in gymnasio patavino professoris*, *Miscellanea* (Venetiis 1725). Orbene dall' analisi fatta di esse nel *Giornale de' letterati* [24]) apprendiamo come nella *Miscellanea* siano contenute delle ricerche di cal-

---

18) Chi desidera notizie su di lui riccorra all' *Elogio del Signore* ALESSANDRO MARCHETTI in *Giornale de' Letterati d'Italia*, T. XXI, 1715, p. 213—260.

19) IOANNIS POLENI *Miscellanea: hoc est* I *Dissertatio de Barometris et Thermometris.* II *Machinae Arithmeticae, ejusque usus descriptio.* III *De Sectionibus Conicis Parallelorum in Horologiis Solaribus Tractatus*, Venetiis, 1709.

20) T. I, p. 381—386.

21) *Serenissimi* BURGUNDIAE DUCIS *Elementa Geometrica, ex Gallico sermone in Latinum translata ad usum Seminarii Patavini*, etc. Patavii 1713.

22) Dell' originale non mi è nota che una edizione parigina del 1728.

23) T. XIV, 1713, p. 293—316.

24) T. XXXVII, 1725, p. 269—272.

colo integrale aventi per tema gli otto teoremi che GIOVANNI BERNOULLI ha enunciati nella chiusa della memoria *Clar.* TAYLORI *mathematici angli Problema analyticum, quod omnibus geometris non anglis proposuit, solutum* (*Acta erud. Lips.*, 1719, p. 256; oppure JOH. BERNOULLI, *Opera omnia*, 1742, T. II, p. 402). Questi teoremi furono dimostrati sin dal 1720 da NICOLÒ, figlio di GIOVANNI BERNOULLI (v. Acta erud. Lips. 1720, p. 471; oppure JOH. BERNOULLI, Opera omnia, 1742, T. II, p. 419), onde le dimostrazioni ordite collo stesso intento dal RIPA non hanno il pregio della novità. Ma egli ha di più osservato che gli otto integrali di cui parlano i teoremi del BERNOULLI sono tutti compresi nel seguente

$$\int \frac{x^m\,dx}{\overline{e+fx^q}^{\,n}},$$

e che i casi d' integrabilità contemplati dal celebre geometra di Basilea corrispondono al supporre intero e positivo uno dei numeri seguenti:

$$n - \frac{1}{q} - 1 - \frac{m}{q}, \quad \frac{m+1}{q} - 1, \quad \frac{-m-1+q}{q}, \quad \frac{m+1-q-nq}{q}.$$

Tali condizioni sono sufficienti, ma non necessarie, giacchè è noto che (prescindendo dal caso di n intero), per l' integrabilità basta sia intero (anche negativo) uno dei numeri

$$\frac{m+1}{q}, \quad \frac{m+1}{q} - n.$$

Tuttavia l' osservazione del RIPA ha il suo valore, perchè serve di ponte fra le indagini del BERNOULLI e l' antica osservazione di NEWTON[25]), che

$$\int a z^{\vartheta} (e + f z^{\eta})^{\lambda}\, dz$$

è esprimibile sotto forma finita quando $\frac{\vartheta+1}{\eta}$ è un numero intero positivo; essa segna una tappa nella via che condusse alla teoria dell' integrazione dei differenziali binomî.

Le indagini del RIPA di cui ora facemmo cenno, come quelle del MANFREDI anteriormente schizzate, sono altrettante testimonianze dell' interesse che provarono gl' Italiani pei nuovi calcoli, sono altrettanti titoli per valutare il contributo che essi diedero alla costituzione del calcolo integrale. Il non trovare cenno di tali investigazioni nelle migliori storie delle matematiche, mostra come a ragione SCIPIONE MAFFEI lamentasse la poca diffusione che a suoi tempi avevano in Europa le opere italiane. „Ha certa-

25) Cf. CANTOR, *Vorlesungen*, T. III, p. 179.

mente", egli scriveva[26]), „l' Italia di che prender meraviglia non che d' incentivo, nell' applicazion loro (*degli stranieri*) nelle bell' opere, nell' utilissime e dottissime imprese: ma siaci permesso dire, che qualche cosa pur manca in quelle parti, dove de' libri Italiani non si prende cura. Parrebbe incredibil talvolta, che in paesi, dove fin dell' altro Emisfero tutte le notizie abbondano, di molte cose d' Italia si resti non di rado all' oscuro. Vi si udirà per modo d' esempio spacciar per nuova osservazione, o dottrina, che in Italia è già trita; vi si publicheranno opinioni o distrutte già, o rese almeno in libri Italiani molto ambigue, senza aver di esse alcun lume; non vi si conosceranno opere di sommo prezzo in materie, delle quali tutto dì si scrive.... Degninsi dunque quei bravi e vivaci spiriti di affaticarsi alcun poco, per ben comprenderne (*della lingua italiana*) la forza, e non credano di poca curiosità i nostri libri, ma ci restituiscano almeno in parte quell' onore, che noi facciamo a i loro, de' quali così grand' estimazione giustamente abbiamo, e per godere i quali ne' lor nativi linguaggi non pochi tra noi ben impiegata stimano ogni fatica."

II.

Mentre il *Giornale de' letterati* aveva per iscopo precipuo di dare notizie intorno al movimento del pensiero, in tutti i campi ove esplica la sua attività, un' altra pubblicazione periodica italiana dello scorso secolo ebbe per intento di adunare quegli scritti, sopra questioni speciali, che, per la loro piccola mole, rischiavano di andare dispersi e poi dimenticati. Tale *Raccolta* ebbe dunque un indirizzo somigliante a quello che possiedono gli odierni Atti accademici; anzi l' importanza di essa proviene in massima parte appunto dall' essere sorta in un' epoca in cui, al di quà delle Alpi, non erasi ancora cominciato a stampare regolarmente i lavori dei vari sodalizi scientifici; si può perfino asserire che fu il successo da cui essa venne coronata che persuase dell' opportunità delle pubblicazione di questi[27]). E non deve essere cagione di alcuna meraviglia il constatare che essa declini, sino a perdere qualunque valore scientifico, quando la Corporazione fondata a Torino da Lagrange, la Società Italiana delle Scienze, le Accademie di Bologna, Siena e Napoli, nonchè le altre associazioni congeneri, cominciarono a dar fuori

---

26) *Osservazioni letterarie che possono servir di continuazione al Giornale de' Letterati d'Italia*, T. I, 1737, p. XIX—XX.

27) Lo fa credere, fra l'altro, alcune parole scritte al Calogerà dal Muratori addì 15 Giugno 1745, ove egli dice «d'avere tra sè conchiuso che anche l'Italia iavrebbe ingegni da poter gareggiare coi Signori Accademici di Parigi, se vi fosse chi pagasse e raunasse i nostri d'Italia». Sono riferite dal Mandelli nelle *Memorie* citate nella seguente nota.

quei volumi di memorie, ove sono raccolti i maggiori contributi dati dall' Italia alla matematica in quest' ultimo secolo.

La *Raccolta* di cui vogliamo occuparci fu compilata dal Padre D. ANGELO CALOGERÀ (nato il 7 Settembre 1699, morto il 26 Settembre 1766[28]) durante tutto il primo periodo di vita che ebbe; la di lui benefica azione si estese anche ai primi quindici volumi della *Nuova Raccolta*, che ne rappresenta il secondo periodo; alla morte fu surrogato da D. FORTUNATO MANDELLI. Ad addossarsi il grave carico della direzione della *Raccolta*[29]) il CALOGERÀ fu sorretto così validamente da CATERINO ZENO, che questi „si può asserire essere stato l' autore di quest' opera, avendone stimolato il P. CALOGERÀ, e continuamente somministrati dottissimi opuscoli.» Ebbe poi validi ajuti dal celebre medico ANTONIO VALLISNERI, dall' Ab. FACCIOLATI (Padova), da D. M. MANNI (Firenze), da L. A. MURATORI (Modena), da J. M. COMO (Napoli) e da altri. Con tale brillante stato maggiore e col concorso di eminenti collaboratori (fra i quali spiccano i membri delle Famiglie FAGNANO e RICCATI), il CALOGERÀ fu in grado di assicurare alla propria *Raccolta* la vittoria sopra opposizioni non rare, in ispecie di scongiurare il pericolo da cui venne minacciata quando nel 1740 cominciò a Venezia una pubblicazione congenere[30]).

Per porgere anzitutto un' idea generale di quanto, relativo alla matematica pura, si contenga nella RACCOLTA CALOGERÀ, diamo quì anzittuto l' elenco degli scritti su tale argomento, che essa contiene:

Raccolta di Opuscoli scientifici, e filologici. 51 Vol. in 18°. Venezia

1. P. THOMAEPII MAPHAEI de usu Matheseos in Theologicis, et diversa circa principium universale staticum Galilaei et Cartesii sententia. Dissertationes duae epistolares. T. II, 1729, p. 355—468.

2. Metodo per trovare, quelle curve, nelle quali l' angolo fatto dalle corde (che partono tutte da un punto) e dall' asse sta all' angolo fatto dalle normali alla curva, e dal medesimo asse in data ragione di numero a numero. Schediasmi due del Sig. Conte GIULIO CARLO DE' FAGNANI. T. III, 1730, p. 5—28. Schediasma terzo. T. VII, 1732, p. 1—27. [Riprodotti in *P. M.*, T. II, p. 375—402.]

---

28) Per maggiori particolari si ricorra alle *Memorie della vita del P. D.* ANGIOLO CALOGERÀ *scritte dal Padre lettore D.* FORTUNATO MANDELLI *(Nuova Raccolta*, T. XXVIII, p. 3—78).

29) Dianzi il CALOGERÀ, sotto il pseudonimo di GIOVANNI ANGELI aveva pubblicato a Venezia due volumi della *Storia letteraria d'Europa*, *tradotti dalla lingua Francese nell' Italiana* e due del *Giornale de' letterati di Europa per servire di continuazione alla Storia letteraria d'Europa.*

30) La *Miscellanea di varie operette.*

3. Osservazioni sopra il Secondo e Terzo Schediasma del Conte Giulio Carlo de' Fagnani in cui si è data la costruzione algebraica di quelle curve, nelle quali l' angolo fatto dalle corde, e dall' asse, sta all' angolo fatto dalle normali alla curva, e dall' asse in ragione costante di numero a numero, del medesimo Conte de' Fagnani. T. X, 1734, p. 1—12. [V. *P. M.* p. 403—407.]

4. Osservazioni sopra la descrizione della cicloide geometrica primaria, che serve d' esempio nel terzo Schediasma del Conte Giulio Carlo de' Fagnani, circa la maniera di costruire quelle curve, nelle quali l' angolo fatto dalle corde, e dall' asse sta all' angolo fatto dalle normali alla curva, e dall' asse in una data ragione di numero a numero; con altre osservazioni sopra la Lemniscata dello stesso Conte de' Fagnani. T. X, 1734, p. 13—26. [*P. M.*, T. II, p. 408—414.]

5. Teorema generale, da cui si deduce la giusta determinazione de' premi dovuti in ogni sorta di Lotti all' uso di Roma, per ogni sorta di combinazioni di numeri, che in essi possa giocarsi, anche con la condizione che i numeri delle combinazioni da giocarsi serbino un luogo, o sia ordine fisso nell' estrazione. Del Conte Giulio Carlo de' Fagnani. T. XII, 1735, p. 473—491. [*P. M.* T. I, p. 497—505.]

6. Due nuove maniere di risolvere algebraicamente l' equazioni quadratiche. Del Conte Giulio Carlo de' Fagnani. T. XII, 1735, p. 493—503. [*P. M.* T. I, p. 465—469.]

7. Nuovo metodo per risolvere algebraicamente l' equazioni del quarto grado, applicabile anche alla resoluzione dell' equazione del secondo grado, de Co: Giulio Carlo de' Fagnani. T. XIII, 1736, p. 107—118. [*P. M.*, T. I, p. 470—475.]

8. Nuova maniera di risolvere algebraicamente l' Equazioni cubiche, dedotta dal nuovo metodo di risolvere l' Equazioni del quarto grado, del Conte Giulio Carlo de' Fagnani. T. XIV, 1737, p. 227—240. [*P. M.*, T. I, p. 476—482.]

9. Altro nuovo metodo per la resoluzione algebraica, del Conte Giulio Carlo de' Fagnani. T. XV, 1737, p. 507—530. [*P. M.*, T. I, p. 483—493.]

10. Due teoremi da' quali si deduce la risoluzione analitica d' infinite spezie d' equazioni sempre più composte in infinito, e la sezione indefinita degli archi circolari mediante alcune formole generali e finite, del Conte Giulio Carlo de' Fagnani. T. XVIII, 1738, p. 275—316. [*P. M.*, T. II, p. 426—443.]

11. Soluzione fatta dal Sig. Conte Giulio Carlo de' Fagnani d' un problema propostogli dal Reverendiss. Padre Abate Esgenerale D. Guido Grandi. T. XIX, 1739, p. 369—385. [*P. M.*, T. II, p. 212—217.]

12. De parabolis et hyperbolis ex novo solido secandis. Epistola Reverendissimi P. Guidonis Grandi Camalduensis Abatis ex-generalis ad Ad Rever. P. Petrum Urseolum a Ponte Lectorem Camalduensem. T. XXII, 1740, p. 29—36.

13. Risposta alla dissertazione del Sig. Niccolo Bernulli inserita nel Tomo IX de' Supplementi agli Atti di Lipsia. Del Sig. Conte Gian Francesco Onorio de' Fagnani. T. XXIII, 1741, p. 67—111.

14. Lettere di Galileo Galilei al Padre F. Fulgenzio Micanzio Servita. T. XXVI, 1742, p. 477—498.

15. Varie soluzioni d' un problema concernente il Metodo de' Minimi del Conte Giulio Carlo de' Fagnani. T. XXVII, 1742, p. 377—405. [*P. M.*, T. II, p. 218—232.]

16. Jacobi Callixti Bergomatis Quadratura trianguli mixtilinei ex methodo indivisibilium. T. XXXI, 1744, p. 301—305.

17. Secularia Torricelliana ab Georgio Mathia Bose indicata, T. XXXII, 1745, p. 1—29.

18. Georgiae Mathiae Bosae Secularia Torricelliana Oratio. T. XXXII, 1745, p. 31—58.

19. Metodo generale per ritrovare infinite serie di triangoli rettangoli, di cui non sono che casi particolari i proposti da Pitagora, e da Platone. Lettera de' Signori Conti Girolamo, e Giuseppe Rinaldis al Reverendissimo Padre D. Giacomo Stallini C. R. S. chiarissimo Professore di Filosofia morale nell' Università di Padova. T. XXXV, 1746, p. 337—354.

20. Saggio di una nuova teoria dei numeri figurati, e del loro vario uso, massimamente nella somma delle serie infinite. Dissertazione dei Signori Conti Girolamo, e Giuseppe Rinaldis Nobili del Sacro Romano Impero. T. XXXVIII, 1748, p. 147—224.

21. Guidonis Ferrarii Soc. Jesu de P. Thoma Ceva ejusdem Societatis Commentarius. T. XLIV, 1750, p. 257—278.

22. De numeralium notarum minuscularum origine. Dissertatio mathematico-critica. T. XLVIII, 1753, p. 19—110.

23. Sopra la soluzione inserta negli Atti di Lipsia del mese di Marzo 17[illegible] del problema algebraico proposto nel Mese di Ottobre 1749. T. XLV[illegible] 1753, p. 235—240.

24. Lettera dell' Ab. D. Gaetano Marzagaglia al chiarissimo Sig[illegible] Gabriel Manfredi, Matematico prestantissimo e Segretario del Senato [illegible] Bologna. T. XLIX, 1753, p. 143—157.

Nuova Raccolta d' Opuscoli scientifici e filologici. 48 Vol. in 18 Venezia.

25. Lettera del Signor Giovanni Galfi al Signor Flavio Gangini *con-*

tenente alcune osservazioni intorno tre articoli dell' opera del Signor COLIN MACLAURIN sopra il Calcolo delle Flussioni. T. I, 1755, p. 221—237.

26. Riflessioni in occasione dello scritto del Signor BERMANNO inserto negli Atti di Lipsia dell' anno 1752, mese di Novembre, sopra il Problema Algebraico proposto in detti Atti nell' anno 1749, mese di Ottobre. Si dà quì la soluzione d' altri problemi consimili, con i Teoremi Algebraici, onde essi problemi dipendono. Del Signor GIULIO CARLO TOSCHI DI FAGNANO, MARCHESE DI SANT' ONORIO. T. II, 1756, p. 403—433.

27. Multisezione degli archi di cerchio per approssimazione secondo un certo genere di numeri impari, del Signor MARCHESE DI SANT' ONORIO GIULIO DE' TOSCHI DI FAGNANO. T. IV, 1758, p. 205—213.

28. Novum arcuum parabolae Apollonianae Mensurae. Auctore Archidiacono JOHANNE FRANCISCO DE TUSCHIS DE FAGNANO EX SANCTI HONORII MARCHIONIBUS. T. XVII, 1768; opuscolo V di pag. 17.

29. Integratio quorundam quantitatum differentialium quae originem habent a lineis quae ad circulum refertur. Auctore Archidiacono JOHANNE FRANCISCHIS DE TUSCHIS A FAGNANO etc. T. XXII, 1772; op. I, p. 16.

30. Reductio functionum trascendentalium simplicium, quae a Circulo petentur, et quorum universalior est usus. Auctore Archidiacono JOHANNE FRANCISCHIS DE TUSCHIS A FAGNANO. T. XXII, 1722; op. II, p. 19.

31. Theorema calculi integralis. Auctore Archidiacono FRANCISCO DE TUSCHIS FAGNANO. T. XXII, 1772; op. III, p. 35.

32. Delle figure piane isoperimetre contenenti le massime superficie. Dissertazione del Sig. Co: GIORDANO RICCATI. T. XXIII, 1772; op. VIII, pag. 14.

33. Della maniera di costruire un Portico, che ascende lungo un piano inclinato all' orizzonte. Dissertazione del Sig. Co: GIORDANO RICCATI. T. XXIII, 1772; op. IX, p. 6.

34. Demonstratio circuli quadraturae ex infinita quorundam rectangulorum serie a CARTESIO olim deductae, atque in ejusdem Opusculis posthumis absque demonstratione editae. Auctore Archidiacono JOHANNE FRANCISCO DE TUSCHIS A FAGNANO. T. XXIV, 1773; op. V, p. 17.

35. Dissertazione del Sig. Co: GIORDANO RICCATI che lo studio delle Matematiche non favorisce la miscredenza. T. XXVIII, 1775; op. V, p. 14.

36. Lettera contenente alcune riflessioni sopra un passo del Tomo I del nuovo Giornale d'Italia stampato in Modena. Lettera all' autore della relazione delle Istituzioni analitiche dell' Ab. Co: VINCENZO RICCATI, inserita nel nuovo Giornale d'Italia, Tomo I, II e III. — T. XXX, 1776; op. III, pag. 25.

37. Nuova maniera di costruire le scale ellittiche. Del Sig. Co: GIORDANO RICCATI, T. XXXV, 1780; op. VI, p. 8.

Dei lavori testè enumerati uno si riferisce alla storia propriamente detta (n. 22), toccando quella parte del nostro sistema di numerazione che si suol chiamare «questione Boeziana»; TH. H. MARTIN lo ha ricordato nelle sue *Recherches nouvelles concernant les origines de notre système de numération écrite* (Revue Archéologique, T. XIII, 1857; nota (3)). Due altri (nn. 1 e 35) concernono la filosofia delle matematiche, ed è facile capire perchè noi non ci arrestiamo ad esporne il contenuto. Additiamo di sfuggita alcune lettere di GALILEO (n. 18), la cui pubblicazione non trovammo segnalata nell' *Indice cronologico del Carteggio Galileiano per cura di* ANTONIO FAVARO (Firenze, 1896); altrettanto facciamo per alcuni scritti commemorativi (nn. 17 e 18), biografici (n. 21) o concernenti le applicazioni della geometria all' architettura (nn. 33 e 37). E passiamo ad esporre una succinta analisi di quanto di interessante abbiamo incontrato, leggendo gli altri articoli nominati.

Algebra e Trigonometria.

Metodi ideati dal Conte di Fagnano per risolvere le equazioni di 2°, 3° e 4° grado. Alla risoluzione delle equazioni di 2°, 3° e 4° grado il Conte di Fagnano ha dedicate le memorie nn. 6, 7, 8 e 9 e parte di quella che reca il n. 10; le prime quattro sono semplicemente citate dal MATTHIESSEN (*Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen,* Leipzig 1878, p. 975). — Quella che reca il n. 6 si riferisce esclusivamente ad equazioni di 2° grado e contiene due nuovi metodi per risolverle, che risultano dalle seguenti formole:

I. $$x^2 + b^2 = ax, \qquad \frac{2b}{a} = \frac{2bx}{b^2 + x^2}, \qquad \frac{4b^2}{a^2} = \frac{4b^2x^2}{(b^2 + x^2)^2},$$

$$1 - \frac{4b^2}{a^2} = \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\right)^2, \qquad \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{4b^2}{a^2}}.$$

$$x = \left\{\frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a^2}}}{1 \mp \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a^2}}}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

II. $$x^2 + b^2 = ax, \qquad x^2 + 2bx + b^2 = (a + 2b)x,$$

$$1 - \frac{4b}{a + 2b} = 1 - \frac{4bx}{(b + x)^2}, \qquad \frac{a - 2b}{a + 2b} = \left(\frac{x - b}{x + b}\right)^2,$$

$$\frac{x - b}{x + b} = \pm\sqrt{\frac{a - 2b}{a + 2b}}.$$

(2) $$x = b\frac{\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b}}.$$ [31])

Più importante è la memoria n. 7, ove il Fagnano scioglie in varî modi l'equazione biquadratica completa

(3) $$0 = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r,$$

combinandola coll' identità

(4) $$(zx^2 + yx + u)^2 = z^2x^4 + 2zyx^3 + (y^2 + 2zu)x^2 + 2yux + u^2,$$

cioè addizionando alla (4) la (3) moltiplicata per una nuova quantità ausiliare t. Si faccia anzitutto $t = y$ e si disponga di z e u in modo che nell' equazione risultante

$$(zx^2 + yx + u)^2 = (z^2 + my)x^4 + (2zy + ny)x^3 + (y^2 + 2zu + py)x^2 + (2yu + qy)x + (u^2 + zy)$$

scompajano i termini secondo e quarto. Ciò esige si assuma $z = -\frac{n}{2}$, $u = -\frac{q}{2}$; allora questa diviene

$$\left(-\frac{n}{2}x + yx - \frac{u}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2}{4} + my\right)x^4 + \left(y^2 + py + \frac{nq}{2}\right)x^2 + \left(\frac{q^2}{4} + ry\right).$$

E affinchè il secondo membro risulti, come il primo è, un quadrato perfetto y si deve scegliere per modo che si abbia:

$$\left(y^2 + py + \frac{nq}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{n^2}{4} + my\right)\left(\frac{q^2}{4} + ry\right);$$

eseguiti i calcoli si ottiene un' equazione (risolvente) in y di 3⁰ grado, mediante la quale la risoluzione dell' equazione proposta è ricondotta a quella di equazioni quadratiche. Allo stesso risultato si perviene facendo $t = -4r$ e disponendo di y e u in modo che nel secondo membro dell' equazione risultante manchino i termini in x^1 e x^0; oppure facendo $t = -4m$ e disponendo di y e u di maniera che nel secondo membro dell' equazione ottenuta manchino i termini in x^4 e x^3.[32])

Un concetto somigliante è applicabile all' equazione generale del 2⁰ grado

(5) $$0 = mx^2 + ux + p,$$

31) Cf. Matthiessen, op. cit. p. 321.

32) V. anche l'articolo *Formola generale per la resoluzione analitica delle equazioni del 4°, del 3° e del 2° grado* (*P. M.*, T. II, p. 444—449) ove il Fagnano sfrutta in modo analogo le seguente identità

$$\left[x^2 + \frac{ux}{2} + \frac{1}{2}\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)\right]^2 = x^4 + ux^3 + \left(\frac{u^2}{4} + f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)x^2 + \frac{u}{2}\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)x + \frac{1}{4}\left(f + \frac{z}{f} + \frac{p}{3}\right)^2.$$

che il FAGNANO accoppia all' identità

$$(6) \qquad (yx+u)^2 = y^2x^2 + 2yux + u^2,$$

derivandone la seguente:

$$(yx+u)^2 = (y^2-mt)x^2 + (2yu-nt)x + (u^2-pt)$$

e facendo una volta $t=u=p$, $y=\frac{n}{2}$, una seconda volta $t=y=m$, $u=\frac{n}{2}$: in entrambi i casi ottiene la formola nota.

Più riposta è l'applicazione del medesimo concetto all' equazione generale di terzo grado:

$$(7) \qquad x^3 + nx^2 + px + q = 0;$$

il FAGNANO la ottiene (n. 8) moltiplicando quest' equazione pel binomio $x+y$, e combinando quindi la equazione risultante

$$0 = x^4 + (n+y)x^3 + (p+ny)x^2 + (q+py)x + qy$$

coll' identità

$$\left(y^2 + \frac{y+n}{2}x + \frac{u}{2}\right)^2 = x^4 + (n+y)x^3 + \left[\left(\frac{y+n}{2}\right)^2 + u\right]x^2 + \frac{(y+n)u}{2}x + \frac{u^2}{4}.$$

Per brevità passo sotto silenzio la risoluzione dell' equazione cubica esposta dal FAGNANO nella memoria n. 11; con maggior ragione fo altrettanto di quella che egli fece conoscere nel T. I (p. 494—496) delle *P. M.* perchè, in ultima analisi, non differisce dalla notissima soluzione di HUDDE, modificata da LAGRANGE.[33]) Ma non è lecito il non indicare il metodo esposto nella memoria n. 10, che sembra superiore a tutti gli altri, se non altro perchè mette in luce meridiana il fatto che risolvere un' equazione altro non è che trasformarne il primo membro.

Il fondamento di questo metodo risiede nel seguente teorema: «Dalla equazione

$$(8) \qquad 2yc^{\alpha-1} = \left(x+\sqrt{x^2\mp c^2}\right)^\alpha \pm \left(x-\sqrt{x^2\mp c^2}\right)^\alpha$$

scaturisce l'altra

$$(9) \qquad 2xc^{\frac{1}{\alpha}-1} = \left(y+\sqrt{y^2\mp c^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(y-\sqrt{y^2\mp c^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}».$$

Il FAGNANO lo dimostra con semplici trasformazioni algebriche ed invita il lettore a paragonarlo con quanto il DE MOIVRE espose nell' articolo *Aequationum quarundam potestates* etc. (*Phil. Transactions*, No. 309, 1707; oppure *Acta erud.* Febbrajo 1709), articolo di cui egli afferma avere avuto

33) Cf. MATTHIESSEN, p. 427.

conoscenza dopo di essere giunto a quel teorema. — Ciò posto, se nella (8) (9) si prendono i segni superiori e si suppone $a = 3$, $-\frac{3c^2}{4} = p$, $-\frac{c^2}{4}y = q$, la prima diviene

$$x^3 + px + q = 0,$$

cioè l' equazione generale di terz' ordine priva del secondo termine, e la seconda dà

$$x = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

che è la nota formola di CARDANO. — Il FAGNANO aggiunge che similmente si può risolvere l' equazione di secondo grado

$$z^2 + pz + q = 0;$$

bisogna perciò previamente trasformarla in una biquadratica, ponendo $z = x^2$.

Poichè il FAGNANO è assai meno noto come algebrista di quel che sia come analista, ci sia lecito, prima di abbandonare questo argomento, di attrarre l' attenzione degli studiosi sulla *Soluzione di quattro problemi analitici da' quali si deduce con metodo uniforme la resoluzione dell' equazioni del secondo, del terzo e del quarto grado* (*P. M.*, T. II, p. 450—468).[34]) Sono ivi anzitutto stabilite le quattro seguenti identità:

$$(10)\quad (a + b + c)^2 = (a + 2c)(a + b + c) + b^2 + ab - c^2 - ac.$$

$$(11)\quad (a + b + c)^3 = 3c(a + b + c)^2 + 3(ab - c^2)(a + b + c) + a^3 + b^3 + c^3 - abc.$$

$$(12)\quad (a + b + c)^4 = (2c^2 + 4ab)(a + b + c)^2 + (4a^2c + 4b^2c)(a + b + c) + a^4 + b^4 - c^4 - 2a^2b^2 + 4abc^2.$$

Paragonando la prima con l' equazione

$$x^2 = nx + p,$$

si vede che questa a quella si identifica ponendo

$$x = a + b + c, \quad a + 2c = n, \quad b^2 + ab - c^2 - ac = p;$$

e da queste si trae la solita formola. Similmente la (11) si può identi-

---

34) A completare l'elenco dei lavori del FAGNANO sulla risoluzione delle equazioni letterali, citiamo l'*Applicazione dell' algoritmo nuovo alla risoluzione analitica dell' equazioni del secondo del terzo e del quarto grado* (*P. M.*, T. I, p. 423—454). L'«algoritmo nuovo» ivi applicato poggia sull' ipotesi che come prodotto di due numeri p, q, si assuma, invece di $+pq$, la quantità $-pq$; il FAGNANO se ne serve per dimostrare che gli ordinari numeri immaginari non hanno nulla di assurdo.

ficare all' equazione generale di 3⁰ grado; si giunge così, con metodo sostanzialmente identico, *alle formole stabilite dal* GRUNERT *più di un secolo dopo* FAGNANO.[35]) Aggiungiamo che analogamente si può risolvere l' equazione biquadratica, mediante le identità (12): tal modo di procedere è, nella sostanza, identico a quello che porta il nome del GRUNERT[36]); ne differisce per ciò solo che questi parte, invece che dalla (12), da un' altra identità congenere.

Sul caso irriducibile. Nella memoria n. 24 il MARZAGAGLIA[37]) espone al suo maestro GABRIELE MANFREDI un procedimento per giustificare la presenza di quantità immaginarie nelle formole cardaniche relative ad un' equazione cubica a radici reali; esso consiste nell' osservare che, posto $x = y + z$, per risolvere l' equazione $x^3 + px + q = 0$, bisogna e basta determinare due numeri tali che si abbia $3yz = -p$, $y^3 + z^3 = -r$; ora da un gruppo di proposizioni stabilite dall' autore emerge che, se $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, a questo sistema è impossibile soddisfare con numeri reali.

Teoria dei numeri e Calcolo combinatorio. Nella prefazione (datata 8 Maggio 1753) alla stessa memoria il MARZAGAGLIA annuncia di avere risoluti i seguenti problemi: I. Dato un numero intero non quadrato a, trovare infiniti numeri interi x tali che $ax^2 + 1$ sia un quadrato. II. Trovare un intero decomponibile n volte nella somma di due quadrati. III. Determinare di quanti triangoli rettangoli l' intero $(a^2 + b^2)^m$ $(c^2 + d^2)^n (p^2 + q^2)^r$ (*sic!*) può essere ipotenusa. Se e dove il MARZAGAGLIA abbia esposte le ideate soluzioni, ci è ignoto[38]): qual grado di novità possedessero a' suoi tempi, si vede, osservando che il I problema altro non è che il notissimo *problema di Pell* proposto da FERMAT ai matematici inglesi e risolto da LORD BROUNKER in un modo che WALLIS fece conoscere nelle sue *Opere* (1695—1699) e che EULERO riespose (1770) nella sua *Algebra* (II Parte, II Sez. Cap. 7⁰): tale soluzione ha l' inconveniente di non mettere in luce la possibilità di risolvere il problema qualunque sia a e fu surrogata con altra perfetta da LAGRANGE (cfr. LEGENDRE, *Zahlentheorie, deutsch von* H. MASER, T. I, Leipzig, 1886, p. 60). Il II dei referiti problemi fu risolto da FERMAT in una delle sue osservazioni a DIOFANTO (*Oeuvres, éd.* TANNERY *et* HENRY, T. I, 1891, p. 293, e T. III, 1896, p. 243); forse il MARZAGAGLIA trovò, prima di LEGENDRE

---

35) *Archiv für Math.*, T. XL, 1863, p. 246. Cfr. MATTHIESSEN, p. 452.

36) *Archiv für Math.*, T. XL, 1863, p. 394. Cfr. MATTHIESSEN, p. 664.

37) Non ricordato dal POGGENDORFF.

38) Abbia ricorso invano anche alla *Biblioteca matematica* del RICCARDI ove al MARZAGAGLIA è dedicato un articolo (T. II, 1873—76, col. 129—131).

(V. Vol. cit. p. 310), la dimostrazione di quanto il sommo geometra francese erasi contentato di asserire. A queste osservazioni di FERMAT sembra anche collegato il III degli enunciati problemi.—Molto minore importanza possiede un altro scritto sulla teoria dei numeri (n. 19), nel quale gli autori, per costruire dei triangoli rettangoli in numeri razionali x, y, z, pongono (come già fece DIOFANTO) $x = n$, $y = pn^2 - q$, $z = pn^2 + q$, con la condizione $4pq = 1$, ed attribuiscono a p, q valori numerici particolari: nascono così delle tabelle, a cui certamente nessuno avrà mai occasione di ricorrere! — Più tardi i medesimi autori somministrarono alla *Raccolta* un lavoro più originale (n. 20), avente per iscopo di fondare una teoria dei *numeri poligonali geometrici* analoga a quella che, sin dai tempi di IPSICLE (se non prima), erasi eretta sulla considerazione di una progressione aritmetica. Essi partono per ciò dalla progressione geometrica

$$a, \quad ma, \quad m^2a, \quad \ldots, \quad m^{n-1}a, \quad \ldots;$$

sommandone i primi n termini ($n = 1, 2, \ldots$) ottengono la nuova serie

$$\frac{ma - a}{m - 1}, \quad \frac{m^2 a - a}{m - 1}, \quad \frac{m^3 a - a}{m - 1}, \quad \ldots, \quad \frac{m^n a - a}{m - 1}, \quad \ldots,$$

i cui elementi si chiamano *numeri figurati geometri di I ordine.* Sommando n termini di questa nuova serie ($n = 1, 2, \ldots$) si otterranno similmente i *numeri figurati geometrici di II ordine.* E così proseguendo si otterrà come espressione dell' n^{mo} numero figurato di $(p + 1)^{\text{mo}}$ ordine la seguente:

$$\frac{m^{n+p} - m^{p-1}a}{(m-1)^{p+1}} - n\frac{m^{p-1}a}{(m-1)^p} - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\frac{m^{p-2}a}{(m-1)^{p-1}} - \cdots$$
$$- \frac{n(n+1)\cdots(n+p-1)}{1 \cdot 2 \cdots p}a.$$

Gli autori si arrestano poi a far conoscere alcune applicazioni delle considerazioni svolte. In una di esse estendono certe serie considerate da GIOVANNI BERNOULLI (*Opera omnia*, 1742, T. IV, p. 1) e FONTENELLE (*Mem. de Paris*, 1722). Nell' altra essi ricordano che nel *Journal de Trévoux* (Settembre e Ottobre 1701) era stato proposto di «trovare la curva di cui le ordinate seguono la progressione dei numeri naturali e le ascisse quelle dei numeri triangolari» e che esso erastato risolto dal CARRÉ (*Mem. de Paris*, 1701) e poi esteso dal FONTENELLE a tutti i poligoni aritmetici (*Elem. de la géom. de l'Infini*, Sect. VII, P. II); per analogia si propongono di «trovare la natura di quelle curve, le cui ordinate seguono la progressione dei numeri naturali e le ascisse la progressione dei numeri figurati geometrici di p^{mo} ordine»; tale curva si costruisce mediante una logaritmica ed una curva parabolica.

Non abbandoneremo l' analisi combinatoria senza citare un lavoro del FAGNANO (n. 5)[39], ove alcune formole fondamentali di essa sono applicate a risolvere il seguente problema di probabilità: «Trovare ne' lotti all' uso di Roma il numero di tutti i casi possibili favorevoli e di tutti i casi possibili contrari a chi gioca una combinazione di g numeri con la condizione che in essa si contengano f numeri i quali abbiano un luogo fisso nell' estrazione». Detto n il numero dei numeri fra cui si estrae, la probabilità della vincita è

$$P = \frac{n(n-1)\cdots(n-g+1)}{(e-f)(e-f-1)\cdots(e-g+1)}.$$

Ora poichè «ne' lotti all' uso di Roma tra la spesa e la ricompensa deve correre la medesima proporzione, che passa tra il numero de' casi possibili favorevoli e il numero de' casi possibili contrari», così si conclude il seguente teorema: Se d rappresenta la spesa contribuita dal giuocatore e p la ricompensa che gli si deve se vince, si avrà:

$$p = dP - d.$$ [40]

Eliminazione. Negli *Acta erud.* del 1749 (p. 627) il FAGNANO, sotto il velo dell' anonimo, propose il seguente problema: «Date le equazioni $x^4 = px^2 + qx + r$, $x^4 = fx^3 + gx^2 + hx + r$, determinare i coefficienti f, g, h in modo che uno stesso valore di x soddisfi le due equazioni». Pure sotto il velo dell' anonimo egli riassunse (v. n. 23) la soluzione che ne fu data da G. F. BAERMANN negli *Acta* dal 1750[41]; in tale soluzione g e h vengono ottenuti in funzione di f, il quale rimane arbitrario, come potevasi prevedere.[42] Del problema e del riassunto egli si confessò autore in un lavoro (n. 26) ove vengono insegnate delle considerazioni che rivelano la genesi della questione ed un nuovo modo di scioglierla e poi di generalizzarla. Ivi il nostro autore stabilisce differenti proposizioni che si possono compendiare nel seguente enunciato: «Il polinomio

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{m-1}x^{n-m+1}$$
$$-\left(u^m + a_1u^{m-1} + \cdots + a_{m-1}u + \frac{a_{m+1}}{u} + \cdots + \frac{a_n}{u^{n-m}}\right)x^{n-m}$$
$$+ a_{m+1}x^{n-m-1} + \cdots + a_n$$

39) Questo lavoro non è ricordato in *A History of the mathematical Theory of Probability* (Cambridge and London, 1865) del TODHUNTER.

40) Altre questioni analoghe alle surriferita, in uno ad alcune proposizioni combinatorie che vi si collegano, si trovano in *P. M.*, T. I, p. 506—528.

41) *Excerptae Epistolae* G. F. BERMANNI *mathem. in Acad. Witteb. Prof. Publici, ad* J. O. M. (Nova Acta Eruditorum, Anno MDCCL, p. 134—135).

42) Cf. anche: G. BAERMANNI *Analysis problematis algebrici* etc. (*Nova Acta Eruditorum*, Anno MDCCLII, p. 665—669).

è divisibile per $x-u$.» Per consequenza, se u è radice dell' equazione $x^4=px^2+qx+r$,

$$x^4=\left(u-\frac{g}{u}-\frac{h}{u^2}-\frac{r}{u^3}\right)x^3+gx^2+hx+r$$

sarà un equazione avente una radice comune con quella. Similmente si potrà trasformare ogni equazione priva di un qualunque suo termine, in altra completa. Il FAGNANO riconosce che contro questo pro cedimento si può far valere l' ignoranza delle formole di risoluzione delle equazioni di grado >4, ma replica notando che la loro conoscenza, nel caso attuale, si può concedere, come nell' alta geometria si ammette l' effet tuabilità di qualsia quadratura. Da ultimo egli mostra che $f(x)-f(u)$ è sempre divisibile per $x-u$ mentre $f(x)-f(-u)$ lo è per $x+u$.

Formole per la moltiplicazione degli archi. Ritorniamo sulla memoria n. 10 per osservare come, nel passare dall' equazione antecedentemente segnata (8) alla (9) s' incontri la seguente:

$$c^{a-1}\left(y+\sqrt{y^2-c^2}\right)=x+\sqrt{x^2+c^2}. \tag{10}$$

Ora differenziandola e dividendo l' equazione risultante per la primitiva si ottiene

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}=a\frac{dx}{\sqrt{x^2-c^2}}.$$

Similmente

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2+c^2}}=a\frac{dx}{\sqrt{x^2+c^2}}.$$

Facendo quì $c=1$, $y=z\sqrt{-1}$, $x=u\sqrt{-1}$ essa diviene

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=a\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

mentre le (8) e (9) assumono il seguente aspetto:

$$(11)\quad\begin{cases} 2z\sqrt{-1}=\left(u\sqrt{-1}+\sqrt{1-u^2}\right)^a-\left(u\sqrt{-1}-\sqrt{1-u^2}\right)^a, \\ 2u\sqrt{-1}=\left(z\sqrt{-1}+\sqrt{1-z^2}\right)^{\frac{1}{a}}+\left(z\sqrt{-1}-\sqrt{1-z^2}\right)^{\frac{1}{a}}. \end{cases}$$

D' altronde l' equazione precedente integrata dà

$$\text{arc sen } z=a \text{ arc sen } u$$

o anche

$$\text{arc corda } z=a \text{ arc corda } u;$$

e poichè dalle (11), fatti i calcoli, scompare ogni traccia d' immaginario, così esse porgono la soluzione del problema della moltiplicazione degli archi. Il FAGNANO le ha variamente trasformate, ottenendo così, non solo delle formole già stabilite da GIOVANNI BERNOULLI (*Acta Erud.* 1712; *Opera omnia*, T. I, p. 511) e dal LAGNY (*Mem. de Paris*, 1705), ma altre in

cui entrano le secanti degli angoli considerati.[43]) — Non pago di queste soluzioni del problema della divisione degli archi il FAGNANO ne diede un' altra per approssimazione (n. 27) basata sull' identità

$$\frac{A}{2^k \pm 1} = \frac{A}{2^k} \pm \frac{A}{2^{2k}} + \frac{A}{2^{3k}} \pm \frac{A}{2^{4k}} + \cdots;$$

ora l' espressione

$$\frac{2^k \pm 1}{3},$$

ove si prenda il segno $+$ se k è dispari e il segno $-$ se è pari, è sempre un intero g, onde la formola precedente si può scrivere nei due modi seguenti:

$$\frac{A}{g} = \frac{3A}{2^k} \pm \frac{3A}{2^{2k}} + \frac{3A}{2^{3k}} \pm \frac{3A}{2^{4k}} + \cdots,$$

$$\frac{A}{3} = \frac{gA}{2^k} \pm \frac{gA}{2^{2k}} + \frac{gA}{2^{3k}} \pm \frac{gA}{2^{4k}} + \cdots$$

che potranno utilizzarsi per dividere, mediante bisezioni ripetute, l' angolo A in 3 o g parti eguali.

Geometria elementare.

Massimi e minimi. Gli scritti nn. 11 e 15 contengono le soluzioni dei due seguenti problemi: I. Sia data la retta AB tagliata per metà in C da una retta CF facente con AB l' angolo semiretto ACE, determinare su CF il punto E tale che il quoziente $\frac{\overline{BE}^m - \overline{AE}^m}{\overline{DE}^n}$ risulti massimo o minimo. Per $m = 3$, $n = 1$ si ritrova una questione proposta al FAGNANO da GUIDO GRANDI. II (suggerito al FAGNANO dal P. ORAZIO BORGONDIO): Dati in un piano un angolo ed un cerchio, trovare quella tangente al cerchio di cui è minimo il segmento intercetto fra i lati dell' angolo[44]). Maggiore interesse teorico possiede la memoria n. 32, ove GIORDANO RICCATI si propose di fondare la teoria degli isoperimetri nel piano sopra semplici considerazioni geometriche elementare: è l' intento stesso di un ben noto opuscolo del geometra greco ZENODORO, del quale il nostro autore sembra abbia ignorata la esistenza, quantunque esso sia stato pubblicato a Basilea sin dal 1538, assieme al *Commento all' Almagesto* di TEONE ALESSANDRINO.

Quadratura del cerchio. Nella *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem* (*Novi Comm. Petrop.*, T. VIII, Petrop.

43) Cfr. anche uno schediasma presentato dal FAGNANO all' Accademia degli Arcadi di Roma e pubblicato in *P. M.* T. II, p. 469—476 col titolo *Altro metodo per la sezione indefinita degli archi circolari senza il sussidio delle serie.*

44) Per altro problema congenere a questi due, si vegga *P. M.*, T. II, p. 209—211.

1763, p. 157—168) EULERO ha dimostrato un procedimento per quadrare il cerchio, che si trova segnalato in un frammento tolto dai manoscritti di CARTESIO. Tale procedimento può enunciarsi algebricamente così: „Se si determinano successivamente le quantità positive $x_1, x_2, x_3, \ldots$ per modo che sia:

$$(a+x_1)x_1=\frac{a^2}{4},\ (a+x_1+x_2)x_2=\frac{a^2}{16},\ (a+x_1+x_2+x_3)x_3=\frac{a^2}{64},\cdots$$

si avrà

$$a+x_1+x_2+x_3+\cdots=\frac{4a}{\pi}“.$$

GIORDANO RICCATI avendo appreso questo procedimento dagli *Acta Erud.* 1763, volle (v. n. 34) dimostrarlo elementarmente e vi pervenne fondandosi sopra queste due proposizioni: 1. L' area del poligono regolare di $2n$ lati inscritto nel cerchio di raggio R è eguale ad un rettangolo avente per lati $\frac{R}{2}$ ed il perimetro del poligono di n lati inscritto nel medesimo cerchio. 2. L' area di un cerchio è media proporzionale tra l' area di qualunque poligono regolare ad esso circoscritto e quella di un poligono isoperimetro e simile al primo.

Sezioni piane del paraboloide iperbolico. GUIDO GRANDI si è proposto di mostrare (v. n. 12), che, oltre ai coni ed ai cilindri, esistono altre superficie aventi per sezioni piane delle parabole e delle iperboli. A tale scopo considera un prisma avente per basi i due triangoli ABE, DCF e lo sega con un piano parallelo alla faccia $BCFE$; ottiene cosi sulle due basi le rette fra loro parallele GH, ML, e conduce GL; il luogo di tutte le rette è una superficie in cui si trovano infinite iperboli ed infinite parabole: ciò è oggi evidente dal momento che quella superficie altro non è che un paraboloide iperbolico.

Calcolo infinitesimale e applicazioni geometriche.

Polemica, critica, metodistica. Nel T. XXVII del *Giornale de' letterati d' Italia*[45]) il Conte GIULIO FAGNANO ammise come possibile di giungere ad un' equazione differenziale del seguente tipo

$$\frac{X\,dy^n}{y^m\,dx^n}=\frac{a}{x}+b\,\frac{d^2y}{dx^2}+c\,\frac{d^2y}{dx\,dy}+\frac{f\,dy}{y\,dx}$$

senza supporre costante dy o dx. Tale asserzione fu combattuta di NICOLÒ BERNOULLI (*Acta erud.* T. XXIX), il quale la ritenne legittima soltanto per $c=-b$. Il FAGNANO rispose nel T. XXXI del *Giornale* suddetto[46]) e

45) V. il n. 26 dell' *Indice* contenuto nella I parte del presente scritto.

46) V. il n. 31 dell' *Indice* succitato.

provocò così un nuovo scritto del suo oppositore (*Acta erud.*, Suppl. T. IX). Ed a questo nuovo attacco il FAGNANO „fece rispondere" dal proprio figlio: mi esprimo così perchè la parte dottrinale della memoria n. 13 fu inserita sotto il nome del padre nel T. II (p. 282—291) delle *P. M.*

Al pari di questo scritto polemico, possiede un certo valore permanente anche la memoria pseudonima n. 25, ove l' autore — che è sicuramente GIULIO FAGNANO (nome di cui GIOVANNI GALFI e FLAVIO GANGINI sono anagrammi) — rivendica all' autore delle *P. M.* le indagini sulla lemniscata esposte dal MACLAURIN nel suo *Trattato delle flussioni,* adducendo come prova il fatto che i relativi studi del FAGNANO risalgono agli anni 1715—1718, mentre l' opera del MACLAURIN uscì in Inglese nel 1742 e sette anni dopo in Francese. L' autore corregge poi un' errata rappresentazione geometrica che si trova nell' Art. 802 di quel *Trattato* e stabilisce un teorema sull' iperbole ivi assunto senza dimostrazione (Art. 799 e 927).

Interessantissime sono le due lettere di VINCENZO RICCATI di cui consta lo scritto n. 36. La prima, non già perchè contiene una rivendicazione di priorità, ma perchè richiama alla memoria il fatto che il RICCATI medesimo[47]) e PAOLO FRISI[48]) si occuparono più di un secolo fa di un punto notevolissimo del piano di un triangolo: parlo di quel punto per cui è minima la somma delle distanze dei vertici[49]); e dimostrarono geometricamente essere desso quel punto le cui congiungenti con i vertici stessi formano a due a due angoli fra loro eguali. La seconda, non già per avere toccata una questione[50]) a cui più tardi GREGORIO FONTANA[51]) consacrò un articolo speciale, ma perchè fa vedere che V. RICCATI *per primo ebbe ed attuò l' idea di fondere il calcolo differenziale coll' integrale.* „Se avessi — egli scrive — scelto il metodo di parlar prima del Calcolo differenziale, e delle affezioni delle curve, che da esso deduconsi; appresso del Calcolo integrale, e delle affezioni, che ne abbisognano, voi[52]) avreste

47) Nelle *Institutiones analyticae a* V. RICCATO *et* H. SALADINO (Bononiae, 1767).

48) *De problematibus quibusdam maximorum et minimorum* (Atti dell' Acc. di Siena, T. IV, 1771).

49) Su tal punto attirò l'attenzione dei geometri il FERMAT proponendo il problema: «Datis tribus punctis, quartum reperire, a quo si ducantur tres rectae ad data puncta, summa trium harum rectarum sit minima quantitas» (*Oeuvres de Fermat,* ed. TANNERY *et* HENRY, T. I, 1891, p. 153).

50) Se ogni settore circolare sia esprimibile mediante un settore iperbolico immaginario.

51) *Sopra i logaritmi delle quantità negative e sopra gl'immaginari* (Mem. delle Soc. Ital. delle Scienze, T. I, 1782, p. 183—202).

52) Questa lettera è in risposta a tre articoli di G. PESSUTI inseriti nel *Nuovo Giornale de' letterati d'Italia* (T. I, p. 50, T. II, p. 29, T. III, p. 78). Il PESSUTI replicò con le *Riflessioni analitiche etc.* (Livorno, 1777).

ragione d' appormi una perpetua confusione, e d' aver fuori d' ogni buon ordine mescolata una cosa coll' altra. Ma il mio metodo è interamente diverso; e voi dovreste esaminare s' esso sia buono e ordinato, non se sia conforme a metodi altrui. Acciocchè siate in istato di fare meglio cotal disamina, ve l' esporrò minutamente. Mio disegno è stato d' unire insieme il calcolo differenziale e integrale, dividendo l' Opera in due parti. Nella prima tratto delle prime differenze, nella seconda delle differenze seconde e ulteriori. Quanto alla prima la divido in due libri. Nel primo tratto di quella parte del calcolo differenziale, che conduce o scioglie formole composte d' una sola variabile. Egli è vero che mostro nel principio la differenziazione, ed integrazione d' alcune semplicissime formole a due variabili; perchè ne faccio uso in progresso in alcune formole d' una variabile. Ma la facilità, e l' eleganza permette agli autori una sì discreta libertà. Nel secondo libro tratto di quella parte del calcolo differenziale e integrale, che conduce, o scioglie formole composte di due o più variabili. Nelle seconda parte, che forma il terzo libro, parlo del calcolo differenzio-differenziale, e del suo integrale. Sembrami d' avere esattamente eseguito così fatto metodo, che mi sono proposto. — Eccovi la ragione, che m'ha indotto ad abbandonare il metodo antico. Se avessi prima parlato del calcolo differenziale e poi dell' integrale, sarebbe stato di mestieri, che col differenziale trovassi le formole, e con essi sciogliessi i problemi diretti; indi passando all' integrale le richiamassi di nuovo per applicarle ai problemi inversi, il che porta lunghezza e nojosa ripetizione ..... Quanto a' principianti, io n'ho fatte replicate prove, e v' assicuro che il mio metodo riesce loro più facile del comune." Sia questa lunga citazione giustificata dal fatto che la questione didattica della fusione del calcolo differenziale coll' integrale è oggi all' ordine del giorno!

Formole di integrazione. Alla *Nuova Raccolta* Fagnano figlio ha somministrato tre articoli (nn. 29, 30, 31) tutti relativi a certi integrali già conosciuti. Nel primo deduce dall' identità

$$i \operatorname{tg} nx = \frac{(1 + i \operatorname{tg} x)^n - (1 - i \operatorname{tg} x)^n}{(1 + i \operatorname{tg} x)^n + (1 - i \operatorname{tg} x)^n}$$

altre analoghe che portano a concludere la relazione seguente

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} nx} = \log \left(\frac{\operatorname{tg} nx}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 nx}} \right)^{\frac{1}{n}},$$

nonchè altre somiglianti; così resta illustrata un asserzione contenuta nel §. XI della memoria di Giovanni Bernoulli intitolata *Continuatio materiae de trajectoriis reciprocis* (*Acta Erud.*, Suppl. T. IX; *Opera omnia*, T. II, p. 600). L' articolo secondo concerne invece gli integrali:

$$\int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen} x}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m x}$$

e si riattacca a ricerche di EULERO; il terzo invece si connette nuovamente a risultati di GIOV. BERNOULLI, tendendo a dimostrare le riduzione di $\int \frac{z^m dz}{(c+ez^n)^p}$ a $\int \frac{z^m dz}{c+ez^n}$. — Tutte queste indagini sono evidentemente connesse a quelle (che risalgono al 1718) i cui risultati sono consegnati nelle *Soluzione di tre problemi di calcolo integrale* (*P. M.*, T. II, p. 492—503), ove GIULIO CARLO DE' FAGNANI, giunse alla rettificazione della curva logaritmica con metodo proprio, differente da quelli (a lui, del resto ignoti) che condussero il MARCHESE DE L' HÔPITAL (1692), HUYGENS (1693), JACOPO RICCATI (1715)[53], e CÔTES (1722) allo stesso risultato.

Il teorema del binomio per un esponente qualunque. Contemporanee alle investigazioni di FAGNANO padre, testè citate, sono quelle, di gran lunga più importanti, contenute nell' articolo *Maniera di far servire alla geometria alcune dignità immaginarie* (*P. M.*, T. II, p. 476—492), ove, assai prima di EULERO, sono considerate e trattate in modo originale le potenze ad esponente immaginario. Ivi il nostro autore considera la quantità

$$E = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots$$

e si domanda quale ne sia l' espressione in termini finiti, qualunque sia n. Per rispondere osserva che, differenziando rispetto a x, si ottiene

$$\frac{dE}{dx} = \frac{n}{1+x}E \quad \text{ossia} \quad \frac{dE}{E} = n\frac{dn}{1+x}$$

donde intégrando si ricava

$$E = (1+x)^n,$$

cioè il teorema del binomio per un esponente qualunque. Il FAGNANO applica questo importantissimo risultato ad esprimere in serie di quantità reali le seguenti quantità apparentemente immaginarie

$$\frac{(1+x)^{\sqrt{-1}} + (1+x)^{-\sqrt{-1}}}{2}, \quad \frac{(1+x)^{\sqrt{-1}} - (1+x)^{-\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

e se ne serve per risolvere il problema seguente: „Dati il cerchio di raggio 1 e la iperbola equilatera di potenza 1, trovare il settore del primo che equivale all' area compresa fra l' iperbola, l' asse delle x e le ordinate relative alle assciss 1 e $x + 1$.“ E conclude: „è dunque motivo di sperare, che questa mia invenzione giungerà affatto nuova agli analisti, poichè, per

53) V. la *Vita del* CONTE JACOPO RICCATI *scritta dal* CAV. C. DI ROVERO in *O. R.*, T. IV, p. XIV.

quanto è a me noto, niuno di essi à mai dato segno di credere che si potesse far uso delle quantità innalzate a dignità immaginarie."

Archi di conica a differenza rettificabile; spirali sinusoidi. Per non allungare ulteriormente questo scritto non analizzo il lavoro n. 28, di cui è palese e confessato il legame con uno inserito in *P. M.* (T. II, p. 504—510); e per quanto concerne le memorie nn. 2, 3 e 4 mi basti ricordare[54]) che esse fanno risalire al CONTE DI FAGNANO la scoperta delle *spirali sinusoidi.*

Non è infrequente l' udire affermare (anche da' giudici più benevoli) che, prima del 1850, i matematici Italiani lavorarono isolatemente, senza prendere parte al grande movimento intellettuale che fece raggiungere alle Scienze esatte lo stato in cui attualmente si trovano. Da quanto esponemmo nelle pagine precedenti — ove, in quasi ogni linea, s' incontra il nome di qualche sommo matematico oltramontano — risulta che quell' affermazione è disforme dal vero, almeno per quanto concerne il Sec. XVIII. I lavori del RUFFINI e del MALFATTI, del PAOLI e del FONTANA, del BORDONI e del MAINARDI, e di altri minori, bastano ad estendere la portata di tale conclusione sino alla metà del Secolo attuale.

---

54) Cf. G. LORIA, *Integrali Euleriani e spirali sinusoidi* (Resoconti dell' Acc. di Praga, 1897).

---

4 bis) In questo articolo è esposto quel procedimento per integare certe equazioni differenziali che si chiama *metodo della dimezzata separazione.* Questo metodo fu comunicato nel 1714 da J. RICCATI a B. ZENDRINI e questi, a mezzo del BOURGUET, lo portò a conoscenza di LEIBNIZ, che così giudicollo, in una lettera diretta al BOURGUET stesso, da Hannover nel Dicembre dell' anno suddetto, e che non si trova nei *Math. Schriften,* ed. GERHARDT: «Le discours Analytique de votre Ami, sur la manière de séparer les inconnues dans les Equations différentielles, me parait ingénieux, et ses méditations méritent d'être cultivées et éclaircies plus amplement. Je compare ces sortes de méthodes avec les différents tours d'adresse dont on se sert dans le calcul de Diophante, quand il s'agit de résoudre les Equations en nombres rationnaux. Je ne sais si c'est M. ZENDRINI, ou quelque autre Ami que vous avez en Italie. Quelqu'il soit, il parait capable de donner quelque chose de considérable, et je vous supplie, Monsieur, de l'exhorter à poursuivre. Cependant il faut que je dise qu'il y a des séparations des inconnues dans les différentielles, qui ne suffisent point pour en tirer les quadratures, quoique on ait coutume de prendre l'un pour l'autre» (*Opere del Conte* JACOPO RICCATI, *Nobile Trevigiano,* T. I. Lucca 1761, p. 436).

14 bis) Avendo il MANFREDI fatto omaggio della sua opera a LEIBNIZ, ricevette da questi la seguente lettera, assai lusinghiera ed interessante, che il

Fabroni ha pubblicata per primo (*Vitae Italorum doctrinae excellentium* etc., T. V, Pisis MDCCLXXIX, p. 223—224) e che non trovò posto in *Leibnizens Math. Schriften*, *ed.* Gerhardt

Illustrissimo et celeberrimo Viro Gabrieli Manfredio Guilelmus Leibnitius S. P. T.

Pro munere egregio gratias et meo et publico nomine tibi ago. Debebit tibi Italia, aliisque paucis, ne expers sit elegantioris, profundiorisque Geometriae nuper apertae. Nec dubito, vestra ingenio magnos in ea progressus factura, ubi semel rectae viae institerint. Vobis totam prope Algebra debemus, qualis hactenus habetur; nam cubici gradus resolutio Scipionis Ferrei, et biquadratici est Ludovici Ferrarii. In Geometria sublimiore coeperant praeclari aliquid agere Cavalerius et Torricellius; sed cum in ipsis initiis haesissent, alii eorum studiis adiuti progressi sunt longius, tandemque res ad quoddam Analyseos seu Calculi genus a me perducta est. Eam quis videtur multum abesse a perfectione? cum ne in Algebra quidem hactenus aliquis publice processerit ultra quartum gradum, ant saltem viam longius progrediendi ostenderit. Tu quidem eleganti, atque utili compendio sparsim exposita complexus es, ut facilius apparet, quid adhuc desideretur. Aequationem differentialem, quam sub finem Operis construis ita resolvere soleo; si fit $dy : dx = z + vy$, posito v, et z dari per x utcumque. Fiet $y = n\int z\,dx : n$ et $\log n = \int y\,dx$, seu $b^{\int y dx} = n$, adeoque tandem erit $y = b^{\int v dx}\int\left(z\,dx : b^{\int v dx}\right)$.

Optet autem regressu facto Catalogos exhiberi aequationum differentialium tractabilium, ut, oblata aliqua, constituere facilius possimus primo aspectu, an sit in potestate. Sed maxime prodest artem exerceri per problemata, veluti si quis sibi proponat in superficiebus datis minimam a dato puncto ad datum ducere, aliaque id genus. Per problemata enim, et ingenium acuitur, et scientia augetur, atque in usus transfertur.

Ceterum mihi semper gratissimum erit, tuo vel amicorum tuorum discere, quid apud vos in provehendis scientiis geratur. Nam et anatomiam pulchre apud vos excoli video. Sed Medicina ipse ubique adhuc squallet, nec reperta satis ad usum accomodantur. Itaque felicioribus saeculis, id est quibus homines et maxime Principes, magis rem Suam curent, transcribere haec oportet. Quod superest vale, et fave.

Dabam Hannoverae, 10. April 1708.

NOTE SUR LE CARACTÈRE GÉOMÉTRIQUE DE L'ANCIENNE ASTRONOMIE

PAR LE

Dr. PAUL MANSION,

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE GAND, MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

„*Mathemata mathematicis scribuntur.*" COPERNIC.

1. Objet de la présente note.[1]) Les travaux de BÖCKH, de TH.-H. MARTIN, de SCHIAPARELLI, de P. TANNERY et de leurs continuateurs sur l'astronomie des Grecs; ceux des savants qui, avec CURTZE, ont fait connaître la vie et l'oeuvre de COPERNIC; les recherches qui ont abouti à la publication complète du procès de GALILÉE et à celle d'une nouvelle édition de ses oeuvres; enfin des écrits récents de POINCARÉ et de DUHEM sur la philosophie des sciences physiques, ont attiré l'attention sur le rôle prépondérant qu'a joué dans le passé et que jouera dans l'avenir, l'explication purement géométrique, ou si l'on veut, cinématique, des phénomènes naturels.

Néanmoins, on n'a pas encore réuni, jusqu'à présent que nous sachions, dans un écrit spécial, les témoignages anciens et modernes qui prouvent que, depuis deux mille ans, il y a une tradition de plus en plus claire tendant à établir cette proposition fondamentale: «Pour qu'une théorie scientifique (quantitative) de l'Univers soit satisfaisante, il suffit qu'elle rende compte des phénomènes, au point de vue purement géométrique ou cinématique.»

Si nous en avions eu le temps, nous eussions voulu tenter la collection de textes dont nous venons de parler; mais à défaut du mémoire détaillé qu'il nous a été impossible de faire, nous croyons utile d'en donner, dans cette note, au moins une esquisse, ou plutôt d'en réunir quelques fragments qui pourront faire connaître la tendance générale de la science, signalée plus haut.

2. Les sept systèmes de l'ancienne astronomie. On peut distinguer dans l'ancienne astronomie, sept systèmes pour rendre compte des mouvements célestes: 1° Le système du feu central, de PHILOLAUS. Dans ce système, un astre imaginaire (l'Antiterre), la Terre, la Lune, le Soleil, les cinq planètes (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne), et enfin la sphère des étoiles fixes, circulent autour du centre du monde, occupé par le feu

---

1) Nous appelons *ancienne* astronomie (nous ne disons pas astronomie ancienne) celle qui, de PHILOLAUS à TICHO BRAHÉ, explique les mouvements célestes par la combinaison de mouvements circulaires. Pour nous, l'astronomie moderne commence avec KÉPLER.

[illegible] les sphères homocentrique d'Eudoxe, dans lequel [illegible] les mouvements assez compliqués autour de la Terre, [illegible] au centre du monde et à une distance invariable de [illegible] Le système d'Héraclide du Pont ou de l'un de ses con[illegible]: dans ce système, les étoiles sont fixes, la Terre a un mouve[illegible] et est le centre du monde et du mouvement [illegible] du Soleil, mais le Soleil est le centre du mouvement [illegible] planètes. 4° Le système d'Aristarque de Samos: le [illegible] du monde: il est le centre du mouvement propre des [illegible] la Terre est encore le centre du mouvement propre [illegible] Le système d'Hipparque et de Ptolémée, où tous les [illegible] circulaires, ou composés de mouvements circu[illegible] la Terre, replacée au centre du monde et immobile. [illegible] où tous les astres ont des mouvements circu[illegible] de mouvements circulaires, autour du Soleil, supposé [illegible] du monde. 7° Le système de Ticho Brahé où le [illegible] planètes ont des mouvements composés de mouve[illegible] planètes autour du Soleil, le Soleil et la Lune autour [illegible] Terre, immobile au centre du monde, est d'ailleurs aussi [illegible] circulaire des étoiles fixes.

[illegible] l'Astronomie moderne en assignant aux planètes et [illegible] elliptique autour du Soleil, mouvement qui équi[illegible] *un nombre infini* de mouvements circulaires, comme [illegible] les séries de Fourier. Enfin Newton, par sa décou[illegible] universelle, démontre que les mouvements élémentaires [illegible] solaire sont des combinaisons, *en nombre fini*, de [illegible] hyperboliques ou paraboliques, incessamment va[illegible]

[illegible] rendent compte des phénomènes célestes, de [illegible] au dernier, à part le troisième et le qua[illegible] septième, qui sont complètement équivalents, à ce [illegible]

[illegible] entre l'Astronomie et la Physique chez les Anciens.

[illegible] s'étonner de la diversité des assertions qui sont [illegible] savoir: *Au centre du monde se trouve, ou le feu* [illegible] *Terre immobile* (Eudoxe, Ptolémée, Ticho[illegible] *d'un mouvement de rotation* (Héraclide du [illegible] Aristarque, Copernic).

[illegible] assertions n'appartiennent pas à l'Astronomie pro[illegible] les Anciens; elles sont empruntées par

les Astronomes à la Physique, c'est-à-dire à cette partie de la Philosophie que nous appelons Cosmologie. Pour les Anciens, à partir du temps d'ARISTOTE, «c'est la Physique qui fournit au moins les principes des explications», remarque P. TANNERY; «l'astrologie [l'astronomie] n'intervient que pour le développement mathématique de ces principes»[2]). «Les mathématiciens, d'après ARISTOTE, dit de même SCHIAPARELLI, en faisant des hypothèses astronomiques ne cherchent pas à déterminer comment les choses sont vraiment dans la nature, mais seulement à représenter les mouvements célestes d'une manière qui ne répugne pas aux phénomènes et soit commode pour leur calcul et leur prédiction.»[3])

Dans ses belles études sur les systèmes de Grecs, SCHIAPARELLI a mis en lumière, relativement à cette distinction entre l'Astronomie et la Physique, un passage de POSIDONIUS, résumé ou cité par GEMINUS et conservé par SIMPLICIUS, où cette distinction est fortement marquée. Nous nous contenterons d'en citer la conclusion: «*Ὅλως γὰρ οὐκ ἔστιν ἀστρολόγου τὸ γνῶναι, τί ἠρεμαῖόν ἐστι τῇ φύσει, καὶ ποῖα τὰ κινητά, ἀλλὰ ὑποθέσεις εἰσηγούμενος τῶν μὲν μενόντων, τῶν δὲ κινουμένων, σκοπεῖ τίσιν ὑποθέσεσιν ἀκολουθήσει τὰ κατὰ τὸν οὐρανὸν φαινόμενα. Ληπτέον δὲ αὐτῷ ἀρχὰς παρὰ τοῦ φυσικοῦ, ἁπλᾶς εἶναι καὶ ὁμαλὰς καὶ τεταγμένας κινήσεις τῶν ἄστρων, δι' ὧν ἀποδείξει ἐγκύκλιον οὖσαν τὴν χορείαν ἁπάντων, τῶν μὲν κατὰ παραλλήλους, τῶν δὲ κατὰ λοξοὺς κύκλους εἱλουμένων.*»[4]) On peut la traduire à peu près ainsi: «D'une manière absolue, il n'appartient pas à l'astronome de savoir ce qui est fixe par nature et ce qui se meut; mais parmi les hypothèses relatives à ce qui est immobile et à ce qui se meut, il examine quelles sont celles qui correspondent aux phénomènes célestes. Il doit recourir au physicien pour les principes [de ses recherches, afin de savoir, par exemple] que les mouvements des astres sont simples et régu-

---

2) *Recherches sur l'histoire de l'astronomie grecque* (Paris, GAUTHIER-VILLARS, 1893), p. 28.

3) *Origine del Sistema planetario eliocentrico pressi i Greci* (Memorie del R. Istituto Lombardo, Classe di scienze matematiche e naturali, Vol. XVIII—IX della Serie III — Fascicolo V, 1898), p. 70. Un exposé détaillé de l'évolution purement géométrique des divers systèmes de l'ancienne astronomie, principalement d'après SCHIAPARELLI, se trouve dans THIRION, *Pour l'astronomie grecque* (Revue des questions scientifiques, Louvain, 1898, 2e série, t. XV, pp. 5—47, 435—475; t. XVI, pp. 111—158).

4) Nous citons ce passage d'après le Mémoire de SCHIAPARELLI indiqué plus haut (p. 100), et nous lui empruntons la substance de notre traduction (p. 85). SCHIAPARELLI avait déjà attiré l'attention sur le passage de POSIDONIUS dans son célèbre Mémoire sur les Précurseurs de COPERNIC dans l'antiquité. Voir la traduction allemande de CURTZE: *Die Vorläufer des* COPERNICUS *im Alterthum* (Leipzig, 1876, QUANDT und HÄNDEL), pp. 68 – 70 note; pp. 102—103, n° XL.

lièrement ordonnés; au moyen de ces mouvements, il prouvera ensuite que le choeur de tous les astres est circulaire, soit parallèlement, soit obliquement [à l'équateur].»

Voici un autre passage, non moins caractéristique, d'Adraste d'Aphrodisias, cité par Théon de Smyrne: «Quoique Hipparque ne fut pas un physicien et qu'il n'eut pas considéré avec soin quels sont les mouvements réels tels qu'ils sont dans la nature et ceux qui ne sont qu'apparents ou accidentels, toutefois, etc.»[5])

Comme on le voit, pour les Grecs, c'est au physicien seul à décider ce qui est immobile ou ce qui se meut; il suffit à l'astronome d'expliquer les phénomènes, de *sauver les apparences,* si l'on peut ainsi dire, en employant une expression française qui traduit exactement les termes grecs et latins correspondants. Du moment qu'il en est ainsi, on comprend pourquoi les Grecs ont pu passer si facilement du système d'Héraclide du Pont à celui d'Aristarque, et de celui-ci à celui d'Hipparque: ils n'avaient pas à s'inquiéter des réalités dont le domaine était réservé aux physiciens; le passage d'un système à un autre était une question de géométrie. On connaissait d'ailleurs, depuis Euclide[6]), les principes fondamentaux sur le mouvement relatif, nécessaires pour savoir ce que devenaient les phénomènes quand on remplaçait un système par un autre.

4. **Ptolémée.** Ptolémée, comme astronome, partage la manière de voir de ses prédécesseurs sur l'indifférence du choix des hypothèses, du moment qu'elles expliquent les phénomènes.

Dans les sept premiers chapitres du livre I de l'Almageste, il expose le plan de son ouvrage et en fait connaitre les hypothèses fondamentales déduites autant que possible de l'observation. Par exemple, il n'admet pas que la Terre ait un mouvement de translation, parce que les étoiles fixes n'ont pas de parallaxe.

Mais quand il s'agit de l'immobilité de la Terre ou de sa rotation diurne, il est bien forcé d'admettre qu'*au point de vue de l'astronomie, les deux hypothèses sont admissibles et même que la seconde est plus simple.*

5) Schiaparelli, Mém. p. 75.

6) Delambre, dans son *Histoire de l'Astronomie ancienne* (p. 60) donne à ce sujet les deux théorèmes suivants de l'*Optique* d'Euclide: «Si plusieurs objets sont en mouvement et un seul tranquille, il paraît se mouvoir en sens opposé. Si plusieurs corps se meuvent avec des vitesses inégales et que l'oeil soit emporté dans le même sens, les objets qui auront la même vitesse que l'oeil paraîtront stationnaires; ceux qui auront une vitesse plus grande paraîtront avancer; enfin ceux qui auront une vitesse moindre paraîtront aller en arrière». (Voir l'édition de l'*Optique* de Heiberg, p. 110.)

S'il la rejette, c'est au nom de la physique: «Il y a des gens, dit-il, qui tout en se rendant à ces raisons [contre un mouvement de la Terre, commun avec les autres corps graves], parce qu'il n'y a rien à y opposer, prétendent que rien n'empêche de supposer, par exemple, que le ciel étant immobile, la Terre tourne autour de son axe, d'occident en orient, en faisant cette révolution une fois par jour à très peu près; ou que si l'un et l'autre tournent, c'est autour du même axe, comme nous avons dit et d'une manière conforme aux rapports que nous observons entre eux. Il est vrai que, *quant aux astres eux mêmes et en ne considérant que les phénomènes, rien n'empêche peut-être que, pour plus de simplicité, cela ne soit ainsi.* Mais ces gens-là ne sentent pas combien, sous le rapport de ce qui se passe autour de nous et dans l'air, leur opinion est ridicule .... Les corps qui ne seraient pas appuyés sur elle (la Terre) paraîtraient toujours avoir un mouvement contraire au sien .... S'ils disaient que l'athmosphère est emportée par la Terre avec la même vitesse que celle-ci dans sa révolution [rotation diurne] il n'en serait pas moins vrai que les corps qui y sont contenus, n'auraient pas la même vitesse; ou s'ils en étaient entrainés comme ne formant qu'un corps avec l'air, on n'en verrait aucun précéder ni suivre; mais tous paraîtraient stationnaires; et soit qu'ils volassent ou fussent lancés, aucun n'avancerait ou ne s'écarterait jamais; c'est pourtant ce que nous voyons arriver, comme si le mouvement de la Terre ne devait leur causer ni retard, ni accélération» (Traduction HALMA, I, pp. 19, 20, 21).

Après avoir ainsi rejeté la rotation diurne de la Terre, *au nom de la physique,* et non pas de l'astronomie, et avoir exposé ses autres postulats fondamentaux, il dit, dans son chapitre 7: «Ces hypothèses étaient un préliminaire indispensable pour les détails où nous allons entrer ... *Elles seront d'ailleurs confirmées par leur accord avec les phénomènes* qui seront démontrés dans la suite.»

A partir de ce moment, PTOLÉMÉE n'est plus qu'astronome et quand plusieurs hypothèses expliquent un phénomène déterminé, il choisit l'une ou l'autre à volonté, par exemple, celle de l'épicycle ou de l'excentrique, pour le Soleil et la Lune: «La vraie cause de cette apparence d'irrégularité [dans le mouvement du soleil] peut s'expliquer par deux suppositions premières et simples. L'une ou l'autre rendra également raison des phénomènes» (HALMA, I, p. 170). «Nous pourrions également expliquer la première inégalité [de la Lune] par l'épicycle et par l'excentrique; mais comme nous avons deux inégalités, *nous jugeons plus convenable* d'employer l'une des hypothèses pour la première inégalité et l'autre pour la seconde» (HALMA, I, p. 239).

Plus loin, il affirme plusieurs fois que l'essentiel est d'expliquer les mouvements célestes par des hypothèses suffisantes. Voici encore une citation en ce sens: «Il faut autant qu'on peut, adapter les hypothèses les plus simples aux mouvements célestes; mais si elles ne suffisent pas, il faut en choisir d'autres qui les expliquent mieux» (HALMA, II, p. 374).

5. **Saint Thomas d'Aquin.** Au moyen âge, on peut citer S. THOMAS D'AQUIN comme le plus illustre représentant de la Théologie et de la Philosophie; comme tel, il a eu la plus grande influence sur les théologiens et les philosophes ultérieurs. HIPLER [7]) a fait connaitre un passage de son commentaire du *De coelo* d'ARISTOTE où il dit très nettement que le choix des hypothèses est indifférent, en Astronomie. «*Quod* [il s'agit de l'explication du mouvement des planètes] *etiam postremi Astrologi diversimode facere conati sunt. Illorum autem suppositiones, quas adinvenerunt, non est necessarium esse veras: licet enim talibus suppositionibus factis appareant solvere, non tamen oportet dicere has suppositiones esse veras, quia forte secundum aliquem modum nondum ab hominibus comprehensum apparentia circa stellas salvantur. Aristoteles tamen utitur huiusmodi suppositionibus ad qualitatem motuum tanquam veris.*»

Nous avons rencontré dans la *Somme theologique* (1, 32, 1, ad 2), un autre passage plus catégorique encore dans le même sens: «*Ad secundum dicendum, quod ad aliquam rem dupliciter inducitur ratio. Uno modo ad probandum sufficienter aliquam radicem: sicut in scientia naturali inducitur ratio sufficiens ad probandum quod coeli motus semper sit uniformis velocitatis. Alio modo inducitur ratio non quae sufficienter probet radicem, sed quae radici iam impositae ostendat congruere consequentes effectus: sicut in astrologia ponitur ratio excentricorum et epicyclorum ex hoc, quod hac positione facta possunt salvari apparentia sensibilia circa motus coelestes: non tamen ratio haec est sufficienter probans, quia etiam forte alia positione facta salvari possent.*»

---

7) Cité p. 55, note dans le IV. Heft des *Mitteilungen des Coppernicus-Verein zu Thorn.* M. HIPLER renvoie à l'édition de Parme des Oeuvres de S. THOMAS, t. XIX, p. 720. Nous avons vérifié le passage dans le t. II de l'édition de Venise de 1593, p. 49, col. 1, de la seconde pagination. A la p. 53, col. 2 de cette dernière édition, on lit: «*Possumus autem et brevius dicere quod quidam* ERACLITUS PONTICUS *posuit terram in medio moveri et coelum quiescere: cuius opinionem hic* ARISTOTELES *ponit*». Aristote cite cette opinion, mais ne l'attribue pas à HERACLIDES DU PONT, que S. THOMAS connaissait donc d'ailleurs. Notons aussi que HIPLER (l. c. p. 55, note 3) cite encore ce qui suit de S. THOMAS: «*Omnes praedicti articuli [de motibus coelestibus] vel parum vel nihil faciunt ad doctrinam fidei, sed sunt penitus physici*» (S. TH. Aq. Opp. Parmae, XVI, p. 164).

Cette remarque très juste de S. THOMAS que l'accord d'une hypothèse avec les faits ne prouve pas la réalité de cette hypothèse semble avoir eu plus tard une grande influence.

6. **Le Commentariolus de Copernic; la Narration prima de Rheticus.** Le premier de ces écrits est astronomique dans le sens strict du mot. Il a pour titre: NICOLAI COPERNICI *de hypothesibus motuum caelestium a se constitutis Commentariolus.* COPERNIC rejette les hypothèses de ses devanciers comme insuffisantes; il en propose de nouvelles: l'immobilité du soleil, la mobilité de la terre, etc., sans s'occuper le moins du monde si elles sont vraies ou non. Il demande seulement qu'on lui permette de les admettre comme postulats: *Si nobis aliquae petitiones ... concedantur, quae hoc ordine sequuntur* (Mittheilungen des Coppernicus-Vereins, Heft I, p. 6).

La *Narratio prima* de RHETICUS est écrite dans le même esprit astronomique: D'un bout à l'autre de ce Mémoire, l'auteur ne cesse de parler d'hypothèses explicatives des mouvements célestes, les unes anciennes et devenues insuffisantes, les autres nouvelles et expliquant les nouvelles inégalités; il en montre la convenance au point de vue philosophique (voir, par exemple, p. 465 de l'*Édition Séculaire* du livre de COPERNIC, le passage relatif à l'immobilité de la huitième sphère), mais il n'affirme pas qu'elles soient nécessaires et fait la distinction habituelle entre le rôle du physicien et celui du mathématicien. Montrons-le par quelques citations:

«*Primum autem, ut terrae mobilitate apparentias in coelo plerasque fieri posse, aut certe commodissime salvari assumeret, eum* [COPERNICUM] *aequinoctiarum .... praecessio, et eclipticae obliquitatis mutatio induxit*» (*Éd. séc.*, p. 460). «*Et quid D[ominum] praeceptorem moveret, ut tanquam mathematicus aptam motus globi rationem non assumeret, cum videret tali assumpta hypothesi ad certam rerum coelestium doctrinam constituendam nobis unicam octavam sphaeram eamque immotam, ..., sufficere*» (*Éd. séc.*, p. 461). «*Cumque haud ignores, quem locum hypotheses seu theoriae apud astronomos habeant, et in quantum mathematicus a physico differat, etc.*» (*Éd. séc.*, p. 463). — Il est persuadé d'ailleurs que les hypothèses de COPERNIC sont les meilleures possibles et qu'ARISTOTE et PTOLÉMÉE s'y convertiraient s'ils revenaient à la vie (pp. 463, 464). Mais jusqu'au bout, il les appelle des hypothèses, même au moment où il en fait le plus grand éloge possible en disant qu'elles sont pour ainsi dire identiques aux phénomènes: «*Eo vero gratiorem tibi utramque [Narrationem] fore spero, quo clarius artificum propositis observationibus ita D. praeceptoris mei hypotheses τοῖς φαινομένοις consentire videbis, ut etiam inter se tanquam bona definitio cum definito converti possint*» (*Éd. séc.*, p. 489).

7. Le livre des Révolutions de Copernic. Dans le livre des Révolutions, Copernic ne se tient pas exclusivement sur le terrain de l'Astronomie comme dans le *Commentariolus.* Dans les chapitres 7 et 8 du livre I, il aborde franchement la question philosophique du mouvement de la Terre et de l'immobilité du Soleil. Dans la dédicace au pape, il touche même à la question théologique, qui devait tenir une si grande place dans les discussions relatives au système du monde, au temps de Galilée, mais c'est pour l'écarter.

A. Dans cette dédicace au pape, Copernic fait l'histoire de sa pensée: les hypothèses courantes ne rendant pas bien compte des phénomènes, il a cru devoir partir de la supposition de la mobilité de la Terre, soutenue autrefois par quelques Anciens, pour donner de meilleures explications des faits que ses prédécesseurs: «*Quia sciebam aliis ante me hanc concessam libertatem, ut quoslibet fingerent circulos ad demonstrandum phaenomena astrorum, existimavi mihi quoque facile permitti, ut experirer, an posito terrae aliquo motu firmiores demonstrationes quam illorum essent, inveniri in revolutione orbium caelestium possent. Atque ita ego positis motibus quos terrae infra tribuo», etc. (Éd. séc., p. 6).* Quoiqu'on en ait dit, toute cette dédicace, à part la fin dont nous allons parler, est écrite au point de vue astronomique, c'est-à-dire que Copernic n'y parle du mouvement de la Terre que comme d'une *hypothèse* explicative des phénomènes célestes. Ce qui le prouve bien, c'est que la Congrégation de l'Index, dans les célèbres corrections qu'elle a fait au livre des Révolutions, dans son *Monitum* du 15 mai 1620 (voir le *Bullettino* de Boncompagni, IX, p. 704, note) n'y a trouvé rien à retrancher sauf les dix lignes (*Éd. séc.*, p. 7, l. 16—25) où Copernic exprime son dédain pour les *ματαιολόγοι* qui, ne sachant rien des mathématiques, se mêlent d'en juger en s'appuyant à tort sur l'Écriture sainte. Mais le bel aphorisme par lequel il termine ce passage: *Mathemata mathematicis scribuntur,* prouve que, dans sa pensée, son livre est avant tout astronomique.

B. Dans les premiers chapitres du livre I des Révolutions, Copernic, à l'imitation de Ptolémée au début de l'Almageste, expose les hypothèses fondamentales qui vont être la base de son ouvrage. Au ch. 5 et 6, il agite les deux questions où il va se séparer de Ptolémée: la Terre est-elle immobile; est-elle le centre du monde? A propos de la première, il pose, avec la même clarté qu'Euclide, le principe du mouvement relatif: «*Omnis enim quae videtur secundum locum mutatio, aut est propter spectatae rei motum, aut videntis, aut certe disparem utriusque mutationem» (Éd. séc. p. 16).* Puis appliquant la chose à la Terre, il observe que tout mouvement attribué à celle-ci aura sa répercussion en sens inverse, dans le mou-

vement des astres. C'est, comme on voit le principe même de tout son livre. Mais ce mouvement est-il réel? la terre n'est-elle pas au centre du monde? la sphère des étoiles fixes est-elle immobile comme il le conclut, par induction, au ch. 6, de la lenteur croissante des mouvements des planètes quand elles sont plus éloignées de nous? Ce sont ces questions qu'il examine en philosophe, en physicien, dans les chapitres 7 et 8. Là, et là seulement, il expose et réfute de son mieux, *sans faire du tout intervenir l'astronomie,* les raisons tirées de la physique par ARISTOTE et PTOLÉMÉE pour établir l'immobilité de la Terre[8]). Il conclut modestement: «*Vides ergo, quod ex his omnibus probabilior sit mobilitas terrae quam ejus quies, praesertim in quotidiana revolutione, tanquam terrae maxime propria*» *(Éd. séc., p. 24)*. Cette discussion philosophique terminée, il revient à l'astronomie, pour ne plus la quitter, dans son chapitre 9, où il achève l'exposé des hypothèses fondamentales de son livre: il indique, comment par induction, on peut être amené à attribuer plusieurs mouvements à la Terre et il résume très bien, en une seule phrase, comment il pourra, au moyen de ces hypothèses, expliquer tous les phénomènes (*Éd. séc.,* p. 25).

C. Tout le reste du livre des Révolutions est purement astronomique comme celui de PTOLÉMÉE après les sept premiers chapitres du début. Comme PTOLÉMÉE, COPERNIC sait que ses explications sont indépendantes de la vérité objective des principes qui en sont la base; ces principes sont des hypothèses explicatives et rien de plus. Voici quelques citations empruntées à l'Édition séculaire à l'appui de cette manière de voir: «*Jam ipsum motum [terrae] in summa exponemus, quatenus apparentia per ipsum tanquam hypothesim demonstrentur*» (p. 31, l. 3—4), «... *ex motu terrae ... quo tanquam principio et hypothesi utemur in demonstrationibus aliorum*» (p. 34, l. 18—19). Dans l'ancien Manuscrit, retrouvé de nos jours, vient ensuite un passage effacé, commençant par ces mots: «*Et si fateamur solis lunaeque cursum in immobilitate quoque terrae demonstrari posse, in caeteris vero errantibus minus congruit*» (p. 34, l. 6—7 de la note), puis un autre effacé aussi (p. 36, note l. 9—18) où COPERNIC dit, presque comme POSIDONIUS, que l'astronome emprunte ses principes à la physique:

---

8) Nous avons analysé les raisons de COPERNIC, dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 1894, t. XVIII, 1ère partie, pp. 12—15. Dans le *Monitum* de la congrégation de l'Index de 1620, on dit à propos du chapitre 8: «*Totum hoc caput posset expungi: quia ex professo tractat de veritate motus terrae, dum solvit veterum rationes probantes eius quietem; cum tamen problematice videatur loqui, ut studiosus satisfiat et series et ordo libri integer maneat, emendetur ut infra*». Suivent deux corrections insignifiantes, puis la suppression de la conclusion citée dans le texte depuis *vides*, jusque *propria.*

«*Quae ex philosophia materiali ad institutionem nostram necessaria videbantur tanquam principia et hypotheses ... summatim recensuimus. Assumpsimus etiam quibusdam revolutionibus mobilem esse terram ...*» Dans l'introduction du livre II, il annonce qu'il va s'occuper du mouvement diurne, brièvement parce qu'on en a traité suffisamment avant lui: «*Nihil refert, si quod illi per quietem terram et mundi vertiginem demonstrant, hoc nos ex opposito suscipientes ad eandem concurramus metam, quoniam in his quae ad invicem sunt, ita contingit, ut vicissim sibi ipsis consentiant* (*Éd. séc.*, p. 73). — Le titre du ch. 3 du livre III est: «*Hypotheses quibus aequinoctiorum obliquitatisque signiferi et aequinoctialis mutatio demonstatur*» (*Éd. séc.*, p. 163). — Dans les quatre premières éditions, on trouve ce passage (effacé dans l'ancien Manuscrit): «*Estque prorsus eadem demonstratio, si terra in f quiesceret atque sol in a b c circumcurrente moveretur, ut apud* Ptolemeum *et alios*» (*Éd. séc.*, p. 204, dernières lignes de la note). — Delambre (dans son *Histoire de l'Astonomie moderne*, p. 134) fait remarquer que Copernic sait, comme Ptolémée, que l'on peut expliquer les mouvements de plusieurs manières. C'est ce qu'il fait, par exemple, pour Mercure, livre V, c. 32: *De alia quadam ratione accessus ac recessus.* «*Prius autem quam recedamus a Mercurio placuit alium adhuc modum recensere priore non minus credibilem, per quem accessus et recessus ille fieri ac intelligi possit*» (*Éd. séc.*, p. 394). — Enfin, au début du livre VI, il caractérise très bien son explication des mouvements des planètes en latitude, comparée à celle des anciens: «*Quae igitur prisci Mathematici hic etiam per stabilitatem terrae demonstrasse rati sunt, eadem per assumptam ejus mobilitatem majori fortasse compendio, ac magis apposite facturi sumus*» (*Éd. séc.*, p. 412).

Une preuve *à posteriori* du caractère purement astronomique du livre de Copernic, c'est que la Congrégation de l'Index, dans son *Monitum*, n'a plus trouvé à corriger dans tout l'ouvrage, à partir du ch. 12 du Livre I jusqu'à la fin (de la page 35 à la page 444 de l'Édition séculaire) que ce qui suit: *In lib. 4. cap. 20. p. 122.* «*In titulo capitis dele verba (horum trium syderum) quia terra non est sidus*» (Boncompagni, loc. cit.). Le titre en question était: «*De magnitudine horum trium syderum, solis, lunae et terrae ac invicem comparatione*» (*Éd. séc.*, p. 282, l. 29).

8. **La préface d'Osiander.** On peut tirer de ce qui précède les conclusions suivantes: 1° Au point de vue *théologique*, Copernic ne croit pas la doctrine de la mobilité de la Terre contraire à la Bible (fin de la dédicace au pape). 2° Au point de vue *philosophique*, il la trouve plus probable que celle de l'immobilité de la Terre (c. 7 et 8 du Livre I des *Révolutions*). 3° Au point de vue *astronomique*, Copernic prouve que l'hypo-

thèse de la mobilité de la Terre explique les phénomènes d'une manière plus simple que l'hypothèse contraire; mais il sait que celle-ci peut aussi servir à les expliquer (*Commentariolus;* tout le livre des *Révolutions*).

Osiander, ou bien est moins persuadé que Copernic au point de vue philosophique et théologique, ou il craint plus que Copernic les péripatéticiens et les théologiens. C'est pourquoi il conseille à Copernic d'écrire une préface purement astronomique à son livre: «*De hypothesibus ego sic sensi semper non esse articulos fidei, sed fundamenta calculi, ita ut etiamsi falsae sint, modo motuum φαινόμενα exacte exhibeant nihil referat. . . . Quare plausibile fore videretur si hac de re in praefatione nonnihil attingeres.*» Il écrit la même chose, le même jour, à Rheticus qui se trouve près de Copernic (Prowe, *Copernicus*, I. Band, II. Theil, p. 522—523). On ignore quelle a été la réponse de Copernic. Ce qui est le plus probable, c'est que Copernic, sans rien changer à son livre, a laissé à Osiander le soin d'écrire, *sous sa propre responsabilité,* une préface dans le sens indiqué. C'est ce qu'Osiander a fait, *sans toucher en rien aux opinions théologiques et philosophiques de* Copernic relatives à la mobilité de la Terre. Dans le célèbre avant-propos intitulé: *Ad lectorem de hypothesibus hujus operis* (*Éd. séc.*, p. 1) Osiander se contente d'exposer, avec une grande clarté, le rôle des hypothèses en astronomie. Il termine cet exposé de la doctrine traditionnelle à ce sujet par ces mots: «*Neque quisquam, quod ad hypotheses attinet, quicquam certi ab astronomia expectet, cum nihil tale praestare queat*» (*Éd. séc.*, p. 2). C'est au fond la même pensée que celle de Saint Thomas exposée plus haut.

Cet avant-propos d'Osiander a scandalisé Képler et beaucoup de savants de notre temps, qui ignorent ou oublient la distinction ancienne entre l'astronomie et la physique. Mais cette distinction était classique au temps d'Osiander et après lui, comme on peut le voir dans le livre de Prowe, qui fait à ce sujet des citations caractéristiques de Gemma Frisius (p. 392, 393), de Mélanchthon (p. 527), de Mullerus (p. 527), de Fr. Bacon (p. 526). En voici une de Descartes dans le même sens: «Les astronomes ont inventé trois différentes hypothèses ou suppositions qu'ils ont seulement taché de rendre propres à expliquer tous les phénomènes, sans s'arrêter particulièrement à examiner si elles étaient en cela conformes à la vérité» (*Principes de la Philosophie*, Éd. Cousin, 3e partie, n⁰ 15, p. 188).

Osiander n'a donc pas trahi la pensée de Copernic; il s'est contenté de parler de la partie astronomique des *Révolutions,* en en laissant de côté, par prudence ou parcequ'il n'était pas convaincu, la partie philosophique et la partie théologique.

9. **Galilée.** Copernic est avant tout astronome dans le sens strict

du mot; il n'est philosophe ou physicien qu'accidentellement. C'est l'inverse pour GALILÉE. GALILÉE est, dans le sens ancien, bien moins astronome[9]) que physicien: des hypothèses explicatives commodes pour le calcul ne lui suffisent pas; c'est la réalité qu'il veut atteindre: il veut savoir ce qui est immobile et ce qui se meut. Sa vraie gloire d'ailleurs, c'est d'avoir été le fondateur de la *Méthode,* inductive, expérimentale et mathématique à la fois, en philosophie naturelle; c'est ensuite, d'avoir renversé la vieille conception dualistique (physique terrestre, physique céleste) de l'Univers, enfin d'avoir trouvé les premières lois de la dynamique, à propos de la chute des corps pesants. Mais, si physicien qu'il soit, il sait très bien, quel est, d'après la tradition, l'objet de l'Astronomie. On a de lui un *Trattato della Sfera ovvero Cosmografia* (Vol. II de l'Édition FAVARO, pp. 203—255) où il expose, avec sa netteté habituelle, ses idées sur ce sujet. La cosmographie ou description du monde, dit-il en substance, ne s'occupe pas de tout ce qui regarde le monde: elle traite du nombre, de la distribution, de la figure, de la grandeur, de la distance et surtout des mouvements des parties du monde en laissant la considération de la substance et des qualités de ces parties au physicien (*filosofo naturale*). Le cosmographe observe les *apparences* ou *phénomènes;* il imagine ensuite des *hypothèses* ou *suppositions* telles qu'elles répondent aux apparences; en troisième lieu, il prouve par des *démonstrations géométriques* que les phénomènes s'ensuivent des hypothèses; enfin, il fait des *calculs* qui permettent de retrouver à chaque moment la position des corps célestes (*L. c.*, pp. 211—212). Dans ce cours d'astronomie, GALILÉE part de l'hypothèse que la Terre est immobile, bien qu'il fut, depuis longtemps, persuadé de la doctrine contraire (il la signale dans son chapitre 6), parce qu'il sait que l'on peut *sauver les apparences,* en partant de l'une et l'autre supposition.

En maints endroits de ses ouvrages, il a indiqué avec netteté ce qui distingue le physicien de l'astronome, ou comme il dit, l'astronome *philosophe* de l'astronome *pur,* ou astronome *calculateur.* Voici, par exemple, une citation de son livre sur les Taches Solaires (Éd. VENTURI, 1718, t. II, pp. 98—99; éd. FAVARO, t. V, p. 102): «ei va retinendo come veri, e reali, e realmente tra loro distinti, e mobili quelli Eccentrici totalmente, o in parte quei Deferenti, Equanti, Epicicli, ec. posti da i *puri Astronomi* per facilitare i loro calcoli, ma non gia da ritenersi per tali dagli *Astro-*

9) Il l'a même été trop peu. Dans son *Dialogo* de 1632, il a publié une hypothèse sur l'origine des planètes, qui est incompatible avec les lois de KEPLER (son ami et son correspondant), publiées depuis longtemps. Voir notre article à ce sujet, dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 1894, t. XVIII, 1ere partie, pp. 46—49, 90—92.

nomi Filosofi, li quali oltre alla cura del salvare *in qualunque modo* l'apparenze, cercano d'investigare, come problema massimo ed ammirando, *la vera costituzione dell' Universo,* poiche tal costituzione è, ed è in uno solo modo, vero, reale, ed impossibile ad essere altramente» . . .

La distinction est encore plus fortement marquée dans le célèbre *Dialogo* de 1632 qui amena la condamnation de GALILÉE en 1633. Dans cet ouvrage, GALILÉE expose l'ensemble des découvertes par lesquelles il renouvelle la méthode, renverse la physique aristotélicienne et fait connaitre les lois de la chute des corps; il croit aussi pouvoir démontrer la réalité du double mouvement de la Terre, au moyen de sa célèbre preuve tirée des marées. Au fond, le livre est donc *réaliste* et appartient tout entier à la *Physique* ou à la *Philosophie naturelle.* Mais quand GALILÉE y parle du système du monde, il est lié par le décret de la Congrégation de l'Index du 5 mars 1616; c'est pourquoi il dissimule son vrai but: il déclare au début, il déclare à la fin et en d'autres endroits qu'il ne parle qu'hypothétiquement, par jeu d'esprit, bref qu'il fait de l'*Astronomie pure.* «Ho presa nel discorso la parte copernicana *procedendo in pura ipotesi matematica.* . . . Si esamineranno li fenomeni celesti, rinforzando l'ipotesi copernicana. . . aggiungendo nuove speculazioni, *li quali però servano per facilità d'astronomia, non per necessità di natura.*» Il appelle ensuite sa théorie des marées *una fantasia ingegnosa* (Éd. SONZOGNO, Milan, 1877; pp. 19—20; éd. FAVARO pp. 29—30). «Il principale scopo dei *puri astronomi* è il render solamente ragione delle apparenze nei corpi celesti, e ad esse ed ai movimenti delle stelle adattar tali strutture e composizioni di cerchi, che i moti secundo quelli calcolati respondano alla medesime apparenze, poco curandosi di ammetter qualche esorbitanza, che in fatto per altri respetti avesse del difficile» (Éd. SONZ., p. 306; éd. FAV., p. 369). A la fin, il cite et semble admettre l'argument d'URBAIN VIII: Dieu peut produire les marées autrement que ne l'explique GALILÉE et, par suite, la démonstration du mouvement de la Terre qu'il en tire n'est pas probante. Autrement dit, de ce qu'une hypothèse explique les phénomènes, il n'en résulte nullement qu'elle soit la seule possible: c'est au fond la remarque d'OSIANDER et, avant lui, de S. THOMAS.

On sait que GALILÉE n'a pu persuader à ses juges qu'il se tenait vraiment sur le terrain de l'hypothèse et il a été condamné: il l'a été au nom de la Philosophie et, par conséquence, de la Théologie, mais nullement au nom de l'Astronomie dans le sens strict du mot[10]). Ses juges de 1633,

10) Voir notre article sur ce point, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 1899, t. XXIII, 1ère partie, pp. 62—67.

les auteurs du *Monitum* de 1620, cité plus haut, et ses adversaires, philosophes ou théologiens, en 1616, avaient, en effet, sur l'Astronomie proprement dite et sur le rôle des hypothèses dans cette science, les idées traditionnelles exposées dans le présent travail. Pour le montrer, il suffira de faire une citation caractéristique, que nous empruntons à une lettre écrite, le 12 avril 1615, à FOSCARINI, par BELLARMIN, à cette époque le plus célèbre des adversaires de l'hypothèse héliocentrique, au point de vue philosophique et théologique: «V(estra) P(aternità) e il Sig. GALILEO facciano prudentemente a contentarsi di parlare *ex suppositione* e non assolutamente come io ho sempre creduto, che abbia parlato il COPERNICO, perche il dire, che supposta la terra si muove e il sole stia ferme si salvano tutte le apparenze, meglio che con porre gli eccentrici e epicicli, è benissimo detto e non ha pericolo nessuno *e questo basta al matematico*» (GRISAR, *Galileistudien,* Beilage IX, p. 367. Regensburg, Pustet 1882).

La condamnation de GALILÉE en 1633 a eu peut-être une influence fâcheuse sur le développement de l'exégèse biblique, mais elle n'en a pas eu sur celui de l'Astronomie, parce qu'après comme avant, on la regardait comme la science des *phénomènes* célestes.

10. **Conclusion.** La question du centre du monde, soulevée tout de fois par les philosophes depuis PHILOLAUS jusqu'à GALILÉE, a disparu des préoccupations du monde savant, parce que l'on ignore si l'Univers peut être assimilé à un corps géométrique ayant un centre. Le Soleil d'ailleurs, depuis la publication du livre des *Principia* de NEWTON, en 1687, a perdu la place privilégiée qu'on lui avait assigné dans l'Univers après COPERNIC; il est devenu une étoile comme les autres.

Ensuite, on a reconnu peu à peu qu'il est impossible de donner un sens précis à l'antique question: *qu'est-ce qui est immobile, qu'est-ce qui se meut,* parce que se *mouvoir* ou *être immobile* sont des termes tout relatifs. Par suite, les assertions, en apparence contradictoires de PTOLÉMÉE et de COPERNIC sur le mouvement du Soleil ou de la Terre ne présentent aucune antinomie; ce sont deux manières équivalentes d'exprimer un seul et même fait.

En général, *tout ce qu'il y a de quantitatif dans les phénomènes de mouvement de points matériels est décrit d'une manière adéquate et complète si l'on fait connaître à chaque instant les distances mutuelles de ces points.* Les anciens astronomes avaient sans doute le sentiment confus de cette vérité fondamentale quand ils disaient que le choix des hypothèses explicatives des phénomènes célestes est indifférent; ils comprenaient vaguement que ces hypothèses étaient au fond équivalentes à une description con-

densée des phénomènes (voir ci dessus la dernière citation de Rheticus), et c'est pourquoi ils se servaient si hardiment de suppositions très diverses en apparence les unes des autres.

GALILÉE a entrevu la relativité essentielle du mouvement quand il dit et prouve, dans le *Dialogo* (Éd. SONZ., pp. 20, 175, etc.; éd. FAV., pp. 30, 214, etc.) qu'aucune expérience (faite sur la Terre) ne peut établir que la Terre est en mouvement ou est immobile. Le principe de la relativité est indiqué plus explicitement par DESCARTES (*Op. c.*, 2e partie, n⁰ 29, p. 143): «Lorsque nous verrons que deux corps qui se touchent immédiatement seront transportés l'un d'un côté et l'autre d'un autre et seront réciproquement séparés, nous ne ferons point de difficulté de dire qu'il y a tout autant de mouvement en l'un comme en l'autre.» — Après les *Principes* de NEWTON, on crut, pendant quelque temps, que l'on possédait une explication *dynamique* du monde, mais on reconnut assez vite qu'elle était purement *cinématique* comme celles de l'ancienne astronomie: *les équations différentielles de la mécanique analytique, étant équivalentes à leurs intégrales, ne contiennent, au fond, comme celles-ci, que des distances.* «Tout ce que nous voyons bien distinctement dans le mouvement d'un corps, dit d'ALEMBERT dans sa *Dynamique*, c'est qu'il parcourt un certain espace et qu'il emploie un certain temps à le parcourir; c'est donc de cette seule idée qu'on doit tirer tous les principes de la mécanique, quand on veut les démontrer d'une manière nette et précise. Aussi ne sera-t-on pas surpris qu'en conséquence de cette réflexion, j'aie pour ainsi dire détourné la vue de dessus les causes motrices pour n'envisager uniquement que le mouvement qu'elles produisent.» — «L. J. DU BUAT (1824)», dit DE SAINT VENANT, «définit les forces accélératrices de simples accroissements de vitesse et les forces motrices des produits de ces accroissements par les masses.» — «Quel que soit un problème de Mécanique terrestre ou céleste, dit encore DE SAINT VENANT, les forces n'entrent jamais ni dans les données, ni dans le résultat cherché de la solution. On les fait intervenir pour résoudre et on les élimine ensuite, afin de n'avoir finalement que du temps, ou des distances ou des vitesses, comme en commençant»[11]). JACOBI est du même avis dans sa célèbre thèse (1825): «*Theoria Mechanices analytica causam agnoscere nullam potest; quidni, sicuti differentialia prima velocitatis nomini, secunda virium insignimus, simile quid ad altiora quoque differentialia adhibeatur, de quibus theoremata proponi possint prorsus analoga iis quae de vi et de velocitate circumferuntur*» (*Werke*, III, p. 44).

---

11) Pour ces citations, voir MOIGNO, *Statique*, Paris, GAUTHIER VILLARS, 1868, pp. XXIII—XXV.

Duhamel a exposé d'une manière détaillée, la thèse de la relativité essentielle du mouvement, dans son ouvrage *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement* (Paris, Gauthier-Villars, 2ᵉ partie, 1866, nº 5, pp. 5—6; 4ᵉ partie, 1870, nº 4, pp. XVII—XIX, nº 163, pp. 223—225). D'illustres géomètres ou physiciens (Kirchhoff, Helmholtz, Poincaré, Duhem) considèrent de plus en plus la Mécanique rationelle et la Physique mathématique à un point de vue purement cinématique et relativiste. Poincaré, dans une préface célèbre, a démontré le théorème suivant: «Si un phénomène comporte une explication mécanique complète, il en comportera une infinité d'autres qui rendraient également bien compte de toutes les particularités révélées par l'expérience» (*Electricité et Optique,* 1890, Paris, Carré; p. XIV). Les théories mathématiques, dit-il ailleurs, ont «pour but unique de coordonner les lois physiques que l'expérience nous fait connaitre» (*Théorie mathématique de la lumière,* 1889, Paris, Carré, Préf. p. I). Duhem a publié sur le même sujet une série d'articles qui épuisent pour ainsi dire la question et mettent dans une lumière complète la vraie portée des théories mathématiques relatives à la nature[12]). Nous ne pouvons qu'y renvoyer le lecteur, à qui nous rappelons, pour terminer, le mot de Copernic: *Mathemata mathematicis scribuntur,* afin qu'il n'attribue pas à notre thèse une portée métaphysique qu'elle n'a pas.

12) *Quelques réflexions au sujet des théories physiques* (Revue des Questions scientifiques, 1892, 2ᵉ serie, I, 139—177). — *Physique et métaphysique* (Ib., 1893, 2ᵉ serie, t. IV, pp. 55—83). *L'évolution des théories physiques du XVIIᵉ siècle jusqu'à nos jours* (Ib., 1896, 2ᵉ serie, t. X, pp. 463—499).

ÜBER DIE ENCYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

VON

W. FR. MEYER
IN KÖNIGSBERG I/P.

In der Vorrede zum letzten Halbbande seiner umfassenden „Geschichte der Mathematik" spricht der verehrte Jubilar den Wunsch und die Hoffnung aus, dafs sein Lebenswerk eine Fortsetzung für dieses Jahrhundert finden möge.

In gewissem Sinne ist die „Encyklopädie" bestimmt, die fragliche Lücke auszufüllen. Zweifellos wird der Encyklopädie ein Vorzug mangeln, der das CANTOR'sche Werk auszeichnet, die strenge Einheitlichkeit, die das Ganze durchzieht. Aber ist es nicht ebenso berechtigt, die verschiedenartigen mathematischen Richtungen, die gerade die zweite Hälfte dieses Jahrhunderts aufweist, dadurch zum unmittelbarsten Ausdruck zu bringen, dafs ein ansehnlicher Teil der lebenden Vertreter dieser Richtungen pro parte virili selbst zum Wort kommt? Es sei erlaubt, das Prinzip der Encyklopädie in Gestalt eines Paradoxons zusammenzufassen: die geschlossenste Einheitlichkeit hinsichtlich der dogmatischen Vorschriften für die historische Auffassung und die objektive Darstellung — für die litterarischen Quellenangaben und Bezeichnungsweisen — Hand in Hand mit der freiesten individuellen Bethätigung, mit dem Rechte jedes Mitarbeiters, seine Grundauffassungen vom Wesen seiner Wissenschaft überhaupt innerhalb seines spezifischen Themas zur gröfstmöglichen Geltung zu bringen. Dafs die Lösung dieses Paradoxons einer fortlaufenden Verständigung darüber bedarf, inwieweit der starre Buchstabe der Gesetzesvorschrift einer geistigen Differenzierung fähig ist, inwiefern die Freiheit des Willens unbeschadet des Kausalnexus der Dinge zur Wirkung kommt — das ist sicher die Hauptschwierigkeit des ganzen Unternehmens, das seinen „Existenznachweis" auf jeder Stufe seiner Entwickelung stets von Neuem zu führen genötigt ist.

Es ist hier nicht der Ort, auf die vielen Einzelnheiten des der Encyklopädie nach langen Vorbereitungen zu Grunde gelegten Programms einzugehen. Nur ein delikater Punkt sei kurz berührt, der bereits von verschiedenen Seiten diskutiert ist, weshalb sich die Stoffeinteilung der Encyklopädie nach Gliederung und Bezeichnung nicht an die von der Pariser Kommission festgelegte Norm gehalten hat.

Vorab sei betont, dafs irgend ein künstlich genährter Gegensatz hierbei nicht bestanden hat und nicht besteht. Wenn ein direkter Anschlufs an jene im Übrigen vortreffliche Normierung für die Zwecke der Encyklopädie nicht opportun erschien, so lag das einmal an der weitgehenden Unterteilung des Stoffes (man vgl. den Raum, den dort die Elementarmathematik einnimmt, etwa im Verhältnis zur „Mengenlehre"), sodann aber daran, dafs eine so ausgeprägte Individualisierung der einzelnen Disziplinen ihrem beständigen Ineinandergreifen hinderlich zu sein schien.

Diese inneren Wechselbeziehungen, die gerade einen Hauptcharakterzug der modernen Mathematik kennzeichnen, schienen durch fortlaufende Verweise auf die rein äufserlich numerierten einzelnen Artikel, bei denen der Leser jederzeit direkt sich Rats erholen kann, greifbarer und praktischer hervorzutreten.

Wir beschränken uns nunmehr darauf, aus der Fülle des Stoffes, der in den zwei bisher erschienenen Heften niedergelegt ist, einzelne Merkmale herauszugreifen.

Der erste Artikel, I A 1, von H. Schubert, behandelt die Grundlagen der elementaren Arithmetik. Der Leser wird, wenn er es auch sonst nicht wufste, sofort den Eindruck erhalten, dafs dem Verfasser auf dem fraglichen Gebiete eine langjährige Erfahrung zu Gebote steht.

Die Anmerkungen der ersten Seiten geben eine Vorstellung davon, zu welcher Ausdehnung und Bedeutung die „Psychologie" der Arithmetik gelangt ist. Die elementarsten Operationen, die man früher wie etwas Selbstverständliches entgegennahm, erscheinen der neueren Forschung nur als Endglieder eines langen, teils bewufsten, teils unbewufsten Denkprozesses.

Im weiteren Verlauf der Entwickelung tritt immer deutlicher das leitende „Prinzip der Permanenz" hervor, das in seiner ausführlichen und vorsichtigen Fassung sehr wohl geeignet erscheint, bekannte Verknüpfungsgesetze für bekannte Zahlengebiete auf neu geschaffene Zahlengebiete zu übertragen.

Überblickt man den ganzen Artikel, so ist man geradezu erstaunt über die geringe Anzahl der arithmetischen Begriffe und Sätze, die der unendlich ausgedehnten Analysis als Fundament dienen.

Der zweite Artikel, I A 2, von E. Netto, giebt auf denkbar knappstem Raume eine Übersicht dessen, was bisher auf dem Gebiete der Kombinatorik und insbesondere ihrer Hauptanwendung, der Theorie der Determinanten geleistet ist.

Wie kaum ein anderer Artikel, erhebt er sich, von den elementarsten kombinatorischen Operationen ausgehend zu den feinsten und verwickeltsten

Determinantensätzen. Über dem Ganzen schwebt ersichtlich der KRONECKER'sche Geist der Kritik, der mit den rein formalen Untersuchungen der älteren Kombinatoriker gar strenge ins Gericht geht, aber dafür überall bestrebt ist, dem toten Buchstaben der Formel eine Seele einzuflöfsen. Andererseits könnte man fast bedauern, dafs nicht derselbe Stoff zugleich von einem Engländer bearbeitet werden konnte; wir sind ja aber in der Lage, das grofse historische Werk von TH. MUIR über Determinanten zu besitzen.

Wir kommen zu I A 3, „den Irrationalzahlen und der Konvergenz unendlicher Prozesse" von A. PRINGSHEIM. Wir geben der Hoffnung Raum, dafs gerade dieser Artikel, der den Übergang von der Arithmetik zur eigentlichen Analysis verkörpert, bei den Lehrern der mittleren und höheren Schulen eine eingehende Würdigung finden möge. Der rühmlichst bekannte Verfasser hat keine Mühe gescheut, selbst auf die Gefahr zu grofser Ausführlichkeit hin, seinen delikaten Stoff nicht nur fafslich und elegant darzustellen, sondern ihn auch mit einer Fülle wörtlicher Zitate aus mathematischen Klassikern auszustatten, um beim Leser historischen Sinn zu erwecken.

Bekanntlich spielt der Verfasser in neueren polemischen Auseinandersetzungen über den Wert und die Tragweite der logischen und intuitiven Methoden eine mafsgebende Rolle; aber selbst wenn man ihn als Ultra-Logiker bezeichnen wollte, müfste man ihm zugeben, dafs er hier seinen Überzeugungen einen möglichst objektiven Ausdruck verliehen hat. Die Kunst der Darstellung ist freilich eine so lebhafte und bestechende, dafs der Leser alle Mühe hat, seinen eigenen Standpunkt zu wahren. Verfolgt man die Entwickelung der Lehre von den unendlichen Reihen, und vergleicht man den mangelhaften Standpunkt eines LAGRANGE mit den Schlufstheoremen des Verfassers selbst, die in ihrer Schärfe und Allgemeinheit schwerlich noch überboten werden dürften, so mufs man zu der Erkenntnis gelangen, dafs das 19. Jahrhundert mehr wie jedes frühere, einen völligen Umschwung in der Mathematik herbeigeführt hat; man mufs freilich auch wünschen, dafs die bis zur äufsersten Grenze ausgebildete Theorie den in ihr aufgespeicherten unermefslichen Gedankenvorrat den Anwendungen auf Naturwissenschaften und Technik zugute kommen lassen möge, um nicht das esoterische Besitztum weniger Auserwählter zu bleiben, sondern um in den Fortschritt der Kultur mit starker Hand einzugreifen.

In I A 4 entwickelt E. STUDY die Theorie der gemeinen und höheren komplexen Gröfsen. Es steht zu hoffen, dafs Alle, die bisher noch Vorurteile metaphysischer Art gegen die Verwendung komplexer Gröfsen gehegt haben, durch die Lectüre dieser klar und überzeugend geschriebenen Abhandlung eines Besseren belehrt werden. Von besonderem Interesse dürften in pädagogischer und erkenntnistheoretischer Hinsicht die Aus-

führungen über die linearen Gruppen $x' = x + a$, $x' = ax$, $x' = ax + b$, $x' = \frac{ax + b}{cx + d}$ sein, und die Erweiterung ihres Wirkungsbereiches, falls man die auftretenden Gröfsen als komplex ansieht. Die Lehre der höheren komplexen Gröfsen (von der Form $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$) ist eine der jüngsten Schöpfungen der Mathematik, um deren Aufbau der Verfasser selbst sich wesentlich verdient gemacht hat; ihre Theorie wird dadurch verwickelter, aber auch interessanter, als bei der Multiplikation der neuen Zahlen das kommutative Gesetz fallen gelassen wird. Ueber die Verwendbarkeit der neuen Theorie werden vorderhand die Meinungen noch geteilt sein; schon jetzt ist aber zuzugeben, dafs die Algebra, die Lehre der kontinuierlichen Gruppen, die Zahlentheorie vermöge der höheren komplexen Zahlen ihren Gesichtskreis wesentlich erweitert haben. Ein bedeutender erkenntnistheoretischer Vorteil zeigt sich darin, dafs über die Stellung der Quaternionen zu verwandten Gröfsen volle Klarheit geschaffen wird.

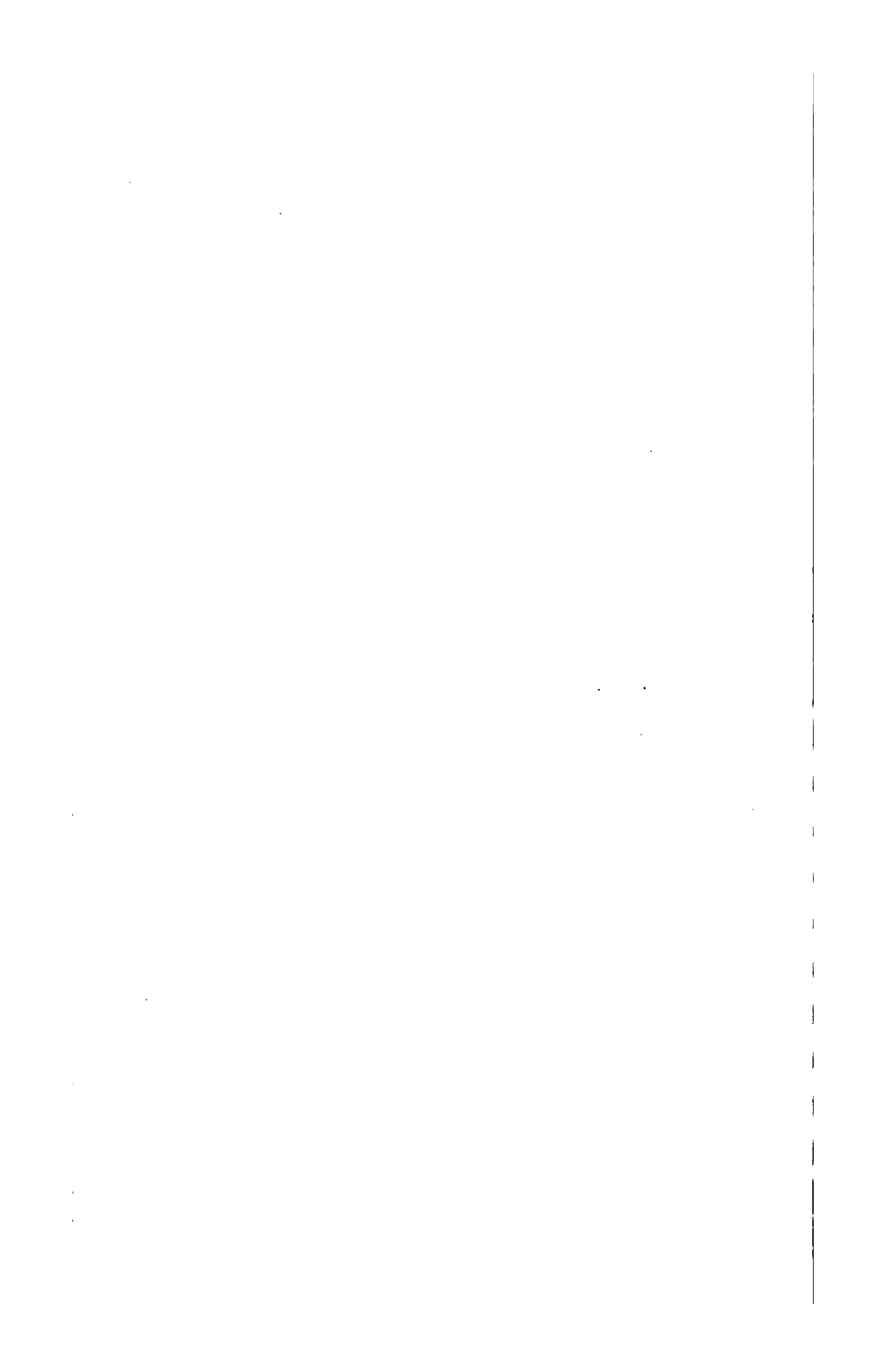
Der folgende Artikel I A 5 über „Mengenlehre" von A. Schoenflies dürfte der sein, der an die Fassungskraft der Leser die gröfsten Anforderungen stellt. Handelt es sich doch um die von G. Cantor begründete Theorie der transfiniten Zahlen, die, anfänglich lebhaft beanstandet, zur Zeit einen immer gröfseren Kreis von Anhängern und Bearbeitern gewinnt, und in alle Teile der Analysis und Geometrie als ein Klassifikationsprinzip ersten Ranges einzudringen berechtigt erscheint.

Schon die Originalarbeiten erheischen zu ihrem Studium eine mühsame und andauernde Mitarbeit; es hiefse daher Unmögliches verlangen, wollte jemand blofs an der Hand der vorliegenden überaus gedrängten Wiedergabe die Tragweite der erklärten Begriffe erfassen. Man mufs aber dem Verfasser um so mehr zu Dank verpflichtet sein, dafs er mit Erfolg bestrebt gewesen ist, mit nüchterner Vorurteilslosigkeit überall den realen Kern aus den verwickelten Erscheinungen herauszuschälen, und alle irgendwie transcendentalen Spekulationen als hier nicht her gehörig beiseite zu schieben. Dafs gerade bei einem solchen Gebiete eine sorgfältige und kritisch gesichtete Litteraturzusammenstellung von besonderem Werte ist, liegt auf der Hand.

In glücklicherer Lage war der Bearbeiter von I A 6, der „Endlichen diskreten Gruppen", H. Burkhardt, insofern die Leistungsfähigkeit dieser von Cauchy ins Leben gerufenen Theorie längst aufser Frage steht. Der Text in seinem Lapidarstile gleicht, wenn das Bild erlaubt ist, einer Gesetzestafel. Der Verfasser war wohl zu dieser Condensation um so eher berechtigt, als gerade sein Stoff in einer Reihe ausgezeichneter Lehrbücher durchgearbeitet ist, und konnte das Hauptgewicht in die Anmerkungen

verlegen, die denn in der That eine ganze Geschichte von menschlicher Geistesarbeit erzählen. In der neuesten Fortentwickelung der Lehre machen sich zwei sehr verschiedenartige Strömungen bemerklich; während sich auf der einen Seite in Fragen der praktischen Abzählbarkeit gewisser Gruppen eine Art Sport herausgebildet hat, der vor keiner noch so mühsamen empirischen Rechnung zurückschreckt, stehen auf der anderen Seite ganz neue und aus der Tiefe geschöpfte Begriffsbildungen, die ungeahnte Perspektiven für die Zukunft eröffnen.

Mag es bei diesen Bemerkungen, die doch nur ein aphoristisches Gepräge tragen, sein Bewenden haben; sollten sie ein allgemeineres Interesse für den Fortgang des Werkes erwecken, so haben sie ihren Zweck erfüllt. Eine von angesehener Seite ausgesprochene Befürchtung wird sich hoffentlich nicht bewahrheiten, dafs nämlich die Encyklopädie fast unmittelbar nach ihrem Erscheinen bereits „veraltet" sein würde. Wir glauben vielmehr, dafs sie allen späteren Untersuchungen ähnlicher Natur zur bleibenden Grundlage dienen wird, und dafs der in ihr lebendige Geist historisch-kritischer Erfassung jüngster Dezennien in seiner unmittelbaren Wirkung sich stets gleich bleiben wird. Wenn sich das Gefühl für die Unterscheidung zwischen quantitativer und qualitativer, äufserer und innerer Vermehrung des Wissensstoffes immer mehr verfeinern wird, wenn das Bestreben wachsend dahin gehen wird, ausgedehnte Gruppen von Sätzen als im wesentlichen gleichwertig, als „Varietäten eines und desselben Stammtypus" zu erkennen, dann wird auch die jetzt so drohend scheinende Gefahr zurücktreten, dafs die Wissenschaft an der Überwucherung mit unübersehbarem Einzelmaterial erstickt.



ZUR TERMINOLOGIE DER ÄLTESTEN MATHEMATISCHEN SCHRIFTEN IN DEUTSCHER SPRACHE.

VON

FELIX MÜLLER

IN LOSCHWITZ.

Wer die historische Entwickelung der mathematischen Wissenschaften studiert hat, der wird nicht erstaunt sein über die grofse Zahl von Fremdwörtern, deren sich deutsche Mathematiker bedient haben und noch bedienen. Müssen sie doch die Quellen ihrer Wissenschaft in griechischen, lateinischen, arabischen, italienischen, französischen und englischen Schriften suchen. Mit dem Inhalt der Wissenschaft sind auch die fremdsprachlichen Kunstausdrücke entlehnt. Bei der Herübernahme aber war es den Deutschen nicht in gleichem Mafse möglich wie andern Völkern, die deutsche Sprache durch Aufnahme fremder Wurzeln zu bereichern. „Wenn das Neuhochdeutsche, sagt Ernst Eckstein[1]), wie seinerzeit das Althochdeutsche, das Angelsächsische und noch in späterer Zeit die romanischen Sprachen, — die Kraft besäfse, fremdsprachliche Elemente so mit dem eigenen Sprachsafte zu durchdringen, wie dies der triebmächtige Baumstamm mit den ihm aufgepfropften Schöfslingen thut, so würde die Fremdwörterfrage für uns ebensowenig vorhanden sein, wie für die Franzosen, Italiener, Spanier u. s. w." —

Die moderne Sprachreinigungsbewegung hat auch unsre Wissenschaft, die Mathematik, nicht verschont. Sie will zahlreiche mathematische Fremdwörter, die Jahrhunderte hindurch bestanden haben, und an welche sich im Laufe der Zeit eine reiche Begriffsfülle geknüpft hat, mit einem Male über Bord werfen. So soll das Wort Geometrie, das eine mehr als zweitausend Jahre alte Geschichte hat, durch das Wort Raumlehre ersetzt werden, das überdies längst in ganz anderem Sinne für eine rein metaphysische Doktrin in Gebrauch ist. Es ist schon wiederholt und mit Recht hervorgehoben worden, dafs die modernen Puristen das Kind mit dem Bade ausschütten. Müssen wir uns doch häufig die von ihnen entstellten mathematischen Sätze, um sie zu verstehen, in die Sprache der gebildeten Mathematiker zurückübersetzen[2]). Wenn ein moderner Mathe-

---

1) Ernst Eckstein. Verstehen wir Deutsch? Volkstümliche Sprachuntersuchungen. Leipzig 1894. Die Fremdwörter, S. 125.

2) Wir erinnern an den mifshandelten Pythagoras: „Die Gesamtheit der Gevierten über den beiden Gesenkten ist gleich der Gevierten über der Unterspannenden".

matiker sich berufen glaubt, „als neuer Herkules den Augiasstall der mathematischen Sprache von Fremdwörtern zu reinigen", so ist sein Unterfangen nur ein Beweis dafür, dafs er mit der historischen Entwickelung seiner Wissenschaft nicht vertraut ist. Wie überhaupt das Studium der Geschichte einer Wissenschaft den Gelehrten zur Bescheidenheit erzieht, indem sie ihn vor Überschätzung seiner eigenen Leistungen bewahrt, so zeigt es ihm auch, dafs es niemals gelingen wird, durch eine geschickte Verdeutschung Ersatz für zahlreiche Fremdwörter zu finden.

Der nachstehende Aufsatz, welcher sich mit der Terminologie der ältesten mathematischen Schriften in deutscher Sprache beschäftigt, hat insbesondere den Zweck, zu zeigen, dafs die Versuche, fremdsprachliche mathematische Kunstwörter durch deutsche zu ersetzen, schon sehr alt sind und dafs sie sich stetig, bald mit gröfserem, bald mit geringerem Erfolge wiederholt haben. Das Studium der mathematischen Nomenklatur ist nicht nur in rein sprachlicher Beziehung von Wichtigkeit, es dient uns auch in der Geschichte der Mathematik dazu, die Quellen zu finden, aus denen ein Schriftsteller geschöpft. In M. Cantor's grofsem Geschichtswerke finden sich zahlreiche Belege dafür. Eine Durchforschung der älteren deutschen mathematischen Litteratur mit besonderer Rücksicht auf Verdeutschungen von Fremdwörtern wird zugleich einen nützlichen Wink geben dafür, inwieweit Sprachreinigungsversuche berechtigt sind und welchen Erfolg dieselben für die Zukunft versprechen.

I. Teil.

Chronologische Übersicht über die für die mathematische Terminologie wichtigen Quellen.

Bevor wir an unsre eigentliche Aufgabe gehen, wollen wir eine kurze chronologische Übersicht über die ältesten und älteren mathematischen Schriften, die in deutscher Sprache abgefafst sind, geben und auf deren Bedeutung für die mathematische Terminologie im allgemeinen aufmerksam machen. Dieselbe ergiebt sich häufig schon aus dem Titel.

Als der Erste, welcher mathematische Lehren in deutscher Sprache geschrieben haben soll, wird der gelehrte Klostergeistliche Notker Labeo zu St. Gallen genannt, der um das Jahr 1000 lebte[3]). Von ihm sagt

---

3) S. Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525. *Monumenta Germaniae Paedagogica III.* Berlin 1887, S. 45.

STÄLIN (Württemb. Geschichte I, 1841, S. 616), er habe die erste Arithmetik in deutscher Sprache, wahrscheinlich eine freie Bearbeitung der Arithmetik des BOETHIUS, verfaſst, und AMBROS (Geschichte der Musik II, 1864, S. 99) nennt NOTKER als Verfasser der ältesten bis jetzt bekannten Schrift über Theorie der Musik.

In der Mitte des XIV. Jahrhunderts schrieb KONRAD VON MEGENBERG, Domherr zu Regensburg, eine Bearbeitung der Sphära des SACROBOSCO in mittelhochdeutscher Sprache[4]). Auf dieses „erste deutsche Handbüchlein der Physik und Astronomie" hat zuerst DIEMER[5]) aufmerksam gemacht. Da, wie DIEMER nachgewiesen hat, die „deutsche Sphära" KONRAD HEINFOGEL's vom Jahre 1516 ein wenig erweiterter Abdruck der MEGENBERG'schen Bearbeitung ist, so werden wir später darauf zurückkommen.

Die älteste uns erhaltene geometrische Schrift in deutscher Sprache ist die Geometria Culmensis. So bezeichnet man eine für Feldmesser bestimmte Anleitung zur Ausmessung von Flächen, die auf Veranlassung des Hochmeisters des deutschen Ordens CONRAD VON JUNGINGEN um 1400 von einem unbekannten Verfasser zusammengestellt wurde[6]). Dieses Buch hat neben dem lateinischen Text eine deutsche Übersetzung. Es wurde unter starker Benutzung der *Practica geometriae demonstrativa* des DOMINICUS PARISIENSIS verfaſst[7]). Es ist für die mathematische Terminologie von groſser Wichtigkeit.

Aus dem Anfange des XV. Jahrhunderts stammt ein in deutscher Sprache geschriebener arithmetischer Traktat, der sich in einem Wiener Codex (no. 3029) befindet[8]). Herr A. NAGL, der ihn zuerst erwähnt, giebt von demselben an, daſs er ganz auf dem Boden der italienischen Praxis stehe. Die Verpflanzung der italienischen Arithmetik nach Deutschland wird noch durch zwei andere Algorithmus-Traktate bezeugt, die ebenfalls deutsch geschrieben sind und sich in den Münchener Handschriften des

---

4) GÜNTHER, l. c. S. 167.

5) DIEMER, Kleine Beiträge zur ältern deutschen Sprache und Litteratur, Wien 1851, S. 60 ff.

6) *Geometria Culmensis.* Ein agronomischer Traktat aus der Zeit des Hochmeisters CONRAD VON JUNGINGEN (1393—1407). Herausgegeben von Dr. H. MENDTHAL. Leipzig 1886. 76 S. 8°.

7) Über den Inhalt s. M. CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II, 1892, S. 137—141. Über den DOMINICUS PARISIENSIS vgl. M. CURTZE, Mathematisch-historische Miscellen. 8. Biblioth. math. (2) IX, 1895, S. 107.

8) ALFRED NAGL, Über eine Algorithmus-Schrift des XII. Jahrhunderts etc. Z. f. Math. u. Phys. XXXIV; Hist. litt. Abt. S. 145.

XV. Jahrhunderts no. 4162 und no. 7088 befinden[9]). Im Beginne des letzteren wird das Rechnen (der Algorithmus) „die Kunst des weisen hochgelehrten meisters ALGI" genannt. Hoffentlich werden diese ältesten Rechenbücher bald herausgegeben werden.

Spätestens im Jahre 1445 schrieb ein Hildesheimer Stiftsschüler BERNHARD ein elementares Rechenbuch in niederdeutscher Sprache, durch dessen Herausgabe und Übersetzung Herr FRIEDRICH UNGER[10]) sich ein grofses Verdienst erworben hat. Trotzdem es deutsch geschrieben, sind die lateinischen Kunstausdrücke beibehalten.

Ein Bruchstück einer Algebra in deutscher Sprache aus dem Jahre 1461, sowie eine vollständige Abhandlung über denselben Gegenstand, auch in deutscher Sprache, mit dem lateinischen Titel: 'Regula delacose secundum 6 capitula', finden sich untermischt mit lateinischen Manuskripten in der Handschrift der königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München Nr. 14908. Auf dieselbe hatte zuerst GERHARDT aufmerksam gemacht[11]). Später hat M. CURTZE[12]) sämtliche Stücke des Sammelbandes herausgegeben und erläutert. Bemerkenswert ist, dafs in einigen dieser Stücke lateinische und deutsche Sprache abwechseln.

Die Geometria Culmensis lehrte, Figuren auszumessen; die erste Anleitung in deutscher Sprache, geometrische Figuren richtig zu zeichnen, enthält eine unter dem Namen „Geometria deutsch" bekannte Schrift. HEIDELOFF, der diese Schrift in seinem Buche: „Die Bauhütte des Mittelalters in Deutschland", Nürnberg 1844, Seite 95—99 abdruckt, fügt dem Titel hinzu: „angeblich von HANS HÖSCH von Gmünd 1472". S. GÜNTHER hat diese Geometrie in einem Sammelband mathematischer Druckwerke der Nürnberger Stadtbibliothek, ohne Angabe von Verfasser, Druckort, Zeit etc. aufgefunden und veröffentlicht[13]). M. CURTZE bemerkt zu dieser Veröffentlichung, dafs sich in der Münchener Hof- und Staatsbibliothek ein Manuskript aus dem Jahre 1477 befindet, das auf Blatt 62—73 ebenfalls eine Geometria (Feldmefskunst), deutsch, enthält, die offenbar von der obigen

9) NAGL, l. c. S. 168 Anm.

10) FRIEDRICH UNGER, Das älteste deutsche Rechenbuch, herausgegeben und übersetzt. Z. f. Math. u. Phys. XXXIII, 1888, Hist.-litt. Abt. S. 125—145. Vgl. M. CANTOR, Vorl. üb. Gesch. d. Math. II, 159—160.

11) GERHARDT, Zur Geschichte der Algebra in Deutschland. Berl. Monatsber. 1870, S. 141.

12) M. CURTZE. Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im fünfzehnten Jahrhundert. Z. f. Math. u. Phys. XL, Suppl. 1895. Abh. z. Gesch. d. Math. Heft 7. S. 31—142.

13) S. GÜNTHER, Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert. Z. f. Math. u. Phys. XX, 1875; Hist.-litt. Abt. S. 1 ff.

verschieden ist[14]). Auch die erstgenannte Geometria deutsch bietet in sprachlicher Hinsicht manches Interessante.

In der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts wurden in Deutschland zahlreiche Vorschriften gegeben, wie auf den Linien zu rechnen sei[15]). Es erscheint nun eine von dem Abacus- und Kolumnenrechnen wesentlich verschiedene Rechnung mit Rechenpfennigen oder Raitpfennigen (jetons, projectilia, counters) auf der Rechenbank oder der Bankir, auf der wagerechte Linien gezogen sind, welche den auf oder zwischen ihnen liegenden Zahlen oder Marken ihren Wert verleihen. Die nächst höhere Linie giebt den zehnfachen, der Zwischenraum (spatium) zwischen ihr und der nächst tieferen den fünffachen Wert der letzteren. Der Verbreitung der praktischen Arithmetik kam die Erfindung der Buchdruckerkunst ganz besonders zu statten. In der ersten Hälfte des XVI. Jahrhunderts wurden zahlreiche Rechenbücher durch den Druck veröffentlicht[16]).

Von deutschen gedruckten Rechenbüchern sind wohl die ältesten die beiden von Heinrich Petzensteiner in Bamberg 1482 und 1483 gedruckten[17]). Von dem ersteren, dessen Verfasser Ulrich Wagner, ein Nürnberger Rechenmeister, ist nur ein winziges Fragment erhalten. Das zweite, wahrscheinlich auch von Ulrich Wagner verfaſst, wird gewöhnlich „das Bamberger Rechenbuch von 1483“ genannt. Eine eingehende Schilderung desselben giebt Cantor in seinen Vorlesungen[18]).

In dem oben angeführten Buche von Heideloff ist unmittelbar hinter der Geometria deutsch abgedruckt (S. 101—116): „Das Reiſsbüchlein der Maſsbretter von Matthias Roritzer, Dommeister von Regensburg 1486.“ Reiſsbüchlein ist Zeichenbüchlein, Maſsbretter sind Schablonen. Der ursprüngliche Titel war: „Mathes Roriczer, Dz Puechlen der fialen gerechtikait.“ Fiale ist die mit Blumenknäufen und Blattwerk verzierte Spitzsäule der gothischen Baukunst[19]). Übersetzt und erläutert wurde dieses Büchlein von Reichensperger (Trier 1845). Aus derselben Zeit stammt eine vielfach ähnliche Anweisung zur Zeichnung der Spitzsäulen von Hans Schmuttermayr, das v. Essenwein neu herausgegeben[20]).

14) M. Curtze, Bemerkungen zu dem Aufsatze Günther's. Ebenda S. 57 ff. — Der Aufsatz von 1477 ist oben S. 40—63 zum Abdruck gekommen.

15) Vgl. M. Cantor, Vorl. üb. Gesch. d. Math. II, 198 ff.

16) Alfred Nagl, l. c. S. 146 Anm. u. S. 168 Anm.

17) Fr. Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. Leipzig 1888, S. 36, 37 u. ff.

18) l. c. II, 202—208.

19) S. Günther, Gesch. d. math. Unt. S. 342 ff.

20) Anzeiger f. Kunde der Vorzeit 1881, Sp. 65 ff. Nach Günther l. c. S. 343 Anm.

[illegible] zur Bestimmung des Inhaltes von Hohlmaſsen [illegible] Kunst [illegible]metrica" bedienten, so gehören auch die [illegible] die Herstellung und Anwendung der Visierrute [illegible] Litteratur. Das älteste deutsch geschriebene [illegible] Eich[illegible]. gedruckt zu Bamberg 1487, hat zum [illegible] Hanns Briefmaler genannt.[21]).

[illegible] später als das Bamberger Rechenbuch erschien im Druck [illegible] Teil wörtlich aus ersterem entlehnt: „Behēde [illegible] kauffmanschafft", von Johann Widman [illegible] Es besteht aus drei Teilen: 1) von Kunst vnd [illegible] Rechnen mit ganzen und gebrochenen Zahlen, [illegible] Proportionen nach Jordanus, Regeldetri), [illegible] Geometria genannt ist (praktische Meſs- [illegible]

[illegible] Jahrhunderts mehren sich die in deutscher [illegible] Rechenbücher, sowohl diejenigen, welche das [illegible] welche das „Rechnen auf der Feder", d. h. [illegible] lehren. Da diese Bücher sich in der Dar- [illegible] so genügte es für unsere Zwecke, einige der [illegible] deren Titel wir hier folgen lassen.

[illegible] Stadtschreiber zu Oppenheim): Ain New geordnet [illegible] mit Rechenpfeningen: den Jungen [illegible] vnd hendeln leychtlich zu lernen mit [illegible] Oppenheim 1514. 24 Blätter. 8⁰. 3. Aufl. 1518. [illegible] unsere Ziffern; dieselben, „die gemeinen oder ziffer- [illegible] auf, wo sie erklärt und mit der römischen [illegible] verglichen werden; im übrigen werden nur rö- [illegible]

[illegible] (1472 zu Eſslingen — 1540, Wiedererwecker [illegible]: Ain New geordnet Rechenbiechlin mit [illegible] Schülern zu Nutz, Inhaltet die Siben Species [illegible] der Regel de Try und sechs Regeln und Sprüch von [illegible] andern guten Fragen, den Kyndern zum Anfang [illegible] 1514. 48 S. 8⁰[23]).

[illegible] d. math. Unt. S. 328 ff.

[illegible] von Koer und sein Rechenbuch findet man in [illegible] P. Treutlein, Die deutsche Coſs. Z. f. Math. u. [illegible] Gesch. d. Math. Heft 2, S. 1—124; S. Günther, [illegible] Unger, Die Methodik etc. S. 40 ff., u. a.

[illegible] nennt Georg Reichelstein, dessen Rechen-

Um die chronologische Reihenfolge unsrer Quellen festzuhalten, müssen wir hier einschieben JACOB KÖBEL: Eyn new geordēt Vysirbuch. Helt yn̄. Wie man̄ vff eins yden Lands Eych vn̄ Mafs, ein gerecht Vysirut machē vn̄ do mit ein ygklich onbekant Vafs vysieren, auch synen inhalt erlernen solle. Den anhebenden Schülern Visirens Leichtlich, mit Figuren vnnd Exempeln zu lernen, angezeigt. Angehengt Tafeln. Oppenheym. 1515. 29 S. 4°.

Der berühmte Rechenmeister ADAM RIESE (auch Ries, Rys, Ryse), geb. 1492 zu Staffelstein bei Lichtenfels in Franken, gest. 1559 zu Annaberg, hat drei verschiedene Rechenbücher geschrieben, die alle mehrfache Auflagen erlebten[24]). Das erste, welches nur das Linienrechnen lehrt, stammt aus dem Jahre 1518: „Rechnūg auff der linihen gemacht". Die Ausgabe von 1530 hat 62 S. kl. 8°. Das zweite heifst: „Rechenung auff der Linihen vn̄ Federn, Auf allerley handthirung gemacht". Erfurt 1522. Zweite Auflage 1529, 101 S. kl. Oktav. Das dritte: „Rechnung nach der lenge, auff den Linihen vnd Feder. Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones Practica genant. Mit grüntlichem vnterricht des visirens", Leipzig 1550, 196 Blätter 4°, legt den Schwerpunkt auf das praktische Rechnen, nachdem es zuerst das Rechnen auf Linien und dann das Zifferrechnen vorgetragen, und giebt eine grofse Zahl von Aufgaben. „Nach der lenge" heifst ohne Abkürzung.

Auch unter den eigentlichen Gelehrten, die noch lange Zeit hindurch lateinisch zu schreiben pflegten, finden wir einige, die es nicht verschmähten, eine Anweisung zur praktischen Arithmetik in deutscher Sprache herauszugeben: HENRICUS GRAMMATEUS, CHRISTOPH RUDOLFF, PETER APIAN und MICHAEL STIFEL.

Das Rechenbuch des GRAMMATEUS (HEINRICH SCHREIBER, Lehrer an der Wiener Universität, später zu Erfurt[25]), giebt in seinem Titel den voll-

---

buch 1532 erschien, als einen der Ersten in Deutschland, welcher Arithmetik und Dichtkunst zu vereinigen bestrebt war. Auch BÖSCHENSTEIN kleidet seine Regeln in Verslein, z. B. für die *Regula fusti* (Bruttorechnung):

Regel fusti dreu ding haben wil	Was yedem tail zu zim und bleib
Lauter unrain mit musters zil	Das an seyn stat in die regel schreib
Aufs dem muster thu' den fusti formiren	Fürohin beyden fragen nach practycier
Den darnach vom lautern subtrahiren.	Fusti beyd possen in ain summa summir.

Auch in WIDMAN's *Algorithmus linealis* (ca. 1497) finden sich lateinische Hexameter, welche die Numeration erklären. (E. WAPPLER, Beitrag z. Gesch. d. Math. Z. f. Math. u. Phys. XXXIV. 1889, Suppl. S. 147 ff.)

24) Ausführliches über ADAM RIESE s. bei UNGER, Die Methodik der prakt. Ar. etc. S. 48—53.

25) M. CANTOR, Vorl. II, S. 363 ff.

... künstlich Buech, welches gar gewiſs ... Regel Detre, welschen practic, regeln ... mancherlai schöne vn̄ zu wissen notdürfftig ... auch nach den proportion der kunst des ... ausz zutaylen monochordum, orgelpfeyffen ... erfindung Pythagore. Weytter ist hierynnen ... Jornal (d. i. Journal), Kaps (Kassabuch für ... Geld) vnd schuldbuch. Visier Ruthen zu ... triangel mit vil andern lustigen stücken der ... 6 Blätter, klein 8⁰. Zu den letzteren Stücken ... Würfels.

... Sphära, von der wir schon oben sprachen, hat ... geteutscht durch meyster CONRADT HEYN- ... anfanck oder fundament der ghenen, die da ... Astronomy." Cöln 1519. 7 Bogen, gr. 8⁰.

... auch eine Anleitung zum Zifferrechnen: „Mit ... durch die zeiferzahl zu rechnē | Ein ... den angenden Schülern d' rechnūg zu erē ge- ... 1520. 40 Blätter. 8⁰.

... von Jauer, der bedeutendste Schüler des GRAM- ... erste Lehrbuch der Algebra in Deutschland. „Be- ... Rechnung durch die kunst | reichen regeln Algebra, ... Coſs genennt werden. Dar | innen alles so treülich ... auch allein aufs vleiſsigem Lesen on allen mündtlichē ... werden. Hindangesetzt die meinūg aller dere | so ... regeln an | gehangen. Einem jeden liebhaber | ... ergetzlich. | Zusamen bracht durch Christoffen Ru- ... Wien 1525.

... deutsche Künstler des XVI. Jahrhunderts, ALBRECHT ... geb. 1471, gest. 1528), widmete Handwerkern und ... zum richtigen geometrischen Zeichnen: „Under- ... mit dem zirckel und richtscheyt, in Linien, ebenen ... Arnheim 1525. 89 S. fol. Dieses Buch ist für ... nologie von groſser Wichtigkeit, da DÜRER den ... möglichst vermeidet und viele wohl selbstgewählte ... ihre Stelle setzt.

... oben, daſs CHRISTOPH RUDOLFF auch eine An- ... geschrieben. Sie erschien zuerst 1526 zu Wien.

... I, S. 421 ff. — S. GÜNTHER, Unterr. i. Mittela. S. 361 ff.

liche Rechnung mit der Ziffer vnd mit den zalpfenningē, sampt ischen Practica vnd allerlei forteil auff die Regel de Tri." Auch 1540.
: gelehrte PETRUS APIANUS (eigentlich BIENEWITZ, Professor der nie an der Universität zu Ingolstadt, gest. daselbst 1552) ist auch r einer Kaufmannsrechnung in drei Büchern. „Ein newe vnd ·ründte vnderweisung aller Kauffmans Rechnung in dreien mit schönen Regeln vnd fragstücken begriffen. Sonderlich was and behendigkeit in der Welschen Practica vnnd Tolleten gebraucht lesgleichen vormals weder inn Teutscher noch in Welischer Spraa-c. getruckt." Vorwort 1527. Frankfurt 1537 (nach TREUTLEIN 532).

TER APIANUS ist auch als Erfinder trigonometrischer Instrumente t. Sein *Instrumentum primi mobilis* dient zur Auffindung des ınd Sinus versus[27]). In der K. Bibliothek zu Berlin fanden wir: ans APIANI astronomicus et jam recens inventus et nunc primum 1532. Ingolstadii, und Folium populi, instrumentum a PETRO jam recens inventum etc. „In diesem neuen Instrument, das die hat eines blats, werden durch den Sonnenschein in der gantzen Welt n die genaue Stunden des Tages, und aus derselbigen, vermittels blats, magst du die Stunden vom Auf vnd Niedergang der Sonnen, hen die Judenstund (welche durch die gantze Bibel im Alten vnd Testament gebraucht werden) leichtlich erkennen." Ingolstadt 1533. ıng und Erklärung.

ine ausführlichere Anleitung zum Gebrauche des Quadranten, zugleich n Elementen des praktischen Messens, giebt JOANNES STÖFFLER von ıgenn. „Von künstlicher Abmessung aller größe, ebene oder in die lenge, höhe, breite vnnd tiefe, als gräben, Cisternen vnd n, Man mög darzu kommen oder nit, mit einem Astrolabio vnd Qua-ı, oder meßleiter. Aus wahrem grund der Geometrie, Perspectiua ithmetic. Allen wercklenten, Bawleuten, Büchsenmeistern, Feldmessern, derman nützlich zu gebrauchen. Ein gar künstlich Sonnuhr, Hora-ilimbatū genant, alle Stunden des Sonnen schein nach, gründtlich hen. Einn vast leichtes künstlichs Geometrisch Instrument, damit ssen alle höhe, weite vnnd tiefe, Als thürn, gebew, baum, felder, tieffe gräben, brunnen, täler usw. wie die sein mögen. Durch herrn PHILIPSEN WEISS Schöffen vnnd des Raths zu Frankfurt an tag gebenn." 1536.

27) M. CANTOR, Vorl. II, S. 371, nach S. GÜNTHER, PETER und PHILIP APIAN Abh. d. k. böhm. GW. (6) XI, S. 27.

„Der nutzlichen vnd freyen kunst Geometria haben sich bishero | wenig in vnserer Teutschen sprach angenomen", heifst es in der Widmung, die Wolffgang Schmidt, Rechenmeister zu Bamberg, seiner Geometrie voraufschickt. „Für alle künstliche werckleut | als Steinmetzen | Maler | Bildhawer | Schreiner | vñ dergl. künstner" ist bestimmt: „Das erst Buch der Geometria. Ein kurtze vnterweisung | was | vñ warauff Geometria gegründet sey | vnd wie man | nach anweysung der selben | mit dem Circkel vnd Richtscheydt | allerley Lini | Flech | vnd Cörper aufstheylen | vnd | in fürgegebener proportion | machen soll." Nürnberg 1539. 127 S. 4°[28]).

Dafs wir bei unsrer sprachlichen Durchmusterung der deutschen mathematischen Schriften die bedeutenderen Werke eines Gelehrten übergehen und bei den minder bedeutenden verweilen müssen, kommt uns am deutlichsten zum Bewufstsein bei Michael Stifel[29]). Seine „Deutsche Arithmetica, inhaltend die Hausrechnung, deutsche Cofs, Kirchrechnung", Nürnberg 1545. 92 Bl. 4°., lehrt das Rechnen auf den Linien in seinem ganzen Umfange bis zur Wurzelausziehung, ferner die Cofs bis zu Aufgaben über quadratische Gleichungen und endlich die Kirchenrechnung, computus ecclesiasticus. Zu erwähnen ist hier: „Die Cofs Christoffs Rudolffs, mit schönen Exempeln der Cofs durch Michael Stifel Gebefsert und sehr gemehrt." Königsberg i. Pr. 1553—1554, eine neue Bearbeitung des oben genannten ersten deutschen Lehrbuchs der Algebra.

Zu gleicher Zeit mit Adam Riese's „Rechnung nach der Lenge", die wir schon oben vorweggenommen, erschien: Johann Albert's (Rechenmeisters zu Wittemberg): „Rechenbüchlein auf der Federn | Gantz leicht | aus rechtem grund | In Gantzen vnd Gebrochen | Neben angehefftem vnlangst ausgelafsenem Büchlein „Auf den Linien" | Dem einfeltigen gemeinen Mann und anhebenden der Arithmetica zu gut." 3. Aufl. 1550. Wittemberg. 180 S. 8°.

Nicht blofs umfangreicher, sondern auch weit besser als die bisher genannten Rechenbücher ist das des Simon Jacob von Coburg (Rechenmeisters und Rathschreibers zu Frankfurt a. M.): „Ein New vnd Wolgegründt Rechenbuch | auf den Linien vñ Ziffern | sampt der Welschen Practic vnd allerley vortheilen | neben der extraction Radicum, vñ von den Proportionen | mit vilen lustigen Fragen vñ Auffgaben | etc. Defsgleichen

---

28) Es ist hier nicht der Ort, über den Inhalt und die Bedeutung der von uns benutzten Schriften Ausführliches zu sagen. So ganz unbedeutend, wie Herr M. Cantor (Vorl. II, 412) meint, scheint uns die Geometrie Wolffgang Schmidt's nicht zu sein.

29) Ausführli[illegible] über Stifel und sein Hauptwerk, die *Arithmetica integra*, findet [illegible] I, Kap. XLII, S. 394 ff.

vollkom̃ner Bericht der Regel Falsi | mit neuwen Inuentionibus, De-›nstrationibus | vnd vortheilen | so bifs anher | für vnmüglich geschetzt | ›efsert | dergleichen noch nie an tag kommen. Und dann von der Geo-›tria, wie man mancherley Felder vnd ebne | auch allerley Corpora | gularia vnd Irregularia | mefsen | Aream finden vñ rechnen sol." ankfurt a. Main. 1565. 352 S. 4⁰. Die Vorrede stammt aus dem Jahre ›52. Er bedient sich lateinischer und griechischer Kunstausdrücke und ebt nur vereinzelt bei der Erklärung derselben deutsche Übersetzungen ›für.

Nach dem Tode JACOB KÖBEL's († 1533 zu Oppenheim) erschien ›ine „Geometrei von künstlichem Mefsen vnd absehen allerhand ›he, fleche, ebene, weite vnd breite. Als Thürn, Kirchen, bäw, baum, elder vnd äcker usw. mit künstlich zubereytem Jacobstab, Philosophischem piegel, Schatten vnd Mefsruten, Durch schöne Figurn vnd Exempel." ›ppenheim. 1553. 55 S. Auf S. 14 steht ein neuer Titel: „Ein künstlich ubtile vnderrichtunge, Wie durch einen Spiegel Ein Höhe eines thurms ‹uch die Länge einer Ebene Als Äcker, Wisen usw. erkennen vnd erfarenn ›olt. Darzu in der Vorrede Warumb das Spiegelglafs erfunden. Jetzo lem Jacobstab angehencket von JACOB KÖBEL. Anno 1531." Ein dritter Titel auf Seite 23 lautet: „Von mefsen vnd theylen des Erdtrichs, Ecker vnd Velder, in was form vnd gestalt die sein. Durch JACOB KÖBEL beschrieben." Ohne Datum.

Endlich finden wir eine deutsche Übersetzung des EUKLID, allerdings zunächst nur der 3 arithmetischen Bücher. JOHANN SCHEYBL: Das sibend | acht vnd neunt buch | des hochberühmten Mathematici Euclidis Megarensis[30]) | in welchen der operationen vnnd regulen aller gemainer rechnung | vrsach grund vnd fundament | angezaigt wirt | ... aufs dem latein ins teütsch gebracht | vnd mit gemainen exemplen also illustrirt vnnd an tag geben | das sy ein yeder gemainer Rechner leichtlich verstehn | vnnd jme nutz machen kan." Augspurg 1555. 237 S. 8⁰.

Um dieselbe Zeit mufs auch WILHELM HOLTZMANN, genannt XYLANDER (1532 in Augsburg — 1576 zu Heidelberg, als Professor des Griechischen) seine Euklidübersetzung begonnen haben. Dieselbe erschien zu Basel 1562. Sie hat den Titel: „Die Sechs Erste Bücher EUCLIDIS | Vom Anfang oder Grund der Geometrj. In welchen der rechte Grund | nit allain der Geometrj (versteh alles kunstlichen | gewisen | vnd vortailigen gebrauchs

---

30) Diese Verwechselung des Mathematikers EUKLID mit dem Philosophen, welche durch den lateinischen Schriftsteller VALERIUS MAXIMUS veranlafst war, dauerte bis auf CLAVIUS 1574. S. M. CANTOR, Vorl. I, 224, II, 512.

des Zirckels | Linials oder Richtscheittes vnd andrer werkzeüge | so zu allerlaj abmefsen dienstlich) sonder auch der fürnemsten stuck vnd vortail der Rechenkhunst | furgeschrieben vnd dargethan ist. — Aus Griechischer sprach in die Teütsch gebracht | aigentlich erklärt | Auch mit verstendlichen Exempeln | gründlichen Figuren | vnd allerlaj den nutz für augen stellenden Anhängen geziert | Dermafsen vormals in Teütscher sprach nie gesehen worden. — Alles zu lieb vnd gebrauch den Kunstliebenden Teütschen | so sich der Geometrj vnd Rechenkunst anmafsen | mit vielfältiger mühe vnd arbeit zum trewlichsten erarnet vnd in Truckh gegeben !." Wie die Vorrede sagt, ist das Buch bestimmt für Künstler, als Maler, Goldschmiede, Baumeister und andere, die griechischer und lateinischer Künste und Sprachen unerfahren. „Es soll sich auch niemand verwundern, dafs ich etliche fremde Wörtlein hierin beibehalten, und als wohlbekannt und teutsche gebraucht hab: Als nämlich seiend: Proposition, Operation, Structur, Distantz, Excefs, Collect, Rest und andere dergl. Dann ich das nit allein nach dem Brauch der alten Gelehrten gethan hab, welche in ihre Sprach solche ausländische, aber sehr bequeme und bedeutliche Wörtlein angenommen und gleichsam mit dem Bürgerrecht begabt haben (wie denn auch beim Cicerone eine gute Anzahl griechischer Wörtlein verblieben: ja auch aller freien Künste Namen griechischer Sprachen vorbehalten seien), sondern auch zuvor in teutscher Sprachen mehr fremde Wörtlein gebraucht werden, weder vielleicht nutz und loblich: dafs ich hoff mir hierin nachzugeben sei, ob ich Neuerung zu vermeiden etliche wohlgebrauchte und im Schwank gehende dieser Künsten Benennungen bleiben lafsen und nit in teutsche verändert habe, sonderlich dieweil z. T. dieselben vormals bekannt, (als in der Rechenkunst: Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Facit, Quotient, Rest, Summ oder Collect, Radix Quadrata u. a. im Mefsen: Centrum, Diameter, Circumferentz, Triangel, Quadrat, Basis, Cathetus, Hypotenus u. s. w.) z. Teil von mir also genügsam an ihren Orten erklärt, dafs sich niemand bald daran stofsen wird." —

Nach einem Zwischenraum von 48 Jahren erscheint eine neue Übersetzung der 6 ersten Bücher der Elemente von SIMON MARIUS (aus Guntzenhausen, Fürstlich Brandenburgischem Mathematiker): „Die Ersten Sechs Bücher Elementorum EUCLIDIS. In welchen die Anfäng vnd Gründ der Geometria ordentlich gelehrt, vnd gründlich erwiesen werden, mit sondern Fleifs vnd Mühe aufs Griechischer in vnsere Hohe deutsche Sprach übergesetzet, vnd mit verständlichen Exempeln in Linien vnd gemeinen Rational Zahlen, Auch mit Newen Figuren, auff das leichtest vnd aigentlichest erkläret. Alles zu sonderen Nutz den jenigen, so sich der Geometria, im Rechnen, Kriegfswesen, Feltmäfsen, Bauen vnd andern Künsten

nd Handtwerckern zu gebrauchen haben." Onoltzbach 1610. Christian d Joachim Ernst, Markgrafen zu Brandenburg, gewidmet. „Etliche iechische Termini oder Wörter, die ich im Verdeutschen hab behalten, e hab ich alle jedwedes an seinem Ort erkläret."

Ein an neuen Übersetzungen lateinischer Kunstausdrücke ins Deutsche iches Buch ist die deutsche Bearbeitung, die der grofse Astronom Johannes epler von seiner *Nova Stereometria doliorum vinariorum*[31]) selbst be- rgte. „Aufszug aufs der vralten Mefse-Kunst Archimedis vnd eroselben newlich in Latein aufsgangener Ergentzung, betreffend Rechnung er körperlichen Figuren, holen Gefefsen vnd Weinfässer, sonderlich defs sterreichischen, so vnder allen anderen den artigsten Schick hat. Erlärung vnd Bestättigung der Österreichischen Weinvisier-Ruthen, vnd deroelben sonderbaren gantz leichten behenden Gebrauchs an den Landfäfsern. rweitterung defsen auff die aufsländische, so auch auf das Geschütz vnd ugeln. Sampt einem sehr nutzlichen Anhang von Vergleichung defs landtebräuchigen Gewichts, Elen, Klaffter, Schuch, Wein- vnd Traid-Maafs vnder inander vnd mit andern aufsländischen, auch Alt-Römischen." Lintz 1616. Jm jedermann das Verständnis der Kunstausdrücke zu vermitteln, hat Kepler ein deutsch-lateinisches Verzeichnis dieser Termini vorausgeschickt.

Eine grofse Zahl verdeutschter Kunstwörter enthält die praktische Geometrie von Daniel Schwenter (1585 zu Nürnberg geb., 1628 Professor der Mathematik und der orientalischen Sprachen zu Altdorf). „Geometriae practicae novae et auctae libri IV", Nürnberg 1625, mehrfach aufgelegt, auch 1667. 820 S. gr. 8°. Derselbe ist auch bekannt durch seine 'Deliciae Physico-Mathematicae', oder 'Mathematische vnd Philosophische Erquickstunden'. „Darinnen Sechshundert drey vnd sechzig Schöne, Liebliche vnd Annehmliche Kunststücklein, Auffgaben vnd Fragen, aufs der Rechenkunst, Landtmessen, Perspectiv, Naturkündigung vnd andern Wifsenschafften genom̄en, begriffen seindt." Nürnberg 1636. 574 S. gr. 8°. Eine Fortsetzung derselben gab der als deutscher Dichter und Gründer des Pegnesischen Blumenordens bekannte Georg Philipp Harsdörffer: „Der Mathematischen und Philosophischen Erquickstunden Zweyter Theil." Nürnberg 1651. 695 S. gr. 8°.

„Damit der Unvergleichliche Archimedes nunmehr kein Sicilianer mehr, sondern ein Teutscher sein, auch recht und ungestümmelt, ohne Beimischung fremder Wörter, reden möchte", fertigte Johann Christoph Sturm (geb.

31) Über die Bedeutung dieses Werkes für die Stereometrie s. M. Cantor, Vorl. II, 750 ff., und Gerhard's, Gesch. d. Math. in Deutschland. München 1877, S. 109 ff.

1635, seit 1669 Professor der Mathematik und Physik in Altdorf) eine Übersetzung der Werke des Archimedes: „Des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher oder Heutigs Tags befindliche Schriften. Aus dem Griechischen in das Hochdeutsche übersetzt und mit nohtwendigen Anmerkungen durch und durch erläutert." Nürnberg 1670. 427 + 32 S. fol. In dem Vorbericht heifst es weiter: „Wann dann zu solchem End viele Lateinische und Griechische Kunstwörter aufs neue haben verteutscht werden müfsen, welche den kunstliebenden Leser, bis er deroselben gewohnet, etwas anstehen machen möchten, als haben wir solche Verteutschungen sambt ihren gleichgeltenden und bekannten Lateinischen und Griechischen Wörtern in einem gedoppelten Register nach derer Buchstaben Ordnung hier voransetzen wollen; damit man im Falle bedürfens sich daher Rahts erhohlen, und, an statt der bifsher gebräuchlichen fremden, die teutsche Kunstwörter allgemach gewohnen, und also mit denen Teutschen teutsch zu reden lernen möge." Im Text hat Sturm den Verdeutschungen meist den lateinischen resp. griechischen Namen in Klammern hinzugefügt.

Während Holtzmann und Simon Marius nur die ersten 6 Bücher der Elemente des Euklid übersetzt hatten, erschien im Jahre 1694 eine deutsche Übersetzung der 8 geometrischen Bücher, also 1—6 und 11 und 12, unter dem Titel: „Teutsch-Redender Euclides, Oder Acht Bücher Von Denen Anfängen Der Mefs-Kunst | Auff eine neue und gantz leichte Art | zu Nutzen Allen Generalen | Ingeniern | Natur- und Warheit-Kündigern | Bau-Meistern | Künstlern und Handwerckern. In Teutscher Sprach eingerichtet und bewiesen | durch A. E. B. V. P." Wien. 375 S. 4°. Der Übersetzer ist Burckhardt von Pirkenstein. Er nennt sich in der 2. Auflage zu Frankfurt 1699[32]).

Wir haben noch eine Übersetzung der ersten 6 Bücher der Euklidischen Elemente zu nennen, von Samuel Reyher: „In Teutscher Sprache vorgestellter Euclides, Defsen VI erste Bücher auf sonderbare Art | Mit Algebraischen Zeichen | also eingerichtet sind | dafs man derselben Beweise auch in andern Sprachen gebrauchen kann." Kiel 1697. 392 S. 4°. Das Buch ist für uns dadurch merkwürdig, dafs der Verfasser alle Fremdwörter ohne Ausnahme verdeutscht; er fügt allerdings meist die lateinischen Ausdrücke in Klammern hinzu.

Wir schliefsen unsre Litteraturübersicht mit der ersten deutschen Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, die allerdings schon in das XVIII. Jahrhundert hinüberreicht. Sie ist verfafst von dem Sohne des oben genannten Johann Christian Sturm, von Leonhard Christoph Sturm,

---

32) J. Rogg. Handbuch der mathematischen Literatur. Tübingen 1830, S. 320.

unter dem Titel: „Kurtzer Begriff der gesambten Mathesis | Bestehend in 7 Theilen." Frankfurt a. O. 1707.

Charakteristisch für die Terminologie dieser älteren mathematischen Schriften in deutscher Sprache ist, daſs die Mehrzahl derselben nicht für Gelehrte bestimmt war, sondern für solche Leser, die der lateinischen und griechischen Sprache unkundig waren. Aus den deutschen Rechenbüchern sollten die Kinder des Volks lernen; die geometrischen Schriften deutscher Sprache sollten den Handwerkern und Künstlern die für ihren Beruf erforderlichen Kenntnisse mitteilen. Das war für die meisten der im Vorhergehenden genannten Verfasser der Grund, Fremdwörter zu vermeiden und dieselben möglichst durch deutsche Wörter zu ersetzen. Von einer sogenannten Sprachreinigung im modernen Sinne war also durchaus nicht die Rede. In den meisten der obigen Schriften dienen die Verdeutschungen lediglich dazu, das Fremdwort zu erklären. Daher finden sie sich auch häufig nur in den den Lehren voraufgehenden Definitionen; im nachfolgenden Texte werden dann wieder die Fremdwörter wie deutsche Wörter gebraucht. Häufig werden auch im Texte beide Ausdrücke zugleich angewendet, das Fremdwort voran und das deutsche in Klammern, oder umgekehrt.

II. Teil.

Über ältere Versuche, mathematische Kunstausdrücke zu verdeutschen.

Die für uns in Frage kommende Litteraturepoche umfaſst, wie aus dem vorigen Abschnitt zu ersehen ist, ungefähr drei Jahrhunderte, von ca 1400—1700. Um den uns zugewiesenen Raum nicht zu überschreiten, müssen wir uns mit einer möglichst knappen Übersicht über die Verdeutschungen mathematischer Kunstausdrücke begnügen, welche wir in den oben angeführten Schriften gefunden haben. Wir befolgen dabei die systematische Anordnung.

A. **Allgemeines:** Mathematische Disziplinen. Methode.

Über die Wandelung der Namen unserer Wissenschaft und ihrer Disziplinen haben wir bereits in einem früheren Aufsatze ausführlicher berichtet[33]). Die einzelnen Disziplinen der „gesamten Mathesis", wie es in dem Compendium des Leonhard Christoph Sturm heiſst, werden „Künste" genannt, wohl weil einige derselben im Mittelalter zu den artes liberales zählten. Die ars calculatoria ist die Kunst der Zahl (Geom. Culm.), die

33) Felix Müller. Historisch-etymologische Studien über mathematische Terminologie. Gymn. Pr. Berlin 1887, S. 5 ff.

Kunst arithmetica ist die Rechenkunst, die Kunst Geometria, die ertmose oder Erdmessung (Geom. Culm., SCHWENTER u. a.) wird Meſskunst genannt, der geometra Meſskünstler (J. STURM) oder Landmesser (SCHWENTER); allgemeiner definiert SIMON JACOB: Geometria ist die Kunst alle Gröſsen zu messen. Die Algebra oder Coſs, „die bei den Alten Kunst von Dingen heiſst" (STIFEL)[34]), könnte man Stellkunst nennen, sagt LEONHARD CHRISTOPH STURM; Astronomie ist Sternkunst, statica Wagkunst, mechanica Hebe- oder Bewegkunst, optica Sehekunst, catoptrica Spiegelkunst, Chronologia Zeitkunst. Auch die Edelkunst musica gehört zu den mathematischen Künsten. Wie die gesamte Mathesis in die erwägende (theoretische) und ausübende (praktische) geteilt wird, so auch die Geometrie. Die Geometria Culmensis lehrt die wirkende ertmose. Schlieſslich ist zu erwähnen, daſs Logistica speciosa mit Buchstabenrechnung (J. CHR. STURM), Planimetrie mit Ermessung der Ebene, Stereometria Messung körperlicher Dinge (SCHWENTER), Cosmica Wissenschaft des Himmels und der Gestirne (L. STURM) übersetzt wird.

Die Methode oder Lehrart (J. und L. STURM) unterscheidet sich in analytische, d. h. grundforschende und synthetische oder grundsetzende (J. STURM). Analysis heiſst Grundforschung (J. STURM) oder Lösekunst (REYHER). Für Axiom, notio communis, wird gebraucht: allgemeine Wissenschaft, allgemeine Lehre, gemeine Erkenntnis oder Verstand, Grundspruch, Grundsatz oder unerweislicher Ausspruch. Definition ist Beschreibung, Erklärung, Worterklärung, Auslegung; definitio nominalis Benennung. Postulatum wird übersetzt Aufgabe oder Vorgabe, Begehrung oder Anforderung, Forderung oder Heischung, Beding; Propositio heiſst meist Fürgabe oder Vorgabe, Lehrsatz (SCHWENTER und J. STURM), Vortrag oder Hauptsatz (REYHER), und STIFEL sagt Propositz. Bei MICHAEL STIFEL findet man mehrfach den Versuch, den Fremdworten durch Vermeidung der lateinischen Endungen -ion, -itas u. a. einen deutschen Klang zu geben; er bemächtigt sich des fremden Wortstammes und versieht ihn mit deutschem Auslaut[35]). Aus Demonstratio macht STIFEL Demonstratz; andere übersetzen Beweisung oder Beweis. Demonstratio directa ist bei L. STURM klarer, und indirecta überzeugender Beweis. Porisma ist Anhang oder Zugabe; corollarium oder consectarium ist Folge oder Nachsatz; problema Aufgabe, aber auch Handgriff (PIRKENSTEIN) oder Werkstück (REYHER); theorema Betrachtung oder

34) cosa, Ding, hieſs die Unbekannte bei den italienischen Mathematikern des XIV. Jahrhunderts; s. M. CANTOR, Vorl. II, 145 ff.

35) ERNST ECKSTEIN (l. c. S. 125) hebt hervor, daſs gerade auf diese Weise die deutsche Sprache durch viele Lehnwörter hätte bereichert werden können. Die lateinisch oder romanisch klingenden Endungen, die wir leider beibehalten haben, sind es, die das feinere Sprachgefühl verletzen.

Beweisstück (Reyher), lemma ist Lehnsatz oder Hülfsatz, auch Erleichterung (Pirkenstein) und Vorsatz (Reyher); Scholion Anmerkung oder Erinnerung; principium Vorbetrachtung; operatio Handgriff, Ausführung, Wirkung; hypothesis, assumptum, Angenommenes.

B. Elementares Rechnen.

Im elementaren Rechnen bediente man sich, wie wir schon oben gesehen, anfänglich der römischen Zahlzeichen, welche gemeine deutsche Zahlen genannt wurden, und später der „Barbarischen Ziffern" (Harsdörffer). Für letztere hatte man den Namen Figuren (Köbel, Apian, Stifel), doch trat das Wort Ziffer oder Zifferzahl schon mehrfach gegen Ende des XV. Jahrhunderts auf und wird in der Mitte des XVI. Jahrhunderts allgemein. Von den neun bedeutlichen Figuren, figurae significativae, unterschied sich die Nulla, die unbedeutliche Figur. Das Wort nulla kommt in Italien zuerst bei Lucas de Borgo (1494), in Deutschland bei Köbel und Böschenstein (1514) vor. Figur wird von Böschenstein für Species, Rechnungsart, gebraucht. Die 9 elementaren Rechnungsarten mit ihren deutschen Erklärungen waren folgende: 1. Numeratio — Zählung, 2. Additio — Zusammenthuung, auch Zusammenraytung, 3. Subtractio — Abziehung, 4. Duplatio — Zwiefachung, 5. Multiplicatio — Mannigfaltigung, Vielmachung, Mehrung, 6. Mediatio — Halbmachung, Zweiteilung, 7. Divisio — Teilung, 8. Progressio — Fürzählung, Aufsteigung, Fortgehung, 9. Extractio radicum, Ausziehung der Wurzeln. Widman bezeichnet mit Mehrung die 2., 4., 5., mit Minderung die 3., 6., 7., mit Mittelmaſs die 1., 8., 9. Rechnungsart. Dementsprechend gebraucht man für numerieren — zählen; die Ordnung der Zahl (Stifel) hieſs bei den meisten Stelle oder Stett, die in der Sandrechnung des Archimedes auftretende Oktade heiſst bei J. Sturm Zahlachter; addieren — hinzusetzen, zusammenlegen, zusammensetzen, zusammengeben; subtrahieren — abziehen, abnehmen; duplieren — zwiefältigen, zwiefachen; multiplizieren — mehren, mannigfaltigen, vielfältigen, vielmachen; medieren — halbieren, hälften, halbteilen; dividieren — teilen; progredieren — fürzählen; radicem extrahieren — Wurzel ausziehen. Für Summa, Aggregat, Collect gebraucht Harsdörffer Zahlsammlung. Pluszeichen und Minuszeichen übersetzt Reyher Zusammensetzungs- und Abzugszeichen. Bei der Subtraktion auf den Linien werden die Rechenpfennige aufgehoben (elevare), daher „es hebt sich auf". Rest, Facit, Relikt, Differentia werden nur selten durch Unterschied ersetzt (J. Sturm). Die mensa oder mensula Pythagorae, der pythagoreische Tisch oder Tafel der Mannigfaltigung (Köbel), ist das Einmaleins. Produkt wird durch Harsdörffer verdeutscht Auskunft, durch J. Sturm das Kommende, das Entspringende. Dividendus

ist bei SCHEYBL geteilte Zahl, divisor teilende Zahl oder Teiler. Für pars aliquota sagt PIRKENSTEIN gerad aufmessender Teil, L. STURM Teil; für pars aliquanta Ersterer nicht gerad aufmessender Teil, L. STURM Stück einer Zahl. Quotus ist bei J. STURM Teilungszähler. Die fractiones oder minutiae vulgares seu mercatoriae, die gemeinen Brüche, werden unterschieden von den fractiones astronomicae seu minutiae physicae, den Sexagesimalbrüchen. Dem Resolvieren, Auflösen (SIMON JACOB) oder der Resolutz (STIFEL) steht gegenüber das Reduzieren, Aufgelöstes zu Ganzen machen (S. JACOB). Für Proba hat die Geometria Culmensis Bewerung, ebenso KÖBEL, letzterer auch Probierung, und STIFEL Probatz. Die Progressio ist entweder continua, eine natürliche oder in natürlicher Ordnung, oder discontinua, unterschnitten oder in gleichen Mitteln. Differenz oder Exzeß heifst hier Übertretung oder Unterschied. Für Exponent der Progression, oder signatura (APIAN) hat HARSDÖRFFER Benennung der Progreſs. Radix quadrata ist gevierte Wurzelzahl oder viereckete Wurzel oder bei SCHWENTER Quadratwurzel. Numeri abstracti übersetzt HOLTZMANN ledige Zahlen und numeri concreti benannte Zahlen.

Das Wort Algorithmus[36]) bedeutet meist Rechnen überhaupt. „Eine Lehre der Species“ erklärt SIMON JACOB, ähnlich RUDOLFF. Am häufigsten wird es für Ziffernrechnen, selten für Abacusrechnen gebraucht. Algorithmus linealis ist Rechnung auf den Linien. Die Spacia zwischen den Linien heifsen bei KÖBEL Feldunge. Der Name der Cambien oder Bankire kommt von campus, Feld; daher auch das italienische cambiare, wechseln.

Besondere Namen finden wir für eine grofse Anzahl von Rechnungsregeln. Die wichtigste derselben ist die Regel de tri, regula de tribus numeris, Regel von drei bekannten Zahlen (SIMON JACOB), nämlich numerus emptionis, Zahl des Kaufs oder der Ware, numerus pretii, Zahl des Geldes, numerus quaestionis, Zahl der Frage (BÖSCHENSTEIN). Weil sie kostbar und nützlich, wird sie auch regula aurea, güldene Regel genannt, oder regula magistralis, ein meisterlich Ordnung (BÖSCHENSTEIN). Man unterscheidet regula de tri conversa sive eversa, verkehrte oder umgekehrte, und composita, zwiefache (APIAN). Andere Regeln sind: regula consortii sive societatis, Gesellschaft (der Kaufleute), Regel vom Wucher (d. i. Zinseszinsrechnung), Regel vom Wechsel (d. i. Umrechnung von Geldsorten), regula cecis, coeci, coecis, zekis, oder virginum oder potatorum (Lösung unbestimmter Gleichungen 1. Grades), von Zeche (die mehrere in verschiedenem Verhältnis zu bezahlen haben). Practica, Praktik heifst behende Rechnung (SCHEYBL) oder subtile

---

36) Über den Ursprung des Wortes Algorithmus s. FELIX MÜLLER, Etym.-hist. Studien, S. 16.

Behendigkeit (SIMON JACOB). Die Welsche Praktik ist eine von den Walen überkommene Rechnung mit Vorteil und Behendigkeit (RIESE). Der Vorteil besteht in der Distraktion, Zerstreuung oder Zerfällung (STIFEL), d. h. nach CANTOR[37]) Zerlegung eines gebrochenen Multiplikators in eine Summe von sogen. Stammbrüchen, d. h. Brüchen mit dem Zähler 1. Endlich sei noch erwähnt die Tolletrechnung; sie „lernet durch die Rechenpfennig ein Metall aus dem andern ziehen" (APIAN), d. h. den Feingehalt der Legierungen bestimmen. Das Wort Tollet kommt wahrscheinlich aus dem italienischen tavoletta, Täfelchen[38]).

C. Arithmetik und Algebra.

Bis in den Anfang des XVII. Jahrhunderts behielt man die römische Einteilung der Zahlen in die folgenden 3 Arten (oder Manieren) bei: 1. numeri digiti, Fingerzahlen (Einer), 2. numeri articuli, Gliedzahlen (Zehner), 3. numeri compositi sive mixti, (aus Einern und Zehnern) zusammengesetzte Zahlen. HARSDÖRFFER unterscheidet numerus monadicus, einzehlige Zahl, und numerus decadicus, Zehner. Nach der Zusammensetzung aus Faktoren gab es mannigfaltige Gruppierungen. Eine Primzahl nannte SCHEYBL erste Zahl, SCHWENTER ungeteilte, nit prim ist komponiert oder gemacht. Numerus par, impar wird wörtlich mit gleiche, ungleiche Zahl übersetzt in einem Münchener Codex v. J. 1461[39]), bei APIAN und L. STURM; SCHEYBL, STIFEL u. a. sagen gerade und ungerade; pariter par (2^n) ist gleich-gleich oder zugleich gerad (SCHEYBL), pariter impar $[2(2n+1)]$ gleich-ungleich oder zugleich ungerad, pariter par et pariter impar $[2^n(2n+1)]$, ungleich gleich oder zugleich gerad und zugleich ungerad, impariter impar $[(2m+1)(2n+1)]$ ungleich ungerad. Die aus 2 Faktoren (Seiten) zusammengesetzte Zahl, numerus planus seu superficialis, heifst flache oder ebene Zahl (SCHEYBL) oder Flächenzahl (L. STURM); die aus 3 Seiten bestehende, numerus solidus seu corporalis, heifst feste oder dicke Zahl (SCHEYBL) oder körperliche Zahl (SIMON JACOB) oder Körperzahl (L. STURM). Im Vergleich der Zahl mit der Summe ihrer Faktoren unterschied man nach THEON VON SMYRNA numerus perfectus, ganz gerechte (Münch. Codex), vollkommene Zahl (SCHEYBL, SCHWENTER, STIFEL u. a.), numerus deficiens, gebrechende (Münch. Codex) oder mangelhafte Zahl, numerus abundans, überflüssige oder überschiefsende Zahl. Multiplex ist eine mannigfaltige

37) M. CANTOR, Rezension in Z. f. Math. XX, 1875, Hist.-lit. Abt. S. 68; s. auch TREUTLEIN, Das Rechnen im 16. Jahrh. l. c. S. 92 ff.

38) S. GÜNTHER, Gesch. d. math. Unt. S. 322; M. CANTOR, Vorl. II, 203.

39) M. CURTZE, Mathematisch-historische Miscellen. Nr. 5. Bibl. math. (2) IX 1895, S. 39.

Zahl (SCHEYBL) oder eine vielfache Gröſse (PIRKENSTEIN, REYHER u. a.); submultiplex ein Untervielfach (PIRKENSTEIN). Für potentia „könnte man sagen Vermögen, ein recht wunderliches Wort", meint J. STURM. Quadrat wird übersetzt gevierte Zahl oder viereckete Zahl oder Vierkantzahl, auch sagt man dafür die Quadratz (SIMON JACOB). Quadrieren ist Mehrung mit sich selbst (Geom. Culm.) oder Führen durch sich selbst (J. STURM), quadriert, in sich selbst gemacht (J. STURM). Die rationale Zahl ist eine aussprechliche Zahl (HOLTZMANN) oder wohlgeschickte (CHR. RUDOLFF); eine irrationale dagegen eine unaussprechliche oder ganz ungeschickte; für surdus sagt HOLTZMANN unnatürliche, STIFEL surdische, L. STURM surde Zahl. Communicantes, mittelmäſsige Zahlen (STIFEL, RUDOLFF) werden erst durch Heben rational zu einander. Positiv und negativ übersetzt STIFEL zugesetzt und abgezogen.

Werden zwei Zahlen mit einander verglichen, so bildet man die (!) Verhältnis, auch Schick (KEPLER); ratio, Zusammenhaltung zweier Dinge, die eines Geschlechts (SIMON JACOB); setzt man zwei Verhältnisse einander gleich, so entsteht die Proportio, Proportz, Vergleichung, gleiche Verhältnis oder das Ebenmaſs, oder Gleichförmigkeit der Verhältnisse; proportzlich geteilt (HOLTZMANN) heiſst in gleichem Verhältnis geteilt. Proportionalitas, ἀναλογία, ist Vergleichung der Proportzen (SIMON JACOB). Das Vorderglied, antecedens, heiſst vorgehend; das Hinterglied, consequens, nachfolgend oder nachgehend. Proportionalzahlen ($a : b = c : d$) sind vergleichliche oder gleichverhaltende oder ebenmäſsige Zahlen. Für die Verhältnisse hatte man zahlreiche Namen; ratio dupla, doppelte Verhältnis ($2a : a$), tripla, dreifache ($3a : a$), quadrupla, vierfache ($4a : a$), multiplex, vielfältige oder reine ($na : a$), subdupla, unterdoppelte ($m : a$, wo $m < 2a$), subtripla ($m : a$, wo $m < 3a$), superparticularis, überteilige ($1 + n : n$), sesquialtera, anderthalbige ($3a : 2a$), sesquitertia, eineindrittelfache oder überdreiteilige ($4a : 3a$), subsuperparticularis, unten überteilig ($n : n + 1$), superpartiens, überteilend ($n + k : n$, wo $k < n$), subsuperpartiens, unten überteilend ($n : n + k$), multiplex superparticularis, vielfach überteilig ($mn + 1 : n$), multiplex superpartiens, vielfach überteilend ($nm + k : n$); ratio duplicata $[a : c = (a : b)^2]$ ist ein zweimaliges, gedoppeltes oder zweifach gröſseres Verhältnis, und triplicata $[a : d = (a : b)^3]$ dreimaliges, dreifach gröſseres. Auch die genera, Geschlechter, der Proportzen sind hier zu nennen, die aus $a : b = c : d$ folgen: inversa, umgewendet oder umgekehrt ($b : a = d : c$), composita, zusammengesetzt, zusammengebracht, zusammengethan, gesammelt, versammelt ($a + b : b = c + d : d$), und zwar verbunden vorwärts (L. STURM) ($a + b : a = c + d : c$) oder verbunden rückwärts ($a + b : b = c + d : d$), disjuncta, zerteilt, von einander geschieden ($a - b : a = c - d : c$; $a - b : b = c - d : d$), con-

ersa, verwendet, herausgewendet ($a : a - b = c : c - d$); endlich permuata, verwechselt, wechselweis ($a : c = b : d$), welche nicht aus der ersten olgt. In der stetigen Proportion oder ordentlichen Ebenmäfsigkeit (REYHER) ıeifst die mittlere Proportionale entweder Mittelzahl (APIAN) oder mittlere benmäfsige Gröfse (REYHER) oder mittlere gleichverhaltende (J. STURM). Schliefslich bemerken wir noch, dafs commensurable Gröfsen gleichmäfsige ıeifsen, incommensurable ungleichmäfsige (PIRKENSTEIN, J. STURM) oder unusammenmefsliche (J. STURM).

Von den figurierten Zahlen sind hier zu erwähnen: numerus angularis, Winkelzahl (drei- oder viereckige), circularis, Zirkelzahl, pyramidalis, dreioder vierständige, musicus, Kling- oder Singzahl (HARSDÖRFFER).

Neben Equation oder Equatz (STIFEL) wird Vergleichung gebraucht; combinatio ist Paarung (SCHWENTER), combinieren paaren.

D. Ebene Geometrie.

Bei der grofsen Mannigfaltigkeit der Ausdrücke, welche die geometrischen Begriffe erfahren haben, wird es hier häufiger als in den vorhergehenden Abschnitten notwendig sein, den einzelnen Verdeutschungen die Namen der Übersetzer hinzuzufügen. Zugleich mufs wiederholt darauf aufmerksam gemacht werden, dafs mehrere der genannten Schriftsteller sich der deutschen Ausdrücke nur bedienen, um den fremdsprachlichen Kunstausdruck zu erklären.

1. **Allgemeines.** Die Planimetria ist eine Ermessung der Ebene (SCHWENTER), für grofse Entfernungen gebraucht man Geodäsia. Die Dimensionen (Ausstreckungen nach HOLTZMANN) sind Länge, Breite und Höhe oder Tiefe. Für spatium sagt SCHWENTER Weite, ebenso für das sonst allgemein gebrauchte Distantz. Mensuratio übersetzt KEPLER Eych. Von Instrumenten zum Zeichnen und Messen wird am häufigsten erwähnt das Lineal oder Richtscheidt (Geom. deutsch, DÜRER, SCHMID, SCHWENTER) oder Höltzlein (REYHER), der Cirkel oder Passer (REYHER), dessen Spitze Fufs oder Ort (Geom. deutsch) oder Stift (REYHER) heifst, der Gnomon oder Winkelmafs (Geom. Culm., REYHER), Winkelhaken (HOLTZMANN, SCHWENTER), Winkelkreuz, crucze (Geom. Culm.), ferner das mefsegeczew (Geom. Culm.), d. h. die Mefsstange, die scala altimetra oder Mefsleiter (STÖFFLER), die Bussole oder das Magnetkästchen (L. STURM), das perpendiculum oder die Bleiwage (SCHWENTER). Alhidada ist der Regel Zeiger (STÖFFLER). In der Geometria Culmensis wird triarbor übersetzt drebom, d. i. Dreibaum oder Tragebaum; vielleicht ein aus den drei Schenkeln zweier gleichen Nebenwinkel bestehendes Instrument, das dazu diente, einen rechten Winkel anzutragen; rechter oder gerechter drebom wird auch für gerade senkrechte

Linie (cathetus) gebraucht. Geometrisch zeichnen heifst reifsen, aufreifsen (Dürer, Kepler, Schwenter). Die Lösung der Aufgaben kann nach Dürer sein entweder mechanice (d. h. annähernd richtig) oder demonstrative, d. h. kunstrichtig (J. Sturm).

2. **Elementargebilde.** Der Punkt ist ein Stüpffen (Schmid), Stüpfflein (Simon Jacob), Düttel oder Düpffelein oder Tipflin (Holtzmann, Schwenter, Reyher) oder ein Tupf (J. Sturm). Linie ist ein langer Rifs (Geom. deutsch, Schmid, Simon Jacob) oder ein Strich (Schmid, Kepler, Pirkenstein, Reyher); recta linea ist gerade oder scheidtrecht lini (Schmid), gestrackte oder rechte Linj (Holtzmann), Gerade oder Strecke (Kepler), gerader Strich oder Zug (Reyher); curva linea ist ein gebogen Rifs (Geom. deutsch), eine krumme oder gebogene Linie (Schmid, Holtzmann), ein krummer Zug (Reyher); concav ist eingebogen oder hohl, convex ausgebogen (Dürer, Schmid, Simon Jacob). Der Richtung nach ist die gerade Linie erstens horizontal, d. i. überzwerg (Geom. deutsch, Dürer, Köbel), oder wagrecht (J. Sturm, Schwenter), zweitens perpendicular oder aufrecht (Köbel, Dürer), wagrecht (Dürer, Schmid, Schwenter, Simon Jacob, Simon Marius), bleirecht (Pirkenstein, Reyher), schnurgerecht (Holtzmann); Schmid sagt: „aufrecht, wagrecht, winkelrecht, bleirecht ist alles ein Ding“. Das Lot ist bei Reyher ein bleirechter Senkstrich oder nur Senkstrich. Drittens kann die Gerade weder horizontal noch perpendicular sein: dann heifst sie schlemm lini (Dürer), oder schlimmst treffend (Kepler), d. i. unter schiefem Winkel, oder überzwerg (Simon Marius) oder über ort (Ort ist Ecke) und ortlini (Dürer). Parallele Linien, equidistantes, heifsen parr oder barlini (Dürer), gleichständige (Apian), Nebenlinien oder ebenferre [d. i. gleichferne] (Schmid), gleichweitige (Simon Jacob, Schwenter), gleichlaufende (Kepler, Schwenter, Harsdörffer, Pirkenstein, J. Sturm), Nebenstriche (Reyher).

Angulus ist überall Winkel; aber „wenn man ihn von aufsen sieht, heifst es Eck“ (Dürer). Man unterscheidet flache oder ebene Winkel und körperliche (Schmid, Holtzmann, Schwenter, Pirkenstein, Reyher). Je nachdem der Winkel von zwei Geraden oder von zwei krummen Linien oder von einer Geraden und einer krummen Linie eingeschlossen wurde, nannte man ihn damals rechtlinischer (Simon Marius, Schwenter), geradlinichter (Pirkenstein), geradstrichiger (Reyher) Winkel, oder krummlinischer, krummlinichter (Schwenter, Pirkenstein), oder drittens vermengter, vermischter Winkel (Schwenter). Der Gröfse nach ist der Winkel 1) acutus — scharf, spitz, spitzig (Schmid, Simon Marius, Kepler, Pirkenstein, J. Sturm) oder eng (Dürer, Schmid, Simon Marius), 2) rectus — recht (Dürer, Schwenter, J. Sturm), gerecht (Dürer, Holtzmann), recht-

ıefsig (CHR. RUDOLFF), ein rechter Winkelhack (SCHMID), und 3) obtusus — ·eit (DÜRER, SCHMID, SIMON JACOB, SIMON MARIUS, HOLTZMMNN, SCHWENTER) der stumpf (DÜRER, SCHWENTER, L. STURM, J. STURM); vertex heifst cheitelpunkt (J. STURM), Gipfel, Wipfel, Wirbel (KEPLER); anguli verticales sind Scheitel- oder Kreuzwinkel (J. STURM); anguli alterni — Wechselrinkel (J. STURM).

3. **Geradlinige Figuren.** Superficies, welche lang und breit ist, heifst 'läche (SCHMID, REYHER, J. und L. STURM); superficies plana ist velt oder lecht gevilde (Geom. Culm.), Veldung (Geom. deutsch, SIMON JACOB, KEPLER), ebenes Feld (DÜRER, KEPLER), ebene Fläche, gerade oder scheidtechte Fläche oder Ebene (SCHMID), Ebene (DÜRER, J. und L. STURM). ieradlinige Figuren heifsen rechtwendig velt oder gevilde (Geom. Culm.), 'elder (DÜRER), rechtlinische Figuren (HOLTZMANN, SCHWENTER), geradseitige iestalten (REYHER), Flächen oder Figuren (L. STURM). latus, Seite, heifst n der Geom. Culm. want. Für Triangulus sagen alle bis auf J. STURM Triangel, nur selten Dreieck; doch REYHER gebraucht nur Dreieck, die Geom. Culm. geer, dry wynkelecht velt oder gevilde, und SCHMID dreieckicht feld, Triangel, dreieckige Flech, Dreiort. Auch hier wird, wie beim Winkel, unterschieden: rechtlinischer, krummlinischer, vermischtlinischer Triangel (SCHWENTER). Triangulus orthogonius sive rectangulus wird übersetzt rechtwinkelecht geer (Geom. Culm.), winkelrechter Triangel (SIMON MARIUS, SCHWENTER, PIRKENSTEIN), rechteckiger oder winkelmessiger Triangel (HOLTZMANN), rechtwinkliger Triangel (SCHMID, PIRKENSTEIN u. a.); acutangulus ist spitzig (SCHMID, SCHWENTER), scharfwinklig (SCHMID, SCHWENTER, HOLTZMANN, PIRKENSTEIN), scharfeckigt (HOLTZMANN, SIMON MARIUS), spitzwinklig (REYHER, J. u. L. STURM); obtusangulus sive amblygonius: stumpf (SCHMID), weit (SCHWENTER), weiteckigt (HOLTZMANN, SIMON MARIUS), stumpfwinklig (SCHWENTER, PIRKENSTEIN, J. u. L. STURM u. a.); obliquangulus unrechtwinklig (SCHWENTER); ferner equilaterus: glychwendig (Geom. Culm.), gleichseitig (PIRKENSTEIN, SIMON MARIUS, SCHWENTER u. a.); scalenus: unglychwendig, ungleichseitig; isosceles: gleichfüfsig (SIMON MARIUS, HOLTZMANN, J. STURM). Die drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks heifsen basis (sie stand bei Vermessungen horizontal), cathetus und hypothenusa (sic!); die basis heifst auch Grundlinie; cathetus „ist eine gesenkte Lini, die auffrecht oder wagrecht[40]) Seite" (SCHMID); hypothenusa (immer mit th geschrieben!), die unterzogene (HOLTZMANN) ist „die in einem rechtwinkligen Triangel über Ort [Eck] geht" (SCHMID). Von einer dem Winkel gegenüberliegenden Seite heifst es, sie ist dem Winkel unterzogen

40) wagerecht wird, wie wir oben gesehen haben, für vertikal gebraucht.

(Holtzmann, Simon Marius u. a.) oder unterstreckt (Simon Jacob), oder sie unterspannt (Pirkenstein) oder überspannt (Reyher) den Winkel; von zwei Seiten wird der Winkel begriffen (Holtzmann) oder beschlossen (Simon Marius).

Tetragonum sive quadrilaterum wird übersetzt vierwynkelen oder viereckethen gevilde, quadrangil (Geom. Culm.), vierecket rechtwinklig Figur oder Fierung (Dürer), gefiert Feld oder Vierort (Schmid), vierseitige Figur (Simon Jacob), viereckigte Figur oder vierseitige Fläche (Schwenter), Vierung oder Viereck (Harsdörffer), Viereck (selten Schwenter, Reyher, J. Sturm). Das Wort Quadrat (Simon Jacob u. a) wechselt ab mit viereckecht vierkanten veld (Geom. Culm.), gefierte Ebene (Dürer), Vierung oder gerecht Vierung (Geom. deutsch, Holtzmann, Kepler), recht Gevierts oder Vierung (Schmid), gefierte Fläche, in vier rechten Winkeln und gleichen Seiten beschlossen (Riese), regulierte Vierung (Schwenter), gleichseitiges und gleichwinkliges Viereck (Harsdörffer, Reyher), gleichvierseitige Figur oder gleiches Viereck (Pirkenstein). Quadratische Maße sind virkante mose (Geom. Culm.), superficies pedalis quadrata, geviret vus (Geom. Culm.), Schachtschuh, Kreuzschuh, viereckichter Schuh (Köbel, J. Sturm). Oblongum ist lang syten gevilde, daz vier rechte winkel hat (Geom. Culm.), ablange Vierung (Schmid, Kepler), verlengte Vierung (Simon Jacob), rechtwinklig verlängte oder überlengte Vierung (Dürer), winkelrechtes Parallelogramm (Simon Marius, Holtzmann), winkelrechte ablange oder verlengte Vierung (Simon Marius, Holtzmann, Pirkenstein), länglicht Viereck (Reyher), längliches Rechteck (L. Sturm). Rhombus wird in der Geom. Culm. elmuhahym[41]) genannt, ferner übersetzt gleichseitige Raute oder geschrait Vierort (Schmid), geschoben Quadrat (Simon Jacob), geschragte Vierung (Simon Marius, Holtzmann), Raute oder Rautenvierung (Schwenter), Raute (Kepler, Harsdörffer, L. Sturm, Reyher), auch geschobenes Viereck (Reyher). Rhomboides, ein schiefwinkliges Parallelogramm, [illegible] gleich [similis] elmuhahym (Geom. Culm.), ablange Raute oder ge[illegible] verlengte Vierung (Schmid), ablange Rautenfierung (Dürer), ge[illegible] verlengte Vierung (Simon Jacob), geschrägte überlengte Vierung (Simon Marius, Holtzmann), ablange Raute oder Rautenvierung (Schwenter), [illegible] Vierung oder ablanges oder geschobenes Viereck (Harsdörffer), [illegible] Raute oder nebenstrichiges Viereck (Reyher). Endlich heifst [illegible] (Geom. Culm.), spiefseckig Viereck (Kepler), Tischlein

[41]) [illegible] elmuahin und elmuharifa sind von den Euklidübersetzern [illegible] herübergenommen Atelhart, Campanus u. a.). S. M. Cantor, [illegible]

(SCHWENTER), ungleiche Vierung (PIRKENSTEIN, SIMON MARIUS, SCHWENTER), ungleichlaufendseitiges Viereck (J. STURM), ungeschickt Viereck (REYHER) Complementa [bei uns Ergänzungsparallelogramme, die von der Diagonale durchschnitten werden] heifsen Ausfüllungen (SIMON MARIUS, PIRKENSTEIN) oder Erfüll-Parallelogramma (SCHWENTER). Die beiden Ausfüllungen mit einem der übrigen Quadrate bilden den Gnomon, Winkelhaken oder Winkelmafs (PIRKENSTEIN, SCHWENTER).

Es wird nicht ohne Interesse sein, den Wortlaut des pythagoreischen Lehrsatzes bei einigen der älteren Schriftsteller zu vergleichen. In der Geometria Culmensis (1400) heifst es: „Alzo wirt das vierkante veld, gemessen vs der langen want, alzo gros alz dy beyde vierkante, dy do werden gemessen von den zwen wenden des geren, dy do czusamene treten in dem rechten wynkel.“ In dem Rechenbuche SIMON JACOBS von Coburg (1552) lautet dieser Satz: „In einem jeden triangulo Orthogonio, thun die beyde quadrat, basis und catheti, sam̄entlich so viel als das quadrat Hypothenuse.“ HOLTZMANN (1562) übersetzt Buch I, Fürgab 47: „In den winkelrechten triangeln ist das quadrat der seitten, so vnder den gerechten winckel gezogen wird, gleich so grofs als beyde quadrat sambtlich der andern zweier seitten, welche den gerechten winckel begreiffen.“ Endlich sagt der alle Fremdwörter mit Consequenz vermeidende SAMUEL REYHER (1697): „In jedwedem rechtwincklichten Dreyeck, ist das gleichseitige und gleichwincklichte Viereck, welches von dem Strich, so dem rechten Winckel entgegen stehet, gemacht wird, eben so grofs, als die beeden Vierecke zusammen, welche von den beeden Seiten, so den rechten Winckel begreiffen, gemacht werden.“

Wir wenden uns nun zu den Vielecken. Poligonium ist ein vilwendig gevilde oder vmmereyte (Geom. Culm.), ein vileckicht feld (SCHMID), eine vielseitige Figur (SIMON JACOB, SIMON MARIUS), oder vieleckigte Figur (PIRKENSTEIN, SCHWENTER), eine vieleckigte Gestalt (REYHER), ein Vieleck (PIRKENSTEIN, J. STURM). Man unterscheidet vieleckigte regulierte Figuren und unregulierte (SIMON JACOB, SCHWENTER); erstere heifsen auch geordnete (KEPLER), gleichseitige (HOLTZMANN), gleichecket (DÜRER), gleichseitig und gleicheckigt (PIRKENSTEIN); letztere ungeschickt und ungleich (HOLTZMANN). In der Geometria deutsch wird ein gerecht Fünfort, Siebenort, Achtort u. s. w. gezeichnet. Ein Vieleck mit einspringenden Winkeln heisst in der Geometria Culmensis campus tortuosus seu extraeminens, ein wanschaffen gevilde. Peripheria polygoni ist vmmereyte (Geom. Culm.), Umzäunung (KEPLER), Umlauf (J. STURM). Für Diagonale finden wir twerlini (Geom. Culm.), über Ort Lini (Geom. deutsch), überzwerchenlini (KÖBEL), Ecklini überort (SCHMID), Ortlini (DÜRER), Zwerglini (DÜRER, PIRKENSTEIN),

Zwerlinie, Querlinie, Durchzug (KEPLER), Zwergstrich (REYHER). Für Basis wird auch gesagt Boden (SCHEYBL, HOLTZMANN), Grundlinie (SIMON JACOB, HOLTZMANN, J. STURM), Bodenlinie (KEPLER), Grundseite (SIMON MARIUS), Grundstrich (REYHER). Corauscus, römisch coraustus, Scheitellinie [d. h. durch den Scheitel parallel zum Horizont], erklärt SIMON JACOB als „mit der Basis parallel oder gleichweitig.“ Schliefslich sei bemerkt, dafs der Inhalt einer Figur, area oder campus, genannt wird gevilde oder behaldung (Geom. Culm), Feldung (SIMON JACOB, HOLTZMANN).

4. **Kreis.** Beim Kreise ist zu unterscheiden die Kreislinie und die Kreisfläche. Circulus, die Linie, heifst in unserm Zeitabschnitt meistens Cirkel, aber auch runder Rifs (Geom. dtsch.), Cirkellinie (SCHMID, DÜRER, SCHWENTER), scheublich oder runde Lini (SCHMID), Kreis oder Kreislinie (HARSDÖRFFER, REYHER, J. und L. STURM). Area circularis heifst cirkelvelt, cirkelgevilde, scheybelechter ackir (Geom. Culm.), Cirkelfeld (KEPLER), runde Ebene (SIMON JACOB), Kreis (HARSDÖRFFER, REYHER), Kreisfläche (J. STURM). Centrum bleibt bei den meisten; doch findet sich auch Mittelpunkt (SCHMID, DÜRER, PIRKENSTEIN, SCHWENTER) oder Mitteldüpffel (REYHER). Circumferentia, peripheria ist vmmesweyff des cirkels oder vmmecreyfs (Geom. Culm.), ganzer runder Rifs (Geom. dtsch., SCHMID), Umkreis (KÖBEL, SIMON MARIUS, KEPLER, PIRKENSTEIN, SCHWENTER, J. STURM), Umkreis oder Kreiszug (REYHER). Semicirculus ist Halbkreis (REYHER, J. STURM). Für Quadrant sagt DÜRER rechter Quadrant, PIRKENSTEIN Viertelbogen, J. STURM Viertelskreis oder Kreisviertel. Arcus circuli wird übersetzt Cirkeltrum [plur. -ümmer] (SCHMID, SCHWENTER), runder Rifs (Geom. dtsch.), Bogen (KEPLER, SCHWENTER, REYHER) oder Kreisbogen (J. STURM). Diameter ist Mittelrifs (SCHMID) oder Durchzug (SCHMID, KEPLER), Durchschneider (SIMON MARIUS, SCHWENTER), Durchschlag (REYHER), Durchmesser (J. STURM). Radius heifst fast überall halber Diameter (z. B. DÜRER, SIMON JACOB, PIRKENSTEIN), aber auch Halbmesser (J. und L. STURM). Chorda (SIMON JACOB, L. STURM) oder subtensa wird übersetzt ein unterzogener Rifs oder Senne (SCHMID), Unterzug oder Senne (KEPLER), Senne (SCHWENTER). Sagitta ist die Höhe eines Cirkelschnittes oder Boltz (KEPLER). Tangens ist Anstreicher (KEPLER), eine Linie, die einen Cirkel anrühret (DÜRER, SIMON MARIUS, PIRKENSTEIN, SCHWENTER), anrührender Strich oder Rührstrich (REYHER); secans Durchschneider (KEPLER), Zerschneidende (HOLTZMANN). Sector circuli, „Cirkelzahn, eigentlich zu teutsch der Schuster Werkmefser“ (KEPLER), wird auch übersetzt Ausschnitz eines Cirkels (PIRKENSTEIN), Kreisteil (J. STURM), Kreisschnitt (REYHER); segmentum circuli ist Stuck von dem cirkelvelde (Geom. Culm.), Schnitz eines Cirkels (KEPLER, PIRKENSTEIN), Cirkelstück (SIMON JACOB, SCHWENTER), Stück eines Zirkels

(Holtzmann), Kreisabschnitt (Simon Marius), Kreisschnitt (J. Sturm), Kreisstück (Reyher). Angulus in segmento ist ein Winkel in einem Schnitz oder auf einem Stück oder auf dem Umkreis (Holtzmann, Pirkenstein), oder in einem Kreis stehender oder Kreisstückswinkel (Reyher). Statt des Winkels bei dem Centro (Holtzmann) wird auch gesagt Mittelpunktswinkel (Pirkenstein), Mitteldüpffelswinkel (Reyher). Quadratura circuli, die Vergleichung eines Cirkels und eines Quadrats (Dürer), heifst Kreisvierung (Pirkenstein, J. Sturm); quadrieren ist vierkanten (Geom. Culm.), quadratrix die Vierungslinie (Schwenter, J. Sturm). Rectificieren bedeutet einen gerunden rifs scheidtrecht machen (Geom. dtsch.).

5. **Andere krumme Linien.** Nächst dem Kreise sind die wichtigsten krummlinigen Figuren, krumpwendig velder (Geom. Culm.), die sectiones conicae, Kegelschnitte (Kepler), Kegellinien (J. Sturm). Auf sie führt die Aufgabe, ein Rechteck von gegebener Gröfse an eine Gerade von gegebener Länge anzutragen[42]), applicare, oder anzuschlagen (Reyher), daher mangelhaftens angeschlagenes und übertreffendes oder überschiefsendes Viereck (Reyher). Ordinatim applicatae übersetzt J. Sturm ordentlich gezogene Linien. Die Ellipse heifst ablanger Cirkel oder Eilinie (Kepler), wennechtyn gevilde (Geom. Culm.), ablange runde Linie (Schwenter), Ovallinie oder die kleine Kegeleierlinie (Harsdörffer), Eilinie (Dürer), ermangelnde Kegellinie (J. Sturm), Langrundung (L. Sturm); die Hyperbel Gabellinie (Dürer), Hohllinie oder auch gebrochene Eierlinie (Harsdörffer), übertreffende Kegellinie (Schwenter, J. Sturm); die Parabel Brennlinie (Dürer, Kepler, Schwenter, Harsdörffer, L. Sturm), rechtwinkliger Kegelschnitt (Kepler), vergleichende Kegellinie (J. Sturm)[43]). Parameter, latus rectum, übersetzt J. Sturm Mitmesser. Asymptote ist „die Lini, die in die weitten läuft vnd nimmer mehr zu keym end kombt“ (Dürer) oder niemals zusammenkommende Linie (J. Sturm).

Von andern krummen Linien sei erwähnt der Cylinderschnitt, Walgerschnitt (Kepler), conchois, die Muschellinie (Dürer, J. Sturm, Schwenter, Harsdörffer), linea aranei, die Spinnenlinie (Dürer, Schwenter), ovalis, Eilinie (Kepler, Schwenter, J. Sturm), spiralis, Schneckenlinie (Schmid, Kepler, Schwenter, J. und L. Sturm), helica, Schraubenlinie (Dürer, Schmid), flexuosa seu serpentina, Schlangenlinie (Schmid, Schwenter). Eine aus Kreisbogen hergestellte „einem wolgestalten ey gleiche“ Linie ist Dürer's Eylinie. Die lunula Hippocratis' heifst Mondsfigur (Simon Jacob), Mond (Schwenter), Halbmond (J. Sturm).

42) Siehe Euclidis Elementa C. I, pr. 44.

43) Nach Menächmus hiefsen die Kegelschnitte *ἡ τοῦ ὀξυγωνίου, ὀρθογωνίου, ἀμβλυγωνίου κώνου τομή*; vgl. Felix Müller, Histor.-etymol. Studien, l. c. S. 24 ff.

6. Vergleichung von Strecken und Figuren. Commensurable Strecken werden gemeinmäfsliche (Pirkenstein) oder gleichmäfsige (Reyher, J. Sturm), incommensurable aber ungleichmäfsige (J. Sturm) genannt. Proportionale Linien gleichverhaltende (Pirkenstein, J. Sturm) oder ebenmäfsige (Reyher); die mittlere Proportionale heifst Mittellinie (Schwenter), mittlerer ebenmäfsiger Strich (Reyher), mittlere Gleichverhaltende (J. Sturm). Die Verdoppelung des Würfels führt auf die Aufgabe, zu zwei gegebenen Linien zwei gerecht Mittellini (Dürer) oder zwei Linien in ordentlicher Proportion (Schwenter) zu zeichnen. Die divina proportio des Paciuolo (um 1509), der goldene Schnitt, die göttliche Verhältnis ist die Aufgabe, eine Linie media et extrema ratione seciren (Schwenter), oder nach der äufsersten und mittleren Verhältnis teilen (Pirkenstein, Reyher).

Die Ähnlichkeit der Figuren heifst vielfach Gleichförmigkeit. Similis heifst in Art und Gestalt ähnlich (Schmid), gleichförmig und gleichgestellt (Pirkenstein), oder nur ähnlich (Kepler) oder gleichförmig (Schwenter, Simon Marius, Holtzmann), gleichähnlich (Reyher). Homologe Geraden in gleichförmigen Vielecken heifsen gleichförmig-haltnus sagende (Pirkenstein) oder verhältnis-ähnliche Geraden (Reyher).

7. Trigonometrisches. Bei der Beschreibung des zur Feldmessung benutzten Quadranten tritt vor allen die schon den Arabern eigentümliche Winkelfunktion umbra, Schatten, auf; umbra recta, rechter Schatten, ist die Cotangente; umbra versa, verkehrter Schatten, die Tangente. Apian hat die drei Funktionen sinus, sinus versus, sinus complementi, unsern cosinus. Die Sekante wurde von Koppernikus in die Wissenschaft als neue trigonometrische Funktion eingeführt; er nannte sie Hypotenuse, entsprechend der Tangente als Kathete[44]). Sinus wird von Simon Jacob medietas chordae, von Kepler halbe Sehne genannt. Sinus totus, der ganze Sinus (Schwenter) ist der halbe Diameter (Simon Jacob); sinus rectus, der rechte Sinus (Schwenter); und sinus versus oder sagitta, ist Boltz (Kepler) oder Pfeil (Schwenter). Der Name Trigonometrie kommt wahrscheinlich als Titel zuerst bei Pitiscus (1595) vor[45]).

E. Stereometrie.

Die Stereometrie lehrt die Messung körperlicher Dinge (Schwenter). Ihr Gegenstand ist der Corpus, das Solidum (lang, breit, tief) (Simon Jacob), oder das Dichte (Pirkenstein), die volle leibhafte Figur (Kepler), der Leichnam (Harsdörffer), der Körper (Schmid, J. Sturm). Grenzen der Körper sind teils plana, Ebenen, teils curvae superficies, krumme oder

44) M. Cantor, Vorl. II, S. 433.
45) M. Cantor, Vorl. II, S. 533.

gebogene Flächen, oder Rundungen. Solidi planum vel hedra ist die Wand (KEPLER); basis solidi der Boden (KEPLER) oder die Grundfläche (J. STURM), planum superius der Tisch (KEPLER). Zwei sich schneidende Ebenen bilden das angulum solidum, den dichten Winkel (PIRKENSTEIN) oder körperlichen Winkel (SCHMID, SCHWENTER), der dreiecket oder geviert sein kann. Plana parallela sind gleichweit abstehende Ebenen (PIRKENSTEIN) oder Nebenflächen (REYHER). Die Kante, latus solidi, ist ein langes Eck, Reifen, Schärfe (KEPLER) oder scharfe Seite (DÜRER). Die Corpora unterscheiden sich in columnaria und pyramidalia (SIMON JACOB). Der Cubus ist ein geviert Corpus (KÖBEL, DÜRER), recht gevierter Würfel (KEPLER), oder Würfel (DÜRER, PIRKENSTEIN, J. u. L. STURM, REYHER u. a.). Cubikelle ist gewürfelte Elle (CHR. RUDOLFF). Parallelepipedum übersetzt KEPLER Quadratstuck oder viereckts gefierte Säule, L. STURM parallel viereckigter Stock; parallelepipedon rectangulum ist gerade Säule (KEPLER). Prisma oder seratile ist Zwerstuck, Speidel, Wecken (KEPLER), Ecksäule (PIRKENSTEIN, J. STURM), eckigte Säule, und zwar drei-, vier-, fünfeckigte Säule (DÜRER, L. STURM), oder gerader gleichdicker Stock (L. STURM). Corpus pyramidale übersetzt SCHMID feuerförmiger Körper, wohl in der Meinung, pyramis komme von πῦρ, Feuer her. Piremus heifst bei den alten Ägyptern die Seitenkante der Pyramide, und es wurde dieser Name bei den Griechen zum Namen des ganzen Körpers. Bei Plato[46]) ist allerdings die regelmäfsige Pyramide, das Tetraeder, das Symbol des Feuers. Sonst heifst die Pyramide meist Spitzsäule (PIRKENSTEIN, HARSDÖRFFER, J. STURM) oder zugespitzte Säule (KEPLER), und zwar 3-, 4-, 5- eckigt; pyramis laterata aber ist bei SCHMID eckigte Feuerform. Superficies prismatis übersetzt J. STURM einfach mit Eckfläche. Die abgestumpfte Pyramide heifst Stumpf oder Stock oder Trum (plur. Trümmer). Volumen ist körperlicher Inhalt (SIMON JACOB), Fülle, Raum, Leib (LEPLER), cubischer Inhalt (L. STURM).

Die regelmäfsigen Polyeder heifsen corpora regularia, regulierte Körper (SCHMID u. a.), die allenthalben gleich sind von Feldern, Ecken und Seiten (DÜRER). Ein von Dreiecken begrenzter Körper ist ein drianglich corpus (DÜRER). Polyeder wird übersetzt vielecket corpus (SCHMID) oder vielflächige Figur (PIRKENSTEIN). Tetraeder ist eine viergleicheckigte Spitzsäule (L. STURM), Octaeder doppelte viereckigte und gleichseitige Spitzsäule (L. STURM), Icosaeder ein kuglichter Körper von 20 gleichseitigen Triangeln, Dodecaeder ein kuglichter Körper von 12 regular Fünfecken (L. STURM).

---

46) PLATO Timaeus § 115, *Dialogi ed.* BECKER Pars III, vol. II, p. 71. DASYPODIUS *Λέξικον seu Dictionarium mathematicum,* 1573, p. 20: *'igni dicunt proportionalem esse pyramidem'*.

Schmid, Pirkenstein und Schwenter sagen, sie hätten die Namen der fünf regelmäſsigen Körper nicht zu verdeutschen gewuſst. Corpora irregularia heiſsen unregulierte (Dürer) oder nit regulierte (Schmid). Obeliscus wird spitzige Säule oder viereckigter Pyramis genannt (Schwenter).

Wir kommen nun zu den Körpern, die eine curva superficies, Rundung (Kepler) oder gebogene Ebene (Dürer) haben. Der Cylinder ist eine runde Säule oder Rundsäule (Dürer, Schmid, Kepler, Simon Jacob, J. u. L. Sturm), auch Walze (Pirkenstein, Kepler) oder Walger, Welle (Kepler) genannt. Sein Mantel heiſst bogne Ebene (Dürer), Rundfläche (J. Sturm), äuſserlich Feld oder Rock, Rohr, Rinde (Kepler). Conus ist aufrechter Kegel (Simon Jacob), oder Kegel (Harsdörffer, Pirkenstein, J. und L. Sturm), oder Rundspitz (Harsdörffer) oder pyramis rotunda, runde Feuerform (Schmid); seine Basis heiſst Grund (Dürer), Grundfläche oder Grundscheibe (Kepler, J. Sturm); seine Achse Axt oder Graat (Kepler); sein Mantel runde Fläche oder Rundfläche (J. Sturm) oder rundes Dach, Rinde, Rock (Kepler). Truncus coni ist Kegelstück (J. Sturm), abgeschnittener oder gestumpfter Kegel (Simon Jacob), oder Stumpf, Stock, Trum (Kepler). Rhombus solidum, zween gesellete Kegel (Kepler), heiſst Doppelkegel oder Kegelweck (J. Sturm).

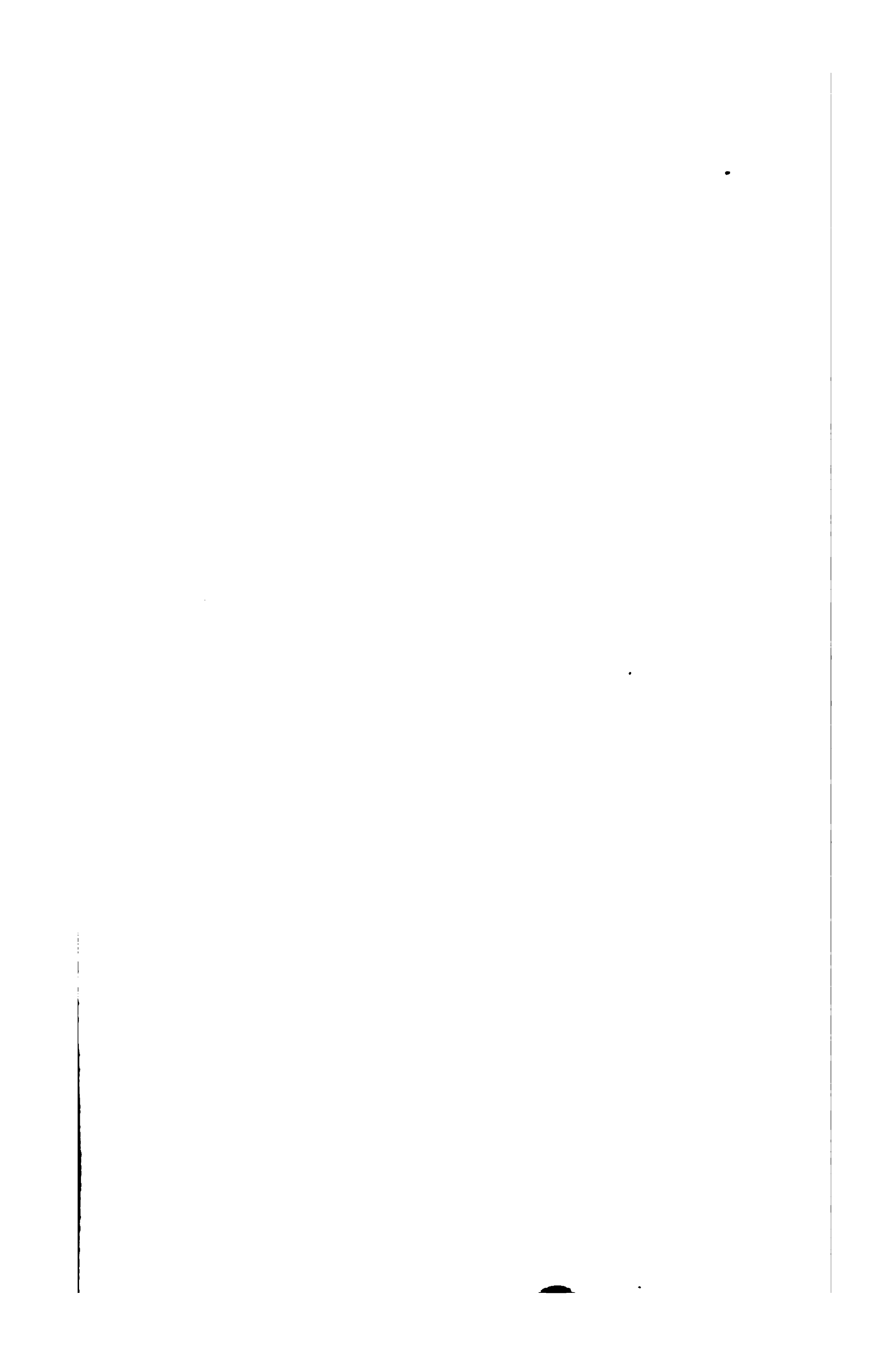
Sphaera ist meist die Kugel oder die spheer (Dürer, Sacrobosco-Heynfogel); ihre superficies ist kuglete Ebene (Dürer), äuſserste Fläche der Kugel (Simon Jacob) oder Kugelfläche (J. Sturm), ihre axis Achs (Heynfogel), Ecks (Schmid), Axlini (Dürer), Axt (Schwenter), Achse (Pirkenstein), Mittellinie (J. Sturm). Segmentum sphaericum ist Kugelschnitz (Dürer, Kepler), oder Kugelschnitt (J. Sturm); sector sphaericus Kugelteil (J. Sturm), Kugelzahn (Kepler); Calotte das runde Feld des Kugelschnitzes oder das Hütlein (Kepler); zona der Gürtel (Kepler).

An die Kugel knüpfen wir einige Kunstausdrücke aus der mathematischen Geographie. Axis mundi ist Axt der Welt (Dürer) oder Achsstrich (L. Sturm); polus Angelpunkt (L. Sturm), polus mundi Weltangel. Ist die Achse senkrecht, so ist die spheer aufgericht, ist die Achse schräg, eine schlemme spheer (Heynfogel). Von den Himmelskreisen sind folgende zu nennen: der Äquator ist ebenechter Kreis oder Gleicher des Tags und der Nacht (Heynfogel); Horizont Augenender (Heynfogel), horizontalische Fläche (Schwenter), Gesichts-Ender (L. Sturm); Meridianus Mittagslinie (Dürer), Mittagskreis (L. Sturm), Mittagscirkel (Schwenter), Mittentager Kreyſs (Heynfogel); circuli tropici Sonnenwendkreise (Heynfogel, L. Sturm); circuli polares Poluskreise (L. Sturm); circuli latitudinis, longitudinis, declinationis Kreise der Breite, Länge, Abweichung (L. Sturm); zodiacus zeichentragender Kreis (Heynfogel) oder Thierkreis

(APIAN, HEYNFOGEL), ecliptica Sonnenstraſse (L. STURM). Merkwürdigerweise übersetzt HEYNFOGEL coluri die zweyen waldt ochssen Kreyſs, nach der Etymologie des Wortes Kolur „von κῶλον, membrum, und οὖρος, bos silvester" des SACROBOSCO[47]. Bekanntlich kommt Kolur von κόλουρος, abgestutzt, weil diese Kreise nirgend vollständig zu sehen sind. Rectascension ist gestrackte Aufrichtung (HEYNFOGEL). Zona torrida verbrennter Gürtel (KEPLER); Fixsterne heiſsen auch Haftsterne (J. STURM), Kometen Schwanzsterne (L. STURM). Epicykel ist Oberkreis (HEYNFOGEL). SCHWENTER sagt: „Die Teutschen nennen die Epakten Pacten."

Zum Schluſs seien die Namen einiger Körper genannt, die J. STURM und KEPLER der Messekunst ARCHIMEDIS entlehnt oder neu ersonnen haben. Sphäroides ist eine kugelähnliche Figur, Afterkugel (J. STURM), auch ablange Kugel, gedruckte Kugel (KEPLER); conoides eine kegelähnliche Figur, Afterkegel (J. STURM), hyperbolicum ein Arbishaufen, Bergkülbel (KEPLER), parabolicum Heuschober (KEPLER). Von den zahlreichen Körpern, die KEPLER in seiner Doliometria erwähnt, nennen wir schlieſslich folgende: malum Apfelrund, citrium Citronenrund, oliva Olivenrund, prunum Zwespenrund, fusum Spulenrund.

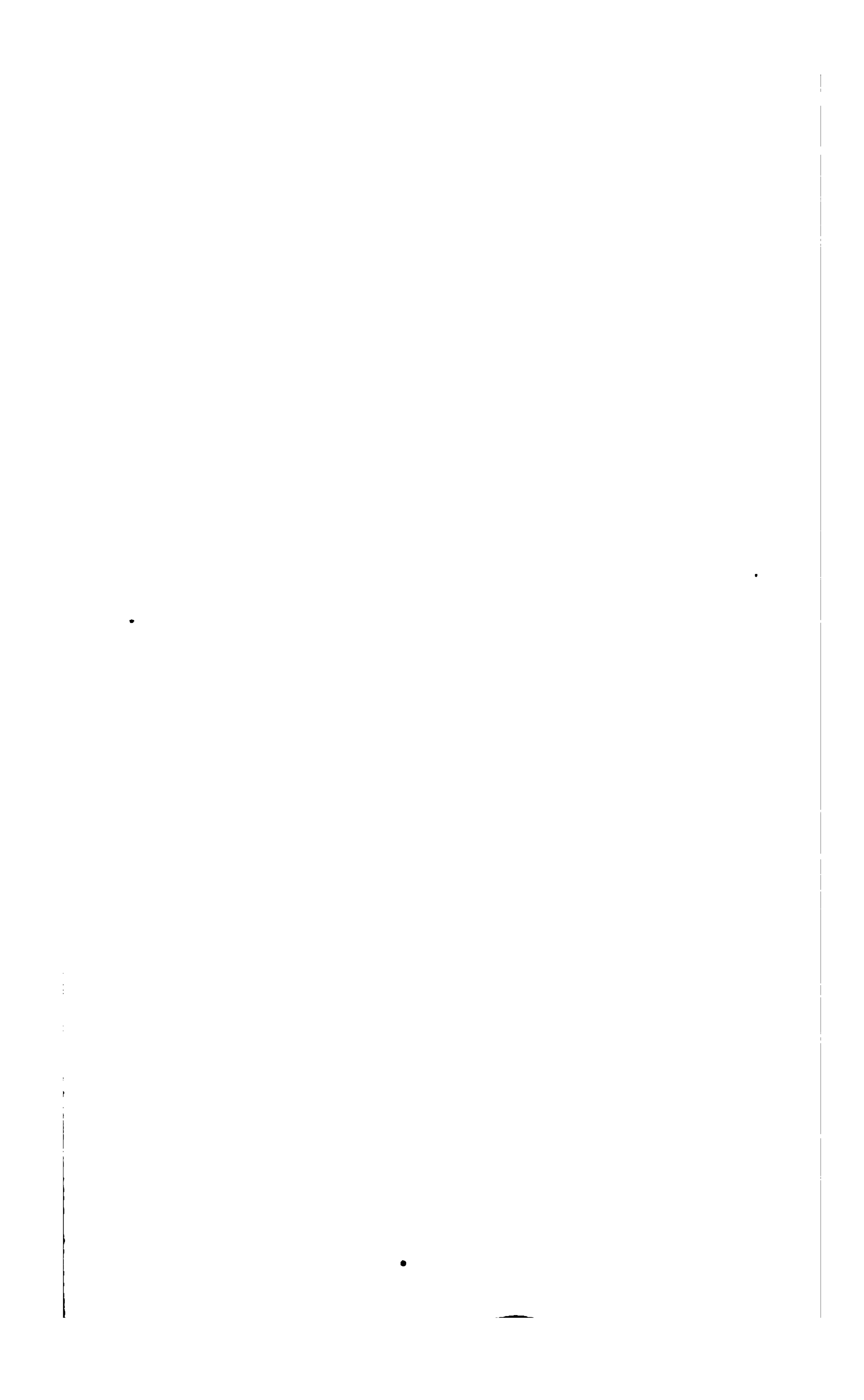
47) S. GÜNTHER, Math. Unterr. im Mittelalter, S. 185 Anm.



DIE RECHENMETHODEN AUF DEM GRIECHISCHEN ABAKUS.

VON

ALFRED NAGL
IN WIEN.



Es ist eine interessante und für manch anderen Zweig der Kulturgeschichte belehrende Thatsache, dafs die Methoden der einfachsten elementaren Rechnungen, die wir heute als einen Gegenstand des ersten Unterrichts zu betrachten gewohnt sind, das Bemühen von Jahrtausenden und unzähliger Geschlechter in Anspruch genommen haben. Wir begegnen auf diesem langen Wege hervorragenden Namen des geistigen Lebens, aber, was vielleicht noch mehr sagen will, die praktische Bedeutung der Sache, die der Wissenschaft wie dem gemeinen Leben stündlich sich aufdrängende Notwendigkeit, mit Zahlenaufgaben auf eine einfache sichere Art fertig zu werden, hat die stete Anteilnahme aller Kreise des Volkslebens zu dieser Aufgabe herangerufen.

Frühzeitig stellen sich sehr anerkennenswerte Fortschritte auf diesem Gebiete ein, aber es mangelt auch nicht an Rückschritten, und seltsamerweise haben wir einen solchen gerade bei dem Volke zu bemerken, dem die Menschheit ihre wichtigsten Kulturfortschritte verdankt.

Die Griechen haben das Rechnen auf dem Rechenbrette höchst wahrscheinlich von den Ägyptern überkommen. Herodot (2, 36), indem er von den Elementarkenntnissen der Ägypter berichtet und selbe mit denen der Griechen vergleicht, macht die Bemerkung, dafs beide Völker die Schrift und das Rechnen mit den Rechensteinen (*λογίζονται ψήφοισι*) in entgegengesetzter Richtung führen: die Griechen von der Linken zur Rechten, die Ägypter aber umgekehrt. Es ist allerdings die einzige Spur, die wir trotz der zahlreichen Schriftmonumente des bilder- und schreibseligen Kulturvolkes am Nil von diesem Gegenstande, der doch so manchen Anlafs zu bildlicher Darstellung giebt, dort bisher entdecken konnten. Er war mit seinem Apparate, dem mit einem Linienschema versehenen Brette (griechisch *ἄβαξ*, latein. *abacus*) und den zugehörigen Steinen, *ψῆφοι*, *calculi* auch [*calculi*] *abaculi* (Plinius h. n. 36, 199), eine ziemlich schwerfällige, unhandliche Einrichtung, die namentlich auch den grofsen Nachteil hatte, im Bedarfsfalle nicht immer zur Hand zu sein. Aber die Methode ihrer Numeration war ein vollständig und genau entwickeltes dekadisches Stellensystem, in welchem jede Stelle durch eine Kolumne, den Raum zwischen zwei Linien, dargestellt war und durch Einlage der entsprechenden Anzahl

jener zeichenlosen Steinchen funktionierte. Stellen, die keine Einheiten enthielten und im indisch-arabischen Systeme durch das Nullzeichen ausgedrückt werden, zeigten diese ihre Bedeutung auf dem Abakus einfach durch das Leerbleiben der betreffenden Kolumnen an. Die Anordnung der Zahlendarstellung war dabei der unsrigen, von der Einerstelle nach links aufsteigenden genau entsprechend.

Es scheint vielleicht ein einfacher, naheliegender Gedanke, dafs man das vorgezeichnete umständliche Linienschema des Rechenbrettes weggelassen und die leeren Stellen als solche durch eine kennbare Marke bezeichnet hätte, von welchem Standpunkte dann zur Verwendung von einfachen Zahlzeichen für die 9 Einheiten anstatt der zeichenlosen Steinchen, mit einem Worte zur schriftlichen dekadischen Numeration in heutiger Form ebenfalls nur noch ein kleiner Schritt gewesen wäre. Aber der Schritt unterblieb und der erklärliche Drang nach einer rein schriftlichen Methode führte auf den schon angedeuteten Abweg.

Die Griechen halfen sich nämlich — die ältesten Spuren reichen nicht vor das 3. Jahrhundert v. Chr. zurück und finden sich im Ägypten der Ptolemäer, — in der Weise, dafs sie ihrem Schriftalphabet, vermehrt durch die 3 alten Episemen auf 27 Zeichen, die Bedeutung von Zahlzeichen gaben, je 9 Zeichen für die Einer, Zehner und Hunderter, die dann mit Beisetzung von Strichelchen links in die nächst höheren Stellenkategorien der Tausender, Zehn- und Hunderttausender übersetzt werden konnten. Das Schema dieser Numeration war das folgende:

Α	Β	Γ	Δ	Є	⊂	Ζ	Η	Θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Wir finden diese Methode der Zahlendarstellung in allen mathematischen Schriften der Folgezeit, und nicht wenige derselben geben uns durch Beispiele auch ein ziemlich klares Bild davon, wie die Rechenmethode in derselben beschaffen war. Der allerdings unleugbare Vorteil der schriftlichen Rechnung erscheint dabei durch den Verlust des dekadischen Darstellungssystems mehr als aufgewogen und es trat an dessen Stelle nun eine mehr auf geschickte Handhabung im einzelnen Falle, als auf strenge und sichere Systematik gegründete Rechenweise, die kaum den Namen einer Methode verdiente. Im Multiplizieren wurden die einzelnen erhaltenen Teilprodukte nacheinander hingeschrieben wie ein gewöhnlicher Schrifttext, von dem sich

dann eine solche Rechnung überhaupt in der äufseren Erscheinung nur durch die Strichelchen unterschied, und es war Sache weiterer zweckmäfsiger Verwendung dieser Aufschreibung, daraus die Endsumme zu ermitteln. Besondere Schwierigkeiten bot die Bestimmung der dekadischen Potenz der Produkte aus den einzelnen Faktoren und noch höhere natürlich die Durchführung einer selbst einfachen Division. Selbst in dem von den griechischen Astronomen angenommenen Systeme der Sexagesimalbrüche, das, unseren Dezimalbrüchen im Prinzipe völlig gleichstehend, an sich zur Stellendarstellung hindrängte, fand die alphabetische Numeration statt. Doch kamen dabei die sexagesimalen Stellen durch die trennenden Zeichen: ⁰*μοῖραι*, *gradus* (Ganze), ′*τὰ πρῶτα*, *minutae primae* $\left(\frac{1}{60}\right)$, ″*τὰ δεύτερα*, *minutae secundae* $\left(\frac{1}{60^2} = \frac{1}{360}\right)$, ‴*τὰ τρίτα*, *minutae tertiae* $\left(\frac{1}{60^3} = \frac{1}{21600}\right)$ u. s. w. zu schönem graphischem Ausdrucke. Aber für uns haben die erhaltenen Operationsbeispiele in alphabetischen Zeichen[1]) den besonderen Wert, dafs sie uns ermöglichen, die Rechenmethoden auf dem Abakus mit ziemlicher Sicherheit zu bestimmen.

Mit der Einrichtung des griechischen Abakus werden wir bekannt gemacht durch verschiedene gelegentliche Bemerkungen in litterarischen Texten und durch einige erhaltene Monumente, hauptsächlich aber durch eine anfangs des Jahres 1846 auf der Insel Salamis bei Athen gefundene Marmortafel, daher gewöhnlich als die salaminische bezeichnet.[2]) Form und Ein-

---

1) *a.* Archimedes (*Ψαμμίτης* und *Κύκλου μέτρησις*) und Eutokios in Archimedis *Opera omnia cum commentariis* Eutocii *ed.* J. L. Heiberg. Lipsiae 1881. *b.* Theon; Θέωνος *'Αλεξανδρέως 'Υπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῆς Πτολεμαίου Μαθ. συντάξεως. Texte et trad. fr. par* Halma. Paris 1821. *c.* Heron; *Heronis Alexandrini Geometricorum et stereom. rel. ed.* Fried. Hultsch, Berol. 1864.

2) Die oftgenannte salaminische Tafel hatte während der Drucklegung dieser Schrift ihre Geschichte. Sie wurde auf mein Ersuchen zu Athen und auf Salamis gesucht, leider vergebens und mufs vorläufig als verschollen betrachtet werden. Die seinerzeit unmittelbar nach ihrer Entdeckung an Ort und Stelle angefertigte Zeichnung bei Rangabé in der Revue archéologique III (Paris 1846) p. 296 ist also dermalen als ihr einziges Überbleibsel hinzunehmen. (Vergl. ebenda p. 305 Letronne über die Zahlzeichen und p. 401 Vincent über die Tafel selbst.) Es ist daher eine genaue Nachbildung hievon hier vorangestellt. Zum Glücke hat Rangabé durch genaue Beschreibung und Mafsangaben das Monument wenigstens für das Studium in technischer Richtung gerettet. Er giebt an in Metermafs: Länge der Tafel 1·5, Breite 0·75, Abstand des Schemas der fünf Linien vom nahen Schmalrande 0·25, Länge seiner Linien 0·27, deren Abstand untereinander 0·03, Abstand des Schemas der elf Linien vom vorigen 0·5, Länge seiner Linien 0·38, deren Abstand unter einander 0·035, Höhe der Zahlzeichen an den beiden Längsseiten der Tafel 0·013, ihr gegenseitiger Abstand 0·04, Höhe der Zahlzeichen an der Schmalseite und der Kreuze in den elf Linien 0·02, ihr

richtung mögen aus der beifolgenden Bildtafel entnommen werden. Die abweichenden Meinungen über diese Tafel will ich noch am Schlusse würdigen und mich hier unmittelbar ihrer Funktion nach meinen Ergebnissen zuwenden.

Vor allem ist die Numeration auf dem Linienschema dieser Tafel völlig außer Zweifel und für uns unmittelbar anschaulich durch die ganz gleiche Einrichtung von noch allgemein im Gebrauch stehenden Rechenmaschinen: der chinesisch-japanischen Soru-Ban[3]) und des russischen Tschotü. Namentlich aber sind die erhaltenen antik-römischen Abakus-Exemplare, die in den seitlichen Spalten für die Teil- oder Bruchgrößen wesentlich dieselbe Einrichtung zeigen, wie die salaminische Tafel, ein erster und entscheidender Beweis für die eigentliche Bestimmung dieser Tafel. Wie auf dem römischen Abakus[4]) die seitlich rechts befindlichen Spalten durch die unmittelbar

Abstand 0·05 Meter. Die Erhaltung der Tafel war nach Rangabé eine vollkommene. (Eine Nachbildung derselben in Holz nach diesen Maßangaben hat sich mir für das Studium als sehr ersprießlich erwiesen.)

Diese Anmerkung bildet somit eine Art Nachtragsbericht. Damit ist aber zugleich die weitere Nachricht zu verbinden, daß das Suchen nach der Tafel Rangabé's zur Entdeckung einer anderen Tafel dieser Art, gleichfalls auf Salamis geführt hat (April 1899), welche, wie ich vernehme, in das Centralmuseum zu Athen überführt werden soll. Herr Professor Kubitschek (Wien), dem ich für diese Vermittlungen großen Dank schulde, hat mir von der neuen Entdeckung eine Photographie überlassen. Darnach ist diese Marmortafel der vorigen fast vollkommen gleich, sowohl an Größe, als in der Einrichtung. Nur erscheint ihre Ausführung weniger sorgfältig, die Zahlzeichen sind in allen drei Reihen von gleicher Höhe und, was hier sehr bedeutsam, die Zeichen der Reihe an der einen Schmalseite stehen aufrecht nach außen, gleich denen der beiden Langseiten. Dieser Umstand berührt ein wesentliches Moment der nachfolgenden Ausführungen. Ich muß mir vorbehalten, der neuen Entdeckung späterhin womöglich gerecht zu werden, übergebe aber dennoch diese Arbeit dem Urteile der wissenschaftlichen Welt in dem Gefühle, daß durch dieselbe nichtsdestoweniger die Einsicht in die Technik des Rechnens auf dem antiken Abakus gefördert werden dürfte. Indes hat die operative Verwendung dieser Zeichenreihe im Sinne meiner Darstellung auch nach ihrer Stellung auf der neu entdeckten Tafel keine Schwierigkeit und es mag vielleicht diese Richtung der Zeichen nach außen lediglich der Bequemlichkeit des Schrifthauers zuzuschreiben sein. Die Tafel ist der Breite nach in der Mitte entzwei gesprungen.

3) Vergl. darüber Alfred Westfal in den „Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Nationalökon. und Völkerkunde Ostasiens.“ Yokohama und Berlin (Januar) 1875, Heft 8 S. 27: Über die chinesisch-japanische Rechenmaschine; Heft 9 S. 43. Beitrag zur Geschichte der Mathematik in Japan; S. 54: Über das Wahrsagen auf der Rechenmaschine. — Vorzügliche, ihren Gegenstand erschöpfende Darstellungen.

4) Abbildungen, die wichtigste bei Marcus Welser, *Opera*, Nürnberg 1682,

dabeistehenden Bruchzeichen für $\frac{1}{6}$ (*sextula*), $\frac{1}{4}$ (*sicilicus*) und $\frac{1}{2}$ der Unze (*semuncia;* die Spalte der *uncia* jedoch ist rechts an das Schema der ganzen Gröfsen unmittelbar angeschlossen) bezeichnet sind, so zeigen auf dem salaminischen die an dessen Ränder verwiesenen Zahlzeichen in ihrer Reihenfolge von rechts nach links ganz deutlich an, dafs das kleinere Linienschema rechts (wir stehen an der Längsseite der Tafel mit der vollständigsten Zahlenreihe) mit seinen vier Kolumnen für die Teilgröfsen der Drachme bestimmt ist, nämlich der Reihe nach für die Aufnahme von $\frac{1}{48}$ (X Chalkus), $\frac{1}{24}$ (T, Tetartemorion), $\frac{1}{12}$ (C, Hemiobolion) und $\frac{1}{6}$ (I, Obolos) der Einheit, während die weiter folgenden Zahlzeichen sich auf die ganzen Zahlen (Drachmen) und auf die Kolumnen des grofsen Linienschemas beziehen, zunächst mit der Einheit (⊦, dem attischen Zeichen für die Drachme) und deren Fünffachem (Γ für *πέντε*), dann den Zehnern (Δ, *δέκα* und 𐅄 für 50), den Hundertern (H, *ἑκατόν* und 𐅅 für 500) und den Tausendern (X, *χίλιοι* und 𐅆 für 5000).[5]) Das letzte Zeichen links, T, bedeutet das Talent, 6000 Drachmen. Und so steht diese vollständigste der drei Zahlenreihen in genauer Übereinstimmung mit dem noch im Mittelalter wiederklingenden, schönen und für die Sache sehr anschaulichen Gleichnisse bei Polybius 5, 26: „Denn in Wahrheit sind diese (es handelt sich dort um einen am makedonischen Königshofe in Ungnade gefallenen Günstling) zu vergleichen den Rechensteinen auf dem Rechentische. Denn auch diese gelten je nach dem Willen des Rechnenden bald nur einen Chalkus und alsbald wieder ein Talent!“[6])

---

p. 422, 819, 842, in Naturgröfse. Erhaltene Monumente je eines zu Paris und Rom. Auch Welser's Abakus ist verschollen.

5) Diese nach einem Grammatiker des zweiten Jahrhunderts n. Chr. recht unzutreffend als herodianische benannten Zeichen, waren in Wirklichkeit die ursprünglichen Zahlzeichen der Griechen. Sie sind, wie sich zeigt, nichts anderes, als die Anfangsbuchstaben der betreffenden Zahlwörter. Ausgabe des Herodian von A. Lenz, Leipzig 1867. — Der knappe Raum dieser Abhandlung gestattet nicht, den Anteil verschiedener Gelehrter an der Aufklärung der Zeichen dieses Abakus hervorzuheben. Über die Teilung des att. Obols in 8, nicht 6 Chalkus vergl. Boeckh, Metrol. Unt. 24. 32. Archäol. Ztg. 1847, p. 44 (Ges. kl. Sch. VI, 454). Hultsch, Metrol. ss. gr. 157, Index vv. *ὀβολός*, *χαλκοῦς*, *τεταρτημόριον*.

6) *Ὄντως γάρ εἰσιν οὗτοι παραπλήσιοι ταῖς ἐπὶ τῶν ἀβακίων ψήφοις· Ἐκεῖναί τε γάρ, κατὰ τὴν τοῦ ψηφίζοντος βούλησιν ἄρτι χαλκοῦν, καὶ παραυτίκα τάλαντον δύνανται.* — Einen ähnlichen Ausspruch legt Diogenes Laërtius I, 60 dem Solon bei. Die für das Verständnis dieses Monumentes sehr wichtige Stelle des Polybius hat schon Rangabé bezogen, ohne jedoch auf ihre so bezeichnende Übereinstimmung mit der vollständigen Zahlenreihe auf der salaminischen Tafel aufmerksam zu werden.

Der einzelne Stein galt also, in eine Kolumne eingelegt[7]), eine Einheit derselben, handelte es sich nun um eine Bruchkolumne, oder um eine dekadische Stelle. Dabei ist, ganz genau wie bei der ostasiatischen Rechenmaschine und dem römischen Abakus, im grofsen Linienschema der Teil jeder Kolumne über der waagrechten Mittellinie für die Fünffachen bestimmt, ein Umstand, der auch durch die pentadischen Zeichen der drei Zahlenreihen deutlich markiert erscheint. Die Zahl 9 z. B. wird somit in jeder Stelle durch 4 Steine unterhalb und 1 Stein oberhalb dieser Querlinie dargestellt. Das Kreuz zwischen der zweiten und der dritten Kolumne scheidet die Zehner- von der Hunderterstelle[8]) und vor der Marke in der Mitte des Schemas wird die Stelle der Zehntausender erreicht, der Myriaden, welche in der griechischen Zahlendarstellung und Benennung eine bedeutsam abschliefsende Rolle spielen. So kann sich die Darstellung der Zahlen auf dem grofsen Linien- oder vielmehr Kolumnenschema genau angepafst der griechischen Numeration und mit guter Übersicht vollziehen. Dabei ist der beträchtliche Raum zwischen beiden Linienschemen vortrefflich für die Aufnahme eines entsprechenden Vorrates von Rechensteinen geeignet, um von da nach beiden Seiten hin für die Darstellung der Teilgröfsen und der ganzen Zahlen mit gleicher Bequemlichkeit verschoben zu werden. Die geschmackvolle, von echt attischem Feinsinn zeugende Einrichtung dieser Tafel ist überhaupt eine Eigenschaft, die sich sowohl an dieser, wie an manch anderer der noch zu besprechenden Einzelnheiten bewährt.

Wir denken uns also den Rechnenden an jener Längsseite der Tafel stehend, welche die vollkommenste der drei Zahlenreihen aufweist, ein Umstand, der im Zusammenhange seine Begründung finden wird. Der Rechner hat die Kolumnen der vier Teilgröfsen zu seiner Rechten und auf denjenigen der ganzen Zahlen vollzieht sich, entsprechend der Folge jener Zahlzeichen am unteren Rande der Tafel, die Numeration dekadisch aufsteigend von rechts nach links.

Wie bei allen Systemen des Rechenbrettes mit beweglichen Steinen, so besteht auch hier das Addieren lediglich in einem Zulegen, „Hinzugeben“ von Steinchen zu der in den Kolumnen liegenden Zahl mit nach-

---

7) Dafs hierbei die Kolumnen als solche und nicht die Linien fungierten, geht auf das bestimmteste schon aus der Übereinstimmung der Anzahl der Seitenkolumnen mit den vier Zahlzeichen der Teilgröfsen hervor.

8) Als Unterteilung der vierstelligen Numeration der Griechen; denn bekanntlich teilten dieselbe sprachlich und graphisch ihre Zahlen nicht wie wir nach drei Stellen z. B. 987.654,321, sondern nach vier: 9.8765 4321 und sagten: 9 Myriadenmal 8765 Myriaden etc. Vergl. Archimedes, Sandrechnung a. a. O., Appollonios bei Pappos, II passim.

folgender Ordnung der Numeration. Diese geschieht gelegentlich während der Rechnungsoperation und einfach in der Weise, daſs von den angesammelten Steinchen je fünf im unteren Teil einer Kolumne durch einen einzelnen im oberen (pentadischen) Teile derselben und je zwei Steinchen im pentadischen Teile durch eines im unteren Teile der nächst höheren Kolumne ersetzt werden. Wie sich dann durch die entsprechende Rückauflösung die Subtraktion, das „Wegnehmen" vollziehe, bedarf hier wohl keiner besonderen Darstellung,

Das Problem der Rechenmethode auf dem Abakus beginnt überhaupt stets bei der Multiplikation. Diese ist auch im Mittelalter, in der Gerbert'schen Schule und beim Rechnen auf den Linien, der nächste Zielpunkt der Lehrschriften, welche uns von beiden Methoden reichlich erhalten sind. Aber für den römischen, sowie für den uns hier interessierenden griechischen Abakus fehlt uns eine so unmittelbare Quelle und wir müssen dieselbe durch das schwierigere und weniger sichere Mittel der Kombination ersetzen.

Gewisse Einzelheiten der salaminischen Tafel geben hierbei wertvollen Anhalt. Der eigentliche Schlüssel für die Lösung besteht aber darin, daſs die Methoden der uns erhaltenen griechischen Schriftrechnungen deutlich ihren Ursprung auf dem Abakus verraten, insbesondere, weil ihre Unvollkommenheiten sich aus dem Wesen des Abakus naturgemäſs erklären und auf demselben sich geradezu in Vorzüge verwandeln. Es liegt übrigens schon in der Natur der Sache, daſs man die durch Jahrhunderte ausschlieſslich geübte Methode auf dem Abakus ohne weiters auf das schriftliche Rechnen wird übertragen haben, so weit sich dabei aus der Verschiedenheit beider Einrichtungen nicht ein allzugroſses Hindernis ergab.

Höchst unvollkommen und ungeschickt ist in der griechischen Schriftrechnung die unverwandt festgehaltene Methode, die Multiplikation mit den zwei höchsten Stellen zu beginnen; sie wird sodann mit jedem einzelnen Faktor des Multiplikators durch den ganzen Multiplikanden einschlieſslich der unveränderten Bruchzahlen fortgesetzt, wobei jedes einzelne Produkt der Reihe nach hingeschrieben wird.

Die Operation stöſst hier gleich bei Beginn an die charakteristische Schwierigkeit in der Bestimmung der dekadischen Potenz der einzelnen Produkte, der in der Positionsarithmetik sogenannten Stellenbestimmung. Das Einmaleins lehrt, daſs ϛʹ mal ϑʹ gleich νδʹ ist ($6 \times 9 = 54$). Warum aber ist ͵ϛ mal ϡ gleich φμʹ Myriaden ($6000 \times 900 = 5400000$)? Wir lösen heutzutage diese Aufgabe durch die Addition der Anzahl der den beiden Faktoren vorausgehenden Stellen, wenn nicht im einzelnen Falle schon der graphische Aufbau der Stellenrechnung uns jede Denkarbeit ab-

nimmt. Aber die griechische Schriftrechnung mufste sich da mit einer viel umständlicheren Vorstellung geholfen haben, insofern sie nicht immer auf die Stellenregel des Archimedes zurückging. Diese für die Schriftrechnung aufgestellte Regel ist aber ein Beweis, dafs ihre Methode dem Abakus entstammt, denn sie beruht durchaus auf der Zählung von dekadischen Stellen oder Kolumnen. Aber auch ihr Ausgangspunkt, die vorhergehende Feststellung der Faktoren-Einheiten ohne Rücksicht auf deren dekadische Stellung, für welche Einheiten die Griechen sogar einen technischen Ausdruck, *πυθμένες*, haben[9]), ist mit der Technik ihrer Schriftrechnung nur unvollkommen vereinbar.

Die Stellenregel des Archimedes findet sich in einer bekannten Stelle seiner Sandrechnung (*Ψαμμίτης*). Nachdem er gezeigt hat, wie durch die systematisch aufsteigenden Zahlenausdrücke selbst die gröfsten Mengen (der Sand der Erdoberfläche) zum Ausdruck gebracht werden können, fährt er fort: „Dienlich ist aber auch das zu wissen: wenn von Zahlen, welche zu der Monade (Einerstelle) in einer gewissen Proportion (*ἀναλογία*) stehen, etwelche von ihnen unter sich multipliziert werden sollen, die in derselben Proportion stehen, so wird auch das Produkt in der nämlichen Proportion (zu ihnen) stehen, indem es von dem gröfseren der beiden Multiplikatoren soweit absteht, als der kleinere derselben von der Monade in seiner Proportion absteht; von der Monade aber wird es um eine Stelle weniger weit abstehen, als die (Abstands-)Zahl beider Faktoren von der Monade zusammen beträgt.“[10]) Verständlich ist also diese Doppelregel kaum ohne die Hülfsmittel der Stellenarithmetik, und es läfst sich nicht verkennen, dafs der griechische Schriftrechner mit der ganzen Fassung dieser Regel auf die Vorstellung des Abakus zurückverwiesen war.[11]) Sie ergiebt nach ihren

---

9) Er findet sich in dieser Bedeutung bei Pappos, fragm. lib. II, Satz 27.

10) Text nach der Ausgabe von Heiberg 2, 270: *Χρήσιμον δέ ἐστι καὶ τόδε γιγνωσκόμενον. εἰ κα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζωντί τινες ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὁ γενόμενος ὁμοίως ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ἀπέχων ἀπὸ μὲν τοῦ μείζονος τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσους ὁ ἐλάττων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἀπέχει. ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλαττόνας, ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιαξάντες ἀλλάλους.* Über *ἀναλογία*, *proportio* im rein mathematischen Sinne, vergleiche die klassische Stelle bei Plato, *Timaeus* 7. Cicero, *Timaeus* 4. 5.

11) Die Unmöglichkeit, die Stellenbestimmung nach dieser Regel auch mit den graphischen Hülfsmitteln der griechischen Schriftrechnung zu bewerkstelligen, soll damit nicht behauptet sein. Man konnte die *ἀναλογίαι* und die „Abstände“ des Archimedes immerhin auch auf den dekadisch angeordneten Reihen der alphabetischen Zahlzeichen nach unserer oben gegebenen Darstellung bestimmen.

beiden Formulierungen, wenn wir die Stellenzahl der beiden Faktoren durch a und b ausdrücken, für die Stelle des Produktes (nämlich für die Einerstelle desselben) die Formel:

$$p = a + b - 1.$$

Treten wir nun mit dieser Operationsregel an den Abakus und zwar an die vorbezeichnete Stelle der Längsseite mit der längsten Zahlenreihe, so macht sich unverweilt ein weiterer hier wichtiger Umstand bemerkbar. Der Rechner hat dann die Zeichenreihe an der andern Längsseite umgekehrt vor sich, dieselbe kommt daher für ihn augenscheinlich aufser Betracht. Dagegen steht diejenige an seinem eigenen Standplatze aufrecht vor ihm und zwar in einer Lage, welche einem beständigen Im-Auge-behalten minder günstig ist. Wohl aber entspricht dieser letzteren Anforderung auf das beste die Zeichenreihe an der linken Schmalseite der Tafel und sie hat für diesen Zweck augenscheinlich dadurch noch eine besondere Eignung erhalten, dafs ihre Zeichen erheblich gröfser sind als diejenigen der beiden Längsseiten. Ohne Frage ist also diesen beiden Zeichenreihen nicht blofs eine explikative, die Bedeutung der Kolumnen anzeigende Bedeutung, sondern eine besondere Funktion in den Rechnungsoperationen selbst zugedacht, und welche diese Funktion sei, ist für den praktischen Kenner der Eigentümlichkeiten des Abakusrechnens unschwer zu erraten.

In allen Formen des Abakus tritt nämlich beim Multiplizieren das Bedürfnis nach dem Festhalten der beiden Faktoren auf. Der chinesisch-japanische hilft sich da durch eine starke Verlängerung seiner der antik-römischen sehr nahe kommenden Einrichtung, wobei dann mehrere Zahlen nebeneinander auf dem Abakus platzfinden, und durch eine sehr sinnreiche Technik des schrittweisen Verdrängens des Multiplikators. Aber der Abakus der Römer in den erhaltenen Stücken mit verschiebbaren Knöpfen[12]) verlangt, dafs man die Faktoren entweder mit geschriebenen Zahlzeichen oder, wenigstens einen derselben, mit den Fingern notiere. Das bedingte also ein Mitwirken der Schrift oder auch des Gedächtnisses beim Rechnen, wodurch dieses noch umständlicher wurde.

Die salaminische Tafel gestattet nun mit ihren Zahlenreihen ein Ansetzen der beiden Faktoren, und es ist ganz handgreiflich, dafs die untere Zeichenreihe beim Rechnenden für die Aufnahme des Multiplikators bestimmt war, diejenige an der linken Seite aber, mit ihren gröfseren,

---

12) Sie entsprechen genau den sog. Körnern des ostasiatischen. Übrigens benutzten die Römer gleich den Griechen auch eine Tafel mit freibeweglichen Rechensteinen, wie dies in der Natur der Sache liegt und aus zahlreichen literarischen Andeutungen hervorgeht.

stärker markierten Zeichen, für die des Multiplikanden, der während der Rechnung unverändert bleiben und beständig im Auge behalten werden mufs, während man sich vom Multiplikator die eben fungierende Stelle nur einmal anzusehen und dann zu merken pflegte. Aus der Technik der ganzen Methode gelangt man auch zu der Einsicht, dafs man als Multiplikanden auf dem Abakus in der Regel die an Stellen geringere Zahl fungieren liefs, was auch die salaminische Tafel selbst durch die kürzere Reihe der Zahlzeichen an der Schmalseite anzudeuten scheint.

Die Art und Weise der Markierung der Zahlen auf den beiden Zeichenreihen entbehrt allerdings jeder Überlieferung; es sind aber ihre genaueren Einzelnheiten auch gleichgiltig. Natürlich geschah sie ebenfalls durch Auflegen von Steinchen auf die Zeichen, ganz analog wie in den Kolumnen, also bis zu vier Steinchen auf den dekadischen und durch je ein Steinchen auf den pentadischen Zeichen. Dabei wird man, sobald die Funktion eines pentadischen Zeichens erforderlich geworden, dessen Steinchen mit denjenigen des dekadischen zusammengerückt haben, sodafs sich für jede dekadische Stelle eine deutlich geschiedene, das Anwenden der archimedischen Regel erleichternde Gruppe darstellte. Auch wird, um die Zeichen sichtbar zu erhalten, das Auflegen der Steinchen nicht auf den Zeichen, sondern über oder unter denselben gegen das Innere oder Äufsere der Tafel zu stattgefunden haben.

Bei der Wahl eines besondern Rechenbeispieles haben wir zu erwägen, dafs die Multiplikation von Teilgröfsen, wie sie die Seitenkolumnen und die Zeichenreihe der salaminischen Tafel darstellen, untereinander praktisch auch im gemeinen Leben allerdings vorkommen mufste, da das System der Gewichte bei den Griechen mit demjenigen der Geldteilung völlig übereinstimmte, ja das letztere wohl unmittelbar, wie das römische, aus dem Verkehre der Zuwägung des Geldmetalles entstanden war.[13])

Die Rechnung in gemeinen Brüchen, die wegen ihrer Anwendbarkeit auf alle Teilgröfsen neben den Stellenbrüchen (Sexagesimal- und Dezimalbrüchen) stets eine wichtige Funktion behalten wird, bildet den wunden Punkt des Abakus. Auf diesem kann gleichzeitig nur eine ganz beschränkte Zahl von Brüchen, für die die Kolumnen in vornhinein zu bestimmen sind, dargestellt und verwendet werden. Für den täglichen Verkehr genügt dies allerdings, allein genauere Rechnungen drängen hier zur

13) Vergl. Hultsch, Metrologie § 19. Die Drachme zu 6 Obolen (bez. der Stater zu 12 Obolen) fügt sich genau in das Zwölfersystem. Die Teilung des Obolus (= 2 Halb-, 4 Vierteloboleh und 8 Chalkus) beruht auf fortgesetzter Halbierung dieser kleinsten Mafseinheit.

Schrift. Die Teilgröfsen der griechischen Metrologie gestatten nur die Darstellung folgender Brüche und ihrer Vielfachen:

			I	C	T	X
$\frac{1}{2}$	dargestellt	durch	3	—	—	—
$\frac{1}{3}$	„	„	2	—	—	—
$\frac{1}{4}$	„	„	1	1	—	—
$\frac{1}{6}$	„	„	1	—	—	—
$\frac{1}{8}$	„	„	—	1	1	—
$\frac{1}{9}$	„	„	—	1	$\frac{2}{3}$	—
$\frac{1}{12}$	„	„	—	1	—	—
$\frac{1}{16}$	„	„	—	—	1	1
$\frac{1}{18}$	„	„	—	—	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{24}$	„	„	—	—	1	—
$\frac{1}{32}$	„	„	—	—	—	$1\frac{1}{2}$
$\frac{1}{36}$	„	„	—	—	—	$1\frac{1}{3}$
$\frac{1}{48}$	„	„	—	—	—	1

(Die aufserdem noch darstellbaren Brüche: $\frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$, dann $\frac{1}{6} + \frac{1}{48}$ und $\frac{1}{12} + \frac{1}{48}$ sind völlig unpraktisch.)

Die Darstellung dieser Brüche auf dem Abakus kann bei dem noch genau in dieses System fallenden Bruch $\frac{1}{32}$ für den halben Chalkus wohl durch ein einfaches Auskunftsmittel erfolgen, wie allenfalls Auflage eines Steines unterhalb der Chalkus-Kolumne. Dagegen fällt auf, dafs die so naheliegende Multiplikation des Obolus mit sich selber ($\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$) ohne ein solches Auskunftsmittel für den $\frac{1}{3}$-Chalkus (allenfalls Auflage eines Steines oberhalb der Kolumnen) auf dem Abakus nicht ausführbar ist. Dasselbe gilt für die Vielfachen dieser hier wichtigen Bruchgröfse: $\frac{1}{18}$ und $\frac{1}{9}$.

Die Multiplikation dieser Brüche mit ganzen Zahlen bietet an sich keine grofse Schwierigkeit. Von den dekadischen Einheiten ergiebt z. B. die Multiplikation von 10000 mit $\frac{1}{6}$: $1666\frac{4}{6}$, mit $\frac{1}{12}$: $833\frac{2}{6}$ u. s. w., was alles einfach darstellbar ist, aber entweder vorher im Kopfe ausgerechnet, oder von vornherein gemerkt werden mufs. Beides ist der praktischen Natur des Abakusrechnens, bei dem man mit dem Einmaleins zur Not sogar in der Einschränkung auf 1—5 seine Auslangen findet, durchaus zuwider. Die Mitbenutzung einer vorgerichteten Multiplikationstabelle ist daher für diese Einrichtung ein unabweisbares Bedürfnis. Die nachfolgende Aufstellung einer solchen Tabelle macht natürlich keinen Anspruch auf Identität mit einem antiken Formulare, wohl aber wird sich dem praktischen Rechner ihre Unentbehrlichkeit sofort klarstellen, sowie er bei den Bruchgröfsen an-

gelangt ist. Die Zahlendarstellung mit den altattischen Zahlzeichen entspricht darin genau den Mustern, die uns aus den attischen Urkunden bekannt sind.[14]) Die sich hierbei aufdrängende Wahrnehmung, daſs diese schriftliche Zahlendarstellung in genauer Übereinstimmung mit der mechanischen auf dem Abakus selber steht, ist für die Geschichte dieser Zahlzeichen zu wichtig, als daſs hier über diese Andeutung hinausgegangen werden könnte. Für die Benützung der Tabelle selbst ist nur zu bemerken, daſs ihre Produktansätze, da sie aus dekadischen Einheiten und Stammbrüchen entstanden sind, im einzelnen Anwendungsfalle mit den Pythmenen zu multiplizieren sind.

Die in den mathematischen Schriften der Griechen uns erhaltenen Multiplikationsbeispiele sind durchweg Quadrierungen von Zahlen, da sie insgesamt der Prüfung von Quadratwurzeln dienen. Nichtsdestoweniger glaube ich ein solches einem freiangenommenen vorziehen zu sollen. Ich wähle hier, als der Praxis der Geldrechnung auch in den Teilgröſsen entsprechend, ein Beispiel bei Eutokios aus denjenigen zum III. Theoreme der archimedischen Kreisrechnung[15]): $3013\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} \times 3013\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$. Es sieht in der Originalform[16]) mit beigefügter Darstellung nach moderner Rechenweise aus wie folgt:

͵γιγʹ L″ δ″		$3013\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$
ἐπὶ ͵γιγʹ L″ δ″	mit	$3013\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$
$\overset{\text{ϡ}}{M}\ \overset{\gamma}{M}$ ͵ϑʹ ͵αφʹ ψνʹ		9,000.000, 30.000, 9.000, 1500, 750
$\overset{\gamma}{M}$ ϱʹ λʹ εʹ βʹ L″		30.000, 100, 30, 5, $2\frac{1}{2}$
͵ϑʹ λʹ ϑʹ αʹ L″ L″ δ″		9000, 30, 9, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
͵αφʹ εʹ αʹ L″ δ″ η″		1500, 5, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$
ψνʹ βʹ L″ L″ δ″ η″ ιςʹ		750, $2\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$
ὁμοῦ $\overset{\text{ϡ}\eta}{M}$ ͵βχπϑʹ ις″	gleich	$9082689\frac{1}{16}$

14) A. Boeckh, Urk. über das Seewesen des attischen Staates (Staatshaushaltung d. A. III) und Corp. J. G. I p. 184 ss. Attic. I p. 48. II, II, p. 1 ss.

15) Edit. Heiberg 3, S. 290. Eutokios schrieb im 6. Jahrhundert n. Chr., allein seine Methode ist ganz unverändert die altgriechische Schriftrechnung. Die mathematischen Schriften der Griechen haben zahlreiche Beispiele in gemeinen Brüchen, bei denen auch in unserer modernen Schriftrechnung die dekadische Stellenmethode nur eine beschränkte Anwendung hat. Der Text bei Heiberg bedarf mancher Verbesserungen. S. 295 Note 1 Linie 2 v. o. muſs es heiſsen $1838\frac{9}{11}$, anstatt $\frac{9}{10}$.

16) Und mit Unterlassung jedes unhistorischen Versuches einer dekadischen Anordnung, wie er in den Ausgaben gemeinhin zutage tritt. Auch der Summenstrich ist quellenwidrig.

Multiplikationstabelle für die Teilgrößen der Drachme.

10000		M	
$\times \frac{1}{6} =$	$1666\frac{4}{6}$	I	Χ𐅅Η𐅄ΔΓ⊢IIII
$\frac{1}{12}$	$833\frac{2}{6}$	C	𐅅ΗΗΗΔΔΔ⊢⊢⊢II
$\frac{1}{24}$	$416\frac{4}{6}$	T	ΗΗΗΗΔΓ⊢IIII
$\frac{1}{48}$	$208\frac{2}{6}$	X	ΗΗΓ⊢⊢⊢II

1000		X	
$\times \frac{1}{6} =$	$166\frac{4}{6}$	I	Η𐅄ΔΓ⊢IIII
$\frac{1}{12}$	$83\frac{2}{6}$	C	𐅄ΔΔΔ⊢⊢⊢II
$\frac{1}{24}$	$41\frac{4}{6}$	T	ΔΔΔΔ⊢IIII
$\frac{1}{48}$	$20\frac{5}{6}$	X	ΔΔIIIII

100		H	
$\times \frac{1}{6} =$	$16\frac{4}{6}$	I	ΔΓ⊢IIII
$\frac{1}{12}$	$8\frac{2}{6}$	C	Γ⊢⊢⊢II
$\frac{1}{24}$	$4\frac{1}{6}$	T	⊢⊢⊢⊢I
$\frac{1}{48}$	$2\frac{1}{12}$	X	⊢⊢C

10		Δ	
$\times \frac{1}{6} =$	$1\frac{4}{6}$	I	⊢IIII
$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{6}$	C	IIIII
$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{6}\ \frac{1}{12}$	T	IIC
$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{6}\ \frac{1}{24}$	X	IT

1		⊢	
$\times \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{6}$	I	I
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	C	C
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	T	T
$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	X	X

$\frac{1}{6}$		I	
$\times \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{36}$	I	X $\frac{X}{2}$

$\frac{2}{6}$		II	
$\times \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{18}$	I	T $\frac{X}{3}$ $\frac{X}{3}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	C	X $\frac{X}{3}$

$\frac{3}{6}$		III	
$\times \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{12}$	I	C
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	C	T
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	T	X
$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{96}$	X	$\frac{X}{2}$

$\frac{3}{12}$		CCC	
$\times \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{24}$	I	T
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{48}$	C	X
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{96}$	T	$\frac{X}{2}$

$\frac{3}{24}$		TTT	
$\times \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{48}$	I	X
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{96}$	C	$\frac{X}{2}$

$\frac{3}{48}$		XXX	
$\times \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{96}$	I	$\frac{X}{2}$

Um der Praxis des täglichen Verkehres noch näher zu kommen, wollen wir aufserdem in dem einen Faktor die höchste Stelle 3000 weglassen, wodurch auch die erste Produktenreihe wegfällt. Das Ergebnis ist dann $(3013\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \times (13\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 41439\frac{1}{16}$, in altattischer Darstellung: ΜΜΜΜΧΗΗΗΗΔΔΔΓ⊢⊢⊢⊢ΤΧ.

Die Anstellung der Aufgabe zeigt zunächst sämtliche Kolumnen leer und den kleineren Faktor als Multiplikanden, somit die nachfolgende Form der beiden Zahlenreihen:

Χ ⊢ C I ⊢ Γ Δ Γ Η Γ Χ

Χ Γ Η Γ Δ Γ ⊢ I C Τ Χ

Die Multiplikation beginnt der Faktor 3000 der Reihe nach mit den Multiplikanden 10 Ganze, 3 Ganze, 3 Obolen und 3 Halbobolen, deren Produkte gleichzeitig in die Kolumnen eingelegt werden. Jeder Multiplikator wird nach Beendigung seiner Funktion vom Abakus (untere Reihe) entfernt. Bei Beendigung der Multiplikation steht daher die untere Zahlenreihe leer und das Gesamtprodukt liegt in den Kolumnen.

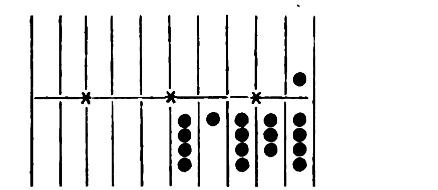
Es ergeben sich im vorliegenden Falle folgende Einzelprodukte:

Multiplikand 10 Ganze (Drachmen), 3 Ganze, 3 Obolen, 3 Halbobolen.

a) mit Faktor 3000 Ganze ergiebt	30 000 ⊢				
	9 000 „				
	1 500 „				
	750 „				
b) „ „ 10 „ „	100 „				
	30 „				
	5 „				
	2 „	3 I			
c) „ „ 3 „ „	30 „				
	9 „				
	1 „	3 „			
	— „	3 „	3 C		
d) „ „ 3 Obolen „	5 „				
	1 „	3 „			
	— „	1 „	1 „		
	— „	— „	1 „	1 T	
e) „ „ 3 Halbobolen „	2 „	3 „			
	— „	4 „	1 „		
	— „	— „	1 „	1 „	
	— „	— „	— „	1 „	1 Χ
Summa	41 435 ⊢	20 I	7 C	3 T	1 Χ
Summa nach Ordnung der Numeration	41 439 ⊢	— I	— C	1 T	1 Χ

oder $41\,439\frac{1}{16}$, wie oben.

Die Ausführung auf dem Abakus beginnt also mit der Multiplikation $3 \times 1 = 3$ und der Stellenbestimmung $4 + 2 - 1 = 5$, d. i. Einlage von 3 Psephen in den unteren Teil der fünften Kolumne.[17]) Folgt die Multiplikation des Faktors 3 mit 3, dann mit 3 Obolen[18]) und mit 3 Halbobolen und die Einlage der Produkte 9 in der vierten, 15 in der dritten und vierten, 75 in der zweiten und dritten Kolumne, unter gleichzeitiger Ordnung der Numeration. Es befinden sich jetzt an Rechensteinen: in Kolumne 5 unterer Teil 4 Stück, in Kolumne 4 unterer Teil 1 Stück, in Kolumne 3 unterer Teil 2 Stück, in Kolumne 2 oberer Teil 1 Stück, und Kolumne 1 ist noch leer, ebenso die Kolumnen der Teilgröfsen; Summe 41 250 u. s. w. Am Schlusse der ganzen Rechnung steht an der Seitenreihe nach wie vor der Ansatz 13 Ganze (Drachmen), 3 Obolen, 3 Halbobolen, die untere Reihe ist leer und das Linienschema bietet folgende Gestalt:



Mit der dargestellten Lage des Abakus am Schlufs der ganzen Multiplikation haben wir zugleich schon einen wichtigen Schritt in unserer letzten Aufgabe, der Feststellung der Divisionsmethode, gewonnen, nämlich die Anstellung der Aufgabe. Der Dividend lag in den Kolumnen, der Divisor war markiert an der linken Seitenreihe und die untere Reihe stand leer für die Aufnahme der Quotienten. Ganz unvermeidlich mufste ja der griechische Abacist nach Beendigung einer jeden Multiplikation darauf geraten, dafs sich die dargestellte Operation genau auf

---

17) Man wird praktisch mit der Stellenbestimmung beginnen, die Stelle zunächst durch Einlage eines Steines in die betreffende Kolumne ganz unten markieren und demselben dann nach Multiplikation der Pythmenen die Ergänzung auf das Produkt zulegen.

18) An dieser Stelle beginnt die Funktion der Multiplikationstabelle. Die beiden Pythmenen sind 3 und 3. Man wird nun in der Tabelle den Faktor X (1000) mit I ($\frac{1}{6}$) aufsuchen, von dem Produkte HΓΔΓ⊢IIII jede einzelne Zahl oder Zahlengruppe mit den beiden Pythmenen 3 und 3 multiplizieren und die Produkte in die betreffenden Kolumnen einlegen. Für die nächstfolgende Multiplikation 3000 mit 3 Halbobolen dient dann gleicherweise der unmittelbar folgende Ansatz der Tabelle.

demselben Wege auch wieder integrieren lasse. Und so kann über die Divisionsmethode der Griechen auf dem Abakus, wenigstens in ihrer Wesenheit, kein Zweifel übrig bleiben. Dabei ist immer zu merken, dafs die Wahl eines zu kleinen Quotienten, die in unserer Schriftrechnung als ein Fehler sich darstellt, auf dem Abakus den Gang der Operation wohl um je einen Schritt verlängert, ein Zulegen des ergänzenden Quotienten und ein wiederholtes Herausnehmen des Produktes aus dem in den Kolumnen angestellten Dividenden erfordert, sonst aber keinerlei Unzukömmlichkeit verursacht. Es handelt sich dann hierbei nur noch darum, die Numeration auf der unteren Zeichenreihe, wo jetzt die Quotienten entstehen, in analoger Weise zu ordnen, wie dies bei der Multiplikation in den Kolumnen geschehen mufste. Für die Stellenbestimmung der einzelnen Quotienten gilt die komplementäre Form der archimedischen Multiplikationsregel:

$$a = p - b + 1;$$

die um 1 erhöhte dekadische Stellenzahl des Dividendus (nämlich der Einerstelle desselben) weniger der Stellenzahl des Divisors bestimmt die dekadische Stellung des Quotienten. Wie sich dann die Subtraktion des Produktes aus dem in den Kolumnen stehenden Dividenden mit den hiezu nötigen Auflösungen vollziehe, bedarf hier ebenfalls keiner besonderen Erläuterung.

Von Darstellungen der Division habe ich in den griechischen Schriftrechnungen ein einziges Beispiel gefunden, in Theons Kommentar zur mathematischen Syntaxis des Ptolemäus, und zwar mit Sexagesimalbrüchen.[19] Wir können daher auf die Darstellung dieser Operation im Einzelnen hier nicht eingehen, sondern wollen daraus nur die wichtige Regel anmerken, welche Theon für die Division von Brüchen durch Brüche im Sexagesimalsystem hervorhebt, weil die Kenntnis einer analogen Regel auch für die Operation mit gemeinen Brüchen notwendig war, wenn nicht wieder die Multiplikationstabelle in Gebrauch genommen wurde. „Es geben“, sagt Theon a. a. O., „die *Minutae primae* $\left(\tau\grave{\alpha}\ \pi\varrho\tilde{\omega}\tau\alpha\ \acute{\varepsilon}\xi\eta\kappa o\nu\tau\acute{\alpha} = \frac{1}{60}\right)$ durch Ganze gemessen (*περὶ μὲν μοῖρας μεριζόμενα*) wieder *primae*; gemessen durch *primae* geben sie Ganze; die *secundae* $\left(\frac{1}{60^2} = \frac{1}{360}\right)$ geteilt durch Ganze geben *secundae*, durch *primae* geben sie *primae*, die *tertiae* $\left(\frac{1}{60^3}\right)$ geteilt durch

19) Das Beispiel findet sich im neunten Kapitel des Kommentars zum ersten Buche der Syntaxis. Ptolemaeus lebte um die Mitte des zweiten, Theon gegen Ende des vierten Jahrhunderts n. Chr., beide zu Alexandrien. Es liegt keine Andeutung vor, dafs sich die griechische Rechenweise in diesem Zeitraume irgendwie verändert habe.

primae geben *secundae* u. s. w.". Es ist die Divisionsregel, die wir in unseren Dezimalbrüchen wiederfinden können. THEON nimmt für das Beispiel der Division den Ansatz

$$1515^0\,20'\,15'' : 25^0\,12'\,10'' \left(1515 + \frac{20}{60} + \frac{15}{360} : 25 + \frac{12}{60} + \frac{10}{360}\right).$$

Er beginnt sogleich mit der Bestimmung des gröfsten Quotienten 60, und so können wir voraussetzen, dafs ein geübter Rechner auch auf dem Abakus, gleich uns, mit der Messung des Divisors in der höchsten Stelle des Dividendus begonnen und dabei für die Stellenbestimmung des Quotienten jener komplementären Form der archimedischen Regel sich bedient haben werde.[20]) DELAMBRE in seinem sehr lesenswerten Kapitel über die Arithmetik der Griechen[21]), für die er den Mangel einer didaktischen Darstellung der Rechnungsoperationen (Logistik) als auffallend bezeichnet, hebt hervor, dafs die Griechen gleich uns ihre Divisionen von links nach rechts ausgeführt haben; er meint aber, ihre Operationen seien umständlicher als die unsrigen gewesen und hätten seitliche Teiloperationen und Subdivisionen notwendig gemacht: *„les tâtonnements et les essais de quotients étaient plus fréquents et plus longs."* In Bezug auf die schriftliche Methode der Griechen sind diese Bemerkungen ohne Zweifel richtig. Für den Abakus treffen sie aber keineswegs zu, da auf diesem gerade die Division durch das natürliche Anwachsen von allenfalls zu klein gewählten Quotienten eine wesentliche Erleichterung und einen ruhigen Gang gewann. —

Die angeführten Stellen bei HERODOT und POLYBIUS, aber auch andere, wie bei ARISTOPHANES: „Zuerst nun überrechne dir's obenhin, nicht mit Rechensteinen, sondern blofs mit der Hand"[22]), zeigen deutlich, wie diese Einrichtung neben der Fingerrechnung vor dem Aufkommen der schriftlichen Methode die einzige und allgemeine Rechenweise der Griechen gewesen war. Insbesondere möchte ich aus dem ausschliefslichen Gebrauche der sog. Herodianischen Zahlzeichen in den von BOECKH[23]) herausgegebenen Urkunden, das Seewesen der Athener betreffend, den Schlufs ziehen, dafs

---

20) Es verdient angemerkt zu werden, dafs die archimedische Stellenregel und ihre Funktion im Mittelalter unter ähnlichen Verhältnissen wieder zum Vorschein kommt. Vergl. meine Schrift: „Das Quadripartitum des JOANNES DE MURIS und das praktische Rechnen im vierzehnten Jahrhundert." Abhandlungen zur Geschichte der Mathem. V, 135—146.

21) DELAMBRE, Histoire de l'Astronomie ancienne, vol. II (Paris 1817) chap. I p. 28, Resumé. Eine logistische Schrift wird erwähnt von EUTOKIOS a. a. O., nämlich die Logistika des MAGNOS.

22) Vespae, v. 656: *Καὶ πρῶτον μὲν λόγισαι φαύλως μὴ ψήφοις ἀλλ' ἀπὸ χειρός.*

23) Vgl. Anm. 14.

zu Athen bis tief in das dritte Jahrhundert v. Chr. der Abakus neben der Fingerrechnung die ausschliefsliche oder doch vornehmliche praktische Rechnungseinrichtung geblieben ist. In der That zeigt sich gerade die salaminische Tafel in ausgezeichneter Weise geeignet, die Funktion einer Rechentafel zu erfüllen.

Ich gehe nun an die Aufgabe, die abweichenden Meinungen über diese Tafel zu prüfen.

Eine Ansicht, dafs die Stellung des Operierenden am zeichenlosen Schmalrande gewesen sei[24]), konnte nur den mehrfachen, höchst unzulänglichen Zeichnungen der Tafel entsprungen sein. Die Probe auf die wirklichen Dimensionen ergiebt, dafs der Rechner von dort aus nicht einmal das mittlere Linienschema mehr mit Leichtigkeit erreicht, die Zahlenreihen der Längsseiten beide umgekehrt (!) vor sich gehabt und diejenige der anderen Schmalseite kaum mehr gesehen haben würde.

Eine andere Meinung geht dahin, dafs diese Tafel zugleich auch oder ausschliefslich als Spieltafel gedient habe. Man dachte sich offenbar an die zweite Längsseite, wegen der dort befindlichen Zahlzeichen, eine zweite Person, also zwei sich gegenüberstehende Spieler. Allein abgesehen davon, dafs die in jedem Anbetracht vollständige Übereinstimmung der salaminischen Tafel mit dem römischen Rechenabakus und insbesondere ihre geradezu vortreffliche Einrichtung für diesen Zweck keinen plausiblen Grund übrig lassen, bei derselben an eine andere Verwendung zu denken, so stöfst ihre Benutzung als Spieltafel auf starke Bedenken. Spiele, soweit sie Zahlen und deren Verhältnisse zum Gegenstand haben, bewegen sich aus naheliegenden Gründen ausschliefslich in ganzen Zahlen. Was sollten also hierbei die Kolumnen und Zeichen für die Teilzahlen? Die Brettspiele der Alten kennen wir übrigens ziemlich vollständig, es ist keins darunter, welches mit dieser Tafel sich irgendwie in Zusammenhang bringen liefse.

Den Anlafs zu dieser Meinung hat die Zahlenreihe an der zweiten Längsseite gegeben. Es ist allerdings nicht erweislich, wozu sie gedient habe. Die annehmbarste Deutung scheint mir ihre Bestimmung für sog. linkshändige Personen, da solche an der andern Seite allerdings nicht unwesentlich behindert gewesen wären. Am allerwenigsten ist die Ansicht

---

24) Friedlein in Zeitschr. f. Math. u. Phys. IX (1864) S. 297 und Zahlzeichen S. 74. Friedlein hatte das Mifsgeschick, von der salaminischen Tafel nur die in Zeichnung und Verhältnissen ganz falsche Darstellung in Gerhardt's Arch. Ztg. 1848, S. 42 zu kennen. Über die von ihm angezweifelte Transversallinie vergl. den an Ort und Stelle geschriebenen Brief Rangabé's a. a. O. 295: „*Une ligne transversale coupe ces onze lignes perpendiculairement et en deux parties égales.*“

annehmbar, dafs diese Tafel als Rechentafel und gelegentlich zugleich auch dem frivolen Zwecke des Spieles gedient habe, denn dazu ist der Gegensatz im Charakter beider Bestimmungen ein zu grofser.

Didaktische Schriften, welche das Rechnen auf dem Abakus zum Gegenstande hatten, sind uns aus dem Altertume nicht erhalten, ja es bestehen überhaupt nur sehr unsichere Anhaltspunkte, dafs solche Lehranweisungen existiert haben. Sie stofsen stets an die Unausführbarkeit ausreichender bildlicher Darstellungen. Diese Methode ist im besonderen dazu bestimmt, auf der Tafel selbst und durch unmittelbare Operationen gelehrt, gezeigt zu werden.

Die Griechen haben bekanntlich das Rechnen nicht der Arithmetik (Lehre von dem Wesen und den Eigenschaften der Zahlen), sondern der Geometrie als „Logistik" angegliedert. Auch dieser auffallende Umstand findet seine Erklärung im Abakus, in der mechanischen Einrichtung für das Rechnen, also in einem rein äufserlichen Umstande. Das Brett, welches für die darstellende Geometrie bestimmt war, diente zugleich der Logistik. Nur mufs da gegen die aus der steten Verbindung von Geometrie, Brett und Staub, dann den Rechnungsoperationen hervorgegangene Meinung, als ob gleich den geometrischen auch den logistischen Operationen die Staubfläche gedient hätte, Widerspruch erhoben werden. Eine einfache praktische Probe, wonicht das Nachdenken an sich, genügt, um zu erkennen, dafs ein Rechnen nach der Methode des Abakus auf einem in den Staub gezeichneten Kolumnenschema einfach widersinnig gewesen wäre. Das beständige Herumgreifen im Staube und die notwendige Folge hiervon, das Verwischen der Linien, machen jede weitere Ausführung hierüber entbehrlich. Es ist aber nicht abzusehen, warum die Griechen nicht gleich von vorneherein darauf verfallen sein sollten, die eine Seite des Brettes, mit vielleicht erhabenen Rändern, für die Aufnahme der Staubfläche zu den geometrischen Zeichnungen und Schriftbeweisen, die andere aber zur Aufnahme des Rechnungsabakus, hergestellt mit dauernden Farben, zu bestimmen.

Mit dieser Rechentafel haben also die Griechen in der That ein sehr rein und praktisch entwickeltes dekadisches Stellenrechnen verlassen, dessen Vorzüge durch die gröfsere Bequemlichkeit der griechischen Schriftrechnung nicht entfernt aufgewogen wurden. Übrigens haben sie damit in der Kulturgeschichte wenig Glück gehabt. Denn aufser der Sphäre ihres unmittelbaren Kultureinflusses — die Hebräer haben die griechische Methode der Alphabetzahlen angenommen, und die griechischen Alphabetzahlen finden sich auch in den Handschriften der gotischen Ulfilas-Bibel —, hat

kein Volk diese Methode angenommen, insbesondere nicht das römische oder irgend ein anderes Volk des Abendlandes im Mittelalter. Der Zweck jeder Rechenmethode, das Gedächtnis des Rechnenden zu entlasten, ihm durch graphische Hilfsmittel die geistige Vorstellung der Zahlenbewegungen nach Möglichkeit abzunehmen, wird durch die schriftliche Methode der Griechen in einer weit unvollkommeneren Weise erreicht, wie durch den Abakus. Es ist also nicht zu verwundern, dafs die Praxis des Abendlandes dem letzteren sich niemals abwandte.

Noch möge schliefslich bemerkt werden, dafs die salaminische Tafel keineswegs das einzige Monument des griechischen Abakus ist. Dazu gehört auch ein anfangs der 70er Jahre auf Naxos gefundenes sog. σήκωμα (Mefsvorrichtung)[25]), eine Steintafel mit Flüssigkeitsmafsen, welche am Schmalrande rechts die Zahlzeichen:

Χ 𐅆 Η 𐅅 Δ 𐅃 Ͱ Τ Ι C

hat (das Τ also hier ein Vielfaches des Obol, am wahrscheinlichsten ein Triobolion), augenscheinlich zu den Geldrechnungen bestimmt. Insbesondere aber kann hier nicht unerwähnt bleiben die Darstellung des rechnenden Tributeinnehmers auf der berühmten, in einem Grabe bei Canosa (Canusium, sw. von Barletta) gefundenen sog. Dariusvase.[26]) Derselbe hat den Abakus vor sich mit der Zeichenreihe an der rechten Seite. Die Darstellung ist nur rudimentär[27]), es fehlt das Linienschema, aber die Psephen sind darauf ersichtlich (Heydemann hält sie irrig für aufgezähltes Geld). Die Zeichen haben die böotische Form, ihre Reihe beginnt anstatt des Talentzeichens mit dem der Myriade, Μ, dem das böotische Tausenderzeichen folgt. Es fehlen die in der That überflüssigen pentadischen Zeichen und selbst das vorhandene 𐅃 ist nur irrig anstatt des böotischen

---

25) Siehe A. Dumont in Revue archéol. N. s. XXVI (1873), 43. In diese Klasse gehört wahrscheinlich auch das Fragment aus Thyrrheion in Akarnanien. Bull. de corr. hellén. X (1886), 179. — Siehe nun auch Anm. 2. Nach Dumont a. a. O. 45 soll die Tafel Rangabé's sich damals (1873) im Museum des „Thurms der Winde" zu Athen befunden haben.

26) Jetzt im Museum zu Neapel. Abbildung in *Monumenti ined. pubbl. dall' ist. di corr. arch.* IX (1869—1873) tav. LX. Vergl. H. Heydemann in den *Annali* dieses Institutes, XLV (1873), 20 und über die böotischen Zahlzeichen: F. Ascherson in Gerhardt's Arch. Ztg. 1857, Nr. 103 f. Heydemann, Die Vasensammlung des Mus. naz. zu Neapel n. 3253 und p. 571, Boeckh in C. J. G. I, p. 744[b], Franz, El. epig. gr. p. 348.

27) Ähnlich wie die Darstellung der Linienrechnung auf einem Kupferstiche bei Van Loon, Hedendaagsche Penningkunde S. 152.

Einerzeichens I eingestellt. Es folgen noch: O, das böotische Zeichen für den Obol, < für den Halbobol und T für das Tetartemorion, den Viertelobol. Das Zeichen des Chalkus fehlt. Diese Darstellung, welche so schön den Zweck der salaminischen Tafel zur äufseren Erscheinung bringt, möge hier als Schlufsvignette unseren Ausführungen nachfolgen.



DIE GESCHICHTE DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN UND DER NUTZEN IHRES STUDIUMS.

VON

FERD. ROSENBERGER

IN FRANKFURT AM MAIN.

Die Wissenschaften sind entwicklungsfähige Einzelwesen von personellem Charakter mit zeitlich ganz bestimmten Entwicklungsrichtungen, und fast mehr noch als bei menschlichen Personen hängt der momentane Charakter bei einer Wissenschaft von ihrer Vorentwicklung ab. Man sagt, dafs jeder tierische Organismus alle Perioden seines Werdens, ja selbst alle Entwicklungsstufen, durch welche seine Vorfahren hindurchgegangen, noch in deutlich erkennbaren Resten an sich trage. Sicherer aber noch als für tierische Individuen gilt dieser Satz für das Wesen und das Werden einer sich organisch entwickelnden Wissenschaft.

Trotzdem verkennt man vielfach, selbst in Kreisen, die sich mit gröfstem Eifer und gröfstem Erfolg um den Fortschritt der exakten Wissenschaften bemühen, den Wert der Geschichte dieser Wissenschaften und hält sich von geschichtlichen Studien fast geflissentlich fern. Gerade den erstaunlich schnellen Fortschritt der experimentellen Disziplinen benutzt man wohl auf dieser Seite, um das zurückschauende, scheinbar den Fortschritt nur verlangsamende geschichtliche Studium zur Zeit noch als unthunlich und selbst unmöglich oder doch als schädlich oder wenigstens als einen für diese Wissenschaften unnützen Luxus zu bezeichnen. Solchen Angriffen und Ansichten, die, allerdings mehr unausgesprochen, sich doch noch immer wirksam zeigen, mit einigen Sätzen gegenüber zu treten, hielt ich in dieser Festschrift für besonders am Platze.

Die Behauptung einer Unmöglichkeit der Geschichtschreibung für entwicklungsfähige Wissenschaften, die schon eine reiche Vergangenheit haben, klingt allerdings von vornherein paradox, erhält aber durch die Begrenzung auf bestimmte Wissenschaften und bestimmte Momente ihrer Entwicklung einen immerhin möglichen und begreiflichen Sinn. Man giebt nämlich bei jener Behauptung ganz gern zu, dafs sogenannte tote Wissenschaften, deren Entwicklung längst abgeschlossen ist, notwendig historisch begriffen werden müssen und nur so verstanden werden können, will aber die exakten Wissenschaften dann um so strenger von einer solchen Behandlung ausschliefsen, weil sie in ihrem schnellen Flusse derselben nicht standhielten; von einer Geschichte dieser Wissenschaften könne danach erst

in Stillstandsperioden der Entwicklung ernster die Rede sein, die aber in absehbarer Zeit kaum zu erwarten wären. Doch ist damit die Trennung zwischen den toten und lebendigen Wissenschaften entschieden zu streng gefaſst, denn in Wirklichkeit giebt es keinen so absoluten Unterschied zwischen denselben, daſs man die einen als durchaus historisch und die andern als nur modern bezeichnen könnte. Wäre eine Wissenschaft wirklich ganz entwicklungsunfähig geworden, so würde sie dadurch den Zusammenhang mit der menschlichen Erfahrung verloren und aufgehört haben als Wissenschaft zu existieren. Umgekehrt aber giebt es auch keine noch so lebendige Wissenschaft, die nur in der Gegenwart existierte und die nicht zu jeder Zeit einen gewissen Abschluſs erstrebte, der eine Grenze zwischen der in Bildung begriffenen Gegenwart und der vollendeten Vergangenheit setzte. Jede Zeitepoche ist bemüht, sich auf Grund der gewonnenen Erfahrungen eine geschlossene Weltanschauung zu bilden; und je mehr man von den Erfolgen der Gegenwart überzeugt ist, desto mehr wird man glauben, nur von diesen aus das bis jetzt Errungene verstehen zu können. Viele für den Fortschritt begeisterte Forscher behaupten allerdings, daſs es während der Epochen schnellster Entwicklung nicht an der Zeit sei Geschichte zu schreiben, und nehmen daraus Veranlassung ihre geschichtlichen Studien ad calendas graecas zu vertagen. Doch hat ihnen das thatsächliche Geschehen nie wirklich Recht gegeben, und meist sind in den Perioden schnellsten Fortschreitens einer Wissenschaft auch geschichtliche Darstellungen ihres Werdens zahlreich versucht worden. Dementsprechend hat gerade die physikalische Disziplin, welche in der Neuzeit sich am schnellsten entwickelte, die Elektrik, nicht die wenigsten, sondern vielmehr die meisten Schilderungen ihrer Entwicklungsgeschichte aufzuweisen, und diese Darstellungen sind nicht in Perioden verhältnismäſsigen Stillstands, sondern vielmehr in Zeiten schnellsten Fortschreitens, wie nach der Erfindung der Elektrisiermaschine und der Verstärkungsflasche, nach der Entdeckung des Galvanismus und endlich in der Gegenwart erschienen.

Dieselbe Schwierigkeit, welche man hier der Geschichtsschreibung entgegenhält, das ewig Veränderliche, die stete Weiterentwicklung ihres Gegenstandes, stellt sich übrigens auch den Darstellungen, der systematischen Wissenschaft selbst entgegen. In der That veralten in fruchtbaren wissenschaftlichen Epochen die Lehrbücher der systematischen Wissenschaften noch schneller als die geschichtlichen Darstellungen, und manche von diesen werden schon während des Zeitraums von ihrer Niederschrift bis zu ihrem Erscheinen im Buchhandel durch die Ereignisse überholt. Aber diese Thatsache hat doch niemals weder von der Ausarbeitung, noch von dem An-

kauf und dem Gebrauch solcher Bücher zurückgehalten, sondern hat vielmehr das Entstehen immer neuer Bücher nur befördert. Ist es aber zu jeder Zeit möglich die Wissenschaft trotz des nie endenden Fortschritts als ein systematisches Ganze darzustellen, so kann es auch zu keiner Zeit unmöglich sein, die Geschichte dieses Systems zu schreiben. Die exakten Wissenschaften sind allerdings bei der stetig wachsenden Erfahrung in immerwährender Umbildung begriffen, die von Niemand zum Stillstand gebracht werden kann; aber jeder einzelne Forscher hat doch das Recht und die Pflicht, für sich zu jeder Zeit innezuhalten, um in rückwärtsschauender Betrachtung die Entwicklung und damit das Wesen der Wissenschaft selbst zu übersehen und zu erforschen. Mag es sein, daſs das Bedürfnis hierzu in verschiedenen Zeiten nur mehr oder weniger intensiv und oft nur recht vereinzelt empfunden wird; der gänzliche Abweis aller historisch-kritischen Betrachtungen erscheint doch auch für die exakten Wissenschaften niemals wirklich objektiv begründet und nur das Resultat persönlicher, subjektiver Empfindungen zu sein.

Läſst sich auf diese Weise die Behauptung einer Unmöglichkeit der Geschichtsschreibung für keine Zeit aufrecht erhalten, so hält man auf manchen Seiten um so eifriger an der Charakterisierung der Geschichte als eines wenigstens zu gewissen Zeiten und für gewisse Stufen der wissenschaftlichen Ausbildung schädlichen Moments fest. In der That giebt es nicht wenige bedeutende Forscher und erfolgreiche Lehrer, welche, wenn auch nicht für den vollendeten Gelehrten, so doch für Schüler und noch nicht selbständige Mitarbeiter geschichtliche Betrachtungen als schädlich zurückweisen und in weiten Kreisen damit Beifall finden. Eine junge, schnelllebige Wissenschaft, macht man geltend, kann Zeitverluste schlecht vertragen, und bedarf der Arbeitskräfte aller ihrer Jünger, um bei der günstigen Gelegenheit durch die gemeinsame Anstrengung einen bedeutenden Schritt vorwärts zu thun und das Interesse nicht erkalten zu lassen. Ist durch fruchtbare Entdeckungen einmal die Möglichkeit schnellen Fortschreitens gegeben, so muſs der neue Kreis der dadurch bedingten Erfahrungen schnell durchlaufen werden, weil neue Ideen in ihrer ersten Jugend immer am kräftigsten wirken. Es hat auch, so sagt man nicht ganz der Wahrheit gemäſs, in Zeiten schnellsten wissenschaftlichen Fortschritts gar Niemand Lust, sich um alte Geschichten zu kümmern und seine Zeit mit dem Studium veralteter und wertloser Ansichten zu verlieren. Jede junge, kräftige Wissenschaft ist danach, wie überhaupt die Jugend, unhistorischen Sinnes, und es ist ein sicheres Zeichen des Alters, wenn eine Wissenschaft in historischen Erinnerungen zu schwärmen anfängt.

Indessen ist eine solche Übertragung der menschlichen Begriffe von

Jung und Alt auf eine sich ohne Ende fortentwickelnde Wissenschaft doch nie gerechtfertigt. Eine Wissenschaft ist, wie die Götter Griechenlands, immer alt und jung zu gleicher Zeit, je nachdem man sie in Bezug auf ihre Vergangenheit oder Zukunft betrachtet; immer hat die Wissenschaft, wie das Alter, eine große Vergangenheit hinter sich und, wie die Jugend, eine große Zukunft vor sich. Schon die griechischen Naturphilosophen sahen ihre Wissenschaft jedenfalls mit Recht für sehr alt an und Aristoteles z. B. zitiert in seinen Werken häufig die Meinungen der „Alten" über das vorliegende Thema. Wir aber halten heutzutage nach mehr als zweitausendjähriger Entwicklung noch dafür, daß die Naturwissenschaften in frischester Jugendblüte begriffen seien. Alle Wissenschaften müssen Janusköpfe tragen und können ohne die Fähigkeit des gleichzeitigen Rück- und Vorwärtsschauens nicht in richtiger normaler Weise sich entwickeln. Glücklicherweise sind auch demgemäß die Anlagen und Neigungen der wissenschaftlichen Arbeiter verschieden. Die Einen sind begierig und fähig dem Neuen nachzuforschen und dieses hervorzubringen, das sind die Pioniere der Wissenschaft; die Andern sind mehr beflissen und mehr geeignet, die innere Kultur der eroberten Gebiete zu fördern, das sind die Männer der Gesetze und der Geschichte. Beide müssen nach ihrer eigenen verschiedenen Art verschieden verwendet werden. Nicht Jeder kann, wie Cäsar, Feldherr und Geschichtsschreiber zu gleicher Zeit sein, aber beide sind sie für die Entwicklung der Menschheit nötig. Die systematische Durcharbeitung wie die historische Darstellung müssen sich zur Vollendung der Wissenschaft ergänzen, und schädlich könnte die geschichtliche Behandlung nur wirken, wenn dieselbe zu sehr die systematische Arbeit überwucherte, aber auch das wäre kein Fehler der Geschichte selbst, sondern nur eines Mißbrauchs, den man wohl in absehbarer Zeit nicht zu befürchten hat.

Wesentlicher und besser begründet erscheint ein andrer Versuch die Schädlichkeit der Geschichte der Wissenschaften für die Entwicklung ihrer Jünger aus dem Charakter der Geschichte abzuleiten. Den Urhebern solcher Versuche wird die Geschichte vor allem durch die kritische Natur verdächtig, die ihr wesentlich ist, sowie durch die vielfache Beschäftigung mit längst veralteten Ansichten und Theorien, oder gar offenbaren Irrtümern, die sie doch als oft hochwichtige Momente früherer Entwicklungsstufen nicht übersehen darf. Von dieser Seite aus erscheinen allerdings geschichtliche Betrachtungen als eine nicht unbedeutende Gefahr für die sichere Aneignung des positiven, materiellen Wissens, für das richtige Eingewöhnen in die Fundamentalanschauungen der Wissenschaft, für das feste Einprägen der gegenwärtig geltenden Theorien, oder kurz, als eine Gefahr für die Erweckung und Erhaltung der richtigen Überzeugung von der unumstöß-

lichen Autorität der Wissenschaft. Es ist auch richtig, daſs jeder Schüler zuerst die Wissenschaften autoritativ und dogmatisch aufnehmen, daſs er von sichern oder wenigstens für sicher gehaltenen Fundamenten aus geführt werden muſs, wenn er überhaupt Sicherheit und Klarheit in seinen Anschauungen erlangen soll. Jedenfalls darf der Schüler in der ersten Aufnahme des wissenschaftlichen Materials nicht dadurch gestört werden, daſs er die theoretischen Vorstellungen gleich von vornherein in allen den Lichtern sehen lernt, in denen sie jemals seit ihrer Entwicklung geschillert, und daſs ihm gleich von vornherein klar gemacht wird, wie viel und wie stark sich auch die exakten Wissenschaften im Laufe der Zeit geirrt haben. Aber einerseits besteht doch die Geschichte nicht bloſs aus Kritik und kann sich derselben, wo sie nicht angebracht erscheint, wohl enthalten; und andererseits darf auch die Begrenzung des Schülers auf eine bloſs dogmatische Aufnahme der theoretischen Wissenschaft nicht zu weit ausgedehnt werden, wenn der Schüler nicht zeitlebens nur Schüler bleiben und immer nur als Handwerksgeselle, nie als Meister arbeiten soll. Wie weit man mit einer solchen übertriebenen pädagogischen Beschränkung des Urteils kommt, wie schädlich ein solch übertriebenes Fernhalten von der Kritik der Entwicklung der Wissenschaften überhaupt werden kann, das zeigt nicht bloſs die Scholastik des Mittelalters, sondern auch die der nachfolgenden Perioden, die Neuzeit nicht ausgenommen. Die Geschichte der exakten Wissenschaften, vor allem die der Entdeckungen und Erfindungen, enthält eine Menge von Momenten, die rein erzählender Natur zur Kritik nicht herausfordern und nicht verführen und die darum auch im Anfange des Studiums keine kritische Unsicherheit verursachen, sondern nur anregend und antreibend wirken können. Von welcher Zeit an und wie weit daneben auch die historische Kritik Berücksichtigung finden soll, das hängt sowohl vom Lehrer wie vom Schüler ab und muſs zum guten Teile dem Takte des ersteren überlassen bleiben.

Gerade für die Einführung in die Wissenschaft bietet die geschichtliche Behandlung so viele Vorteile und erscheint so natürlich, daſs nicht wenige Lehrer eine rein historische Methode für den Anfangsunterricht empfohlen und mit gutem Erfolge angewandt haben. Trotzdem möchte ich dieselbe doch nicht in aller Strenge und voller Ausschlieſslichkeit gut heiſsen, denn die thatsächlich geschehene Entwicklung der Wissenschaften war doch niemals durch das Wesen der letzteren allein, sondern oft mehr noch durch andere äuſserliche Faktoren, wie die zur Zeit herrschenden religiösen, nationalen und politischen Zustände, die persönlichen Verhältnisse der Bearbeiter, die gleichzeitige Entwicklung verwandter Wissenschaften etc. bedingt. Die historische Entwicklung zeigt

darum keineswegs an allen Stellen den natürlichsten und kürzesten Zugang zu den Schätzen der Wissenschaft, sonst müfste man in den Gang des Unterrichts auch alle Winkelzüge der wissenschaftlichen Entwicklung, die Durchgänge durch Afterwissenschaften, wie Astrologie, Alchemie etc. aufnehmen, was zwar nicht unmöglich, vielleicht auch nicht schädlich, aber doch für die meisten Fälle zeitverschwendend wäre. Der Anfangsunterricht in den exakten Wissenschaften wird überhaupt nicht einem methodischen Prinzip nur in aller Strenge folgen dürfen, sondern wird, mehr eklektischer Natur, gemäfs den einzelnen Themata sich bald rein auf die Beschreibung beschränken, bald mehr der historischen Entwicklung folgen müssen, wobei man den letztern Weg noch immer als den natürlichsten und darum verständlichsten bevorzugen darf.

Die Behauptungen der Unmöglichkeit und Schädlichkeit können der Geschichtsschreibung der exakten Wissenschaften kaum gefährlich werden, weil das Bedürfnis der wissenschaftlichen Entwicklung doch über sie hinaustreibt. Bösartiger und nachteiliger dagegen ist die Bezeichnung der historischen Studien als eines für die Wissenschaften selbst wertlosen Luxus, weil sie eine bequeme scholastische Einseitigkeit der Forschung begünstigt, zu der so wie so schon mancherlei Neigung vorhanden ist. Diesem Vorwurfe müssen wir darum ausführlicher und positiver dadurch entgegnen, dafs wir die Notwendigkeit und den Wert historischer Forschungen für die Wissenschaften direkt nachzuweisen suchen.

Nehmen wir das Allgemeinste zuerst. Die Entwicklung der Wissenschaften bildet nur einen Teil der Entwicklung des Menschengeistes überhaupt, aber einen der wichtigsten. Wer die historische Entwicklung der Wissenschaften nicht kennt und versteht, der wird auch die Entwicklung des Menschengeschlechts überhaupt nie ganz richtig beurteilen können. Seit den ältesten Zeiten zwar hat man als das eigentliche Gebiet der Geschichte immer nur die politische Historie, die Geschichte der Staatenbildungen, der Staatsmänner, der Kriegshelden und der Kämpfe betrachtet und hat dabei das Studium der wissenschaftlichen Entwicklung für unnötig erachtet. Doch ist leicht einzusehen, dafs selbst die politische Geschichte ohne Berücksichtigung der wissenschaftlichen Entwicklung in vollständigster Weise nicht begriffen werden kann, dafs vielmehr zur Erklärung der politischen Geschehnisse ebenso wie politische Mächte auch wissenschaftliche Kräfte herangezogen werden müssen. Dafs in den ältesten Zeiten das letztere Moment kaum hervortrat, darf nicht Wunder nehmen, da die Wissenschaften damals ihren jetzigen allgemeinen Einflufs noch nicht erlangt hatten, sondern fast ausschliefslich die Sache einer kleinen

Anzahl von Aristokraten des Geistes geblieben waren. Wahrscheinlich aber war auch im Altertum schon jener Einflufs gröfser, als wir jetzt noch bemerken können. Wüfsten wir mehr und Gründlicheres über die Natur- und technischen Kenntnisse der Alten, vielleicht dürften wir auch für damals schon einen bedeutenderen Einflufs der Wissenschaften auf die Entwicklung der Kulturvölker konstatieren. In der frühesten Zeit waren wohl die treibenden Kräfte fast ausschliefslich religiöser, künstlerischer und sozialer Natur oder traten doch in solchen Formen auf. Je mehr aber die Wissenschaften wuchsen, je mehr sie vor allem nach der technischen Seite hin sich ausbildeten, desto stärker wurde umgekehrt ihre Rückwirkung auf religiöse, soziale und künstlerische Vorstellungen und damit auf den Fortschritt und das Leben der Menschheit überhaupt. Die politische und soziale Entwicklung Europas, des hauptsächlichsten Kulturträgers der modernen Welt, hängt heutzutage in der Hauptsache von seinen Zusammenhängen mit und seinen Gegensätzen zu den anderen Erdteilen ab. Diese Verbindungen und Gegensätze aber beruhen ihrer Stärke und ihrem Charakter nach fast ausschliefslich auf der Entwicklung der exakten Wissenschaften, ihrer Technik und den darauf gegründeten Industrien. Sagt man doch einzelnen Völkern in der Gegenwart geradezu nach, dafs sie friedliche Verbindungen wie kriegerische Verwicklungen nur nach dem Einflusse einschätzten, den dieselben auf ihre Industrie und ihren Handel ausüben könnten. Die zweckmäfsige Anpassung der Völker für den Kampf ums Dasein geschieht in unserer Zeit vor allem auf technischem und wissenschaftlichem Gebiete, und selbst die Kriegstüchtigkeit macht hiervon kaum eine Ausnahme. Darum ist das Verständnis der wissenschaftlichen Entwicklung selbst für die politische Geschichte eine notwendige Vorbedingung.

Also mufs der Universalhistoriker, so schliefst man von Seiten der exakten Wissenschaften nun gern weiter, auch die Geschichte der Wissenschaften mit grofser Sorgfalt studieren, das ist ebensosehr sein Recht wie seine Pflicht; die Männer der Einzelwissenschaften aber haben mit ihrer Geschichte direkt nichts zu thun und sind in dieser Beziehung zu nichts verpflichtet. Indessen bedeuten solche Aussprüche doch weiter nichts, als dafs man die Sache, deren Notwendigkeit man im Vordersatz schon zugegeben hat, im Nachsatz wieder für unmöglich erklärt. Die Geschichte einer Wissenschaft kann zweckentsprechend nur der schreiben, der diese Wissenschaft von den Fundamenten bis zur Spitze völlig studiert und begriffen hat. Welchen Grad von Genie aber müfste man danach von einem Geschichtsschreiber verlangen, der als Universalhistoriker zur richtigen Schil-

derung der Entwicklung der Menschheit die Entwickelungsgeschichte der Wissenschaften selbst originell und fundamental erforschen sollte? Es kann nichts Sichereres geben als den Satz, dafs die Geschichte der exakten Wissenschaften entweder von den Einzelforschern selbst oder gar nicht geschrieben wird. Erst wenn die Einzelwissenschaften selbst ihre eigene Entwicklung studiert und geschildert haben, kann auch der Universalhistoriker auf Grund solcher Studien eine angemessene Schilderung der menschlichen Entwicklung nach allen Richtungen hin versuchen.

Der thatsächliche Erfolg giebt davon deutlich Zeugnis. Mehr und mehr hat man in neuerer Zeit die Geschichte der geistigen Kultur in die allgemeine Geschichtswissenschaft aufgenommen. In den Werken über Weltgeschichte sowohl wie in den speziellen Völkergeschichten finden sich zwischen den einzelnen Teilen der politischen Geschichte weitere Abschnitte zur Schilderung des kulturellen Fortschritts an passenden Orten eingeschoben. Und nicht blofs in rein wissenschaftlichen Werken ist das der Fall, auch manche Schulbücher machen ernsthaft gemeinte Versuche über das gesamte geistige Leben der einzelnen Zeitepochen übersichtlich zu referieren. Leider kommen dabei überall die exakten Wissenschaften am schlechtesten weg. Sehr häufig merkt man, dafs diese Wissenschaften auf unsern höhern Schulen eine ganz isolierte, wenig beachtete und unzureichende Stellung einnehmen, und dafs sie vielen Besuchern dieser Anstalten immer fremdartige und kaum begriffene Erscheinungen geblieben sind. Die Abschnitte in den Lehrbüchern über die zeitweilige Entwicklung der exakten Wissenschaften sind gegenüber denen über die sogenannten Geisteswissenschaften, vor allem auch gegenüber denen über Kunst und Künstler, von unterscheidender Knappheit und enthalten vielfach weiter nichts als einige dürftige persönliche Notizen. Ja manchmal sieht es sogar so aus, als wären sie nur aus einzelnen Schul- und Studienerinnerungen, die schon Jahrzehnte zurückgreifen, zusammengesetzt. Die landläufigsten, längst veralteten Phrasen, unwahrscheinliche, fabelhafte Entdeckungsgeschichten und Glorifikationen populär gewesener, aber wissenschaftlich weniger bedeutender Männer bilden den Inhalt solcher Abschnitte, die oft auch keinen anderen Zweck als den der äufsern Dekoration haben.

Man darf aus diesen Thatsachen den Historikern keinen Vorwurf machen, wohl aber mit vollem Recht den Männern der Einzelwissenschaften, die der Geschichte ihrer Spezialdisziplinen selbst nicht das genügende Interesse entgegenbringen. Es ist die Pflicht eines jeden Menschen, der beansprucht auf der Höhe seiner Zeit zu stehen, sich bis zu einem gewissen Grade über die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand der Kultur zu unterrichten. Das wird aber weniger dadurch möglich

sein, dafs er alle Wissenschaften systematisch durchstudiert, da eben der systematische Zusammenhang eine zweckmäfsige Begrenzung schwer gestattet, als vielmehr dadurch, dafs er das historische Werden und Wachsen der Kultur in grofsen Zügen verfolgt. Dazu soll allerdings der Universalhistoriker durch die allgemeine Kulturgeschichte in erster Linie behilflich sein, aber eben diese Pflicht wird er, in Bezug auf die Erfahrungswissenschaften vor allem, nie genügend erfüllen können, wenn nicht die Einzelwissenschaften ihr Material historisch bis zu einem gewissen Grade selbst verarbeitet und ihre Geschichte schon geschrieben haben.

Es ist auch eine Pflicht der exakten Wissenschaften gegen sich selbst, die Bedeutung ihrer geschichtlichen Entwicklung für die Kultur möglichst weit verständlich darzulegen und dadurch das allgemeine Interesse wach zu erhalten. Die exakten Wissenschaften stehen der Allgemeinheit des schwierigen Zugangs und Verständnisses halber ungünstiger als andre Wissenschaften gegenüber. Das beeinflufst nicht blofs die Wertschätzung ihrer selbst, wie ihrer Bearbeiter, sondern übt zuletzt auch einen hemmenden Einflufs auf ihre Verbreitung und vielleicht auch auf ihr Wachstum aus. Die in manchen hochgebildeten Kreisen uns auch in der Gegenwart noch immer gegenübertretende geringe Bekanntschaft mit den exakten Wissenschaften könnte jedenfalls am ehesten durch eine passend geschriebene Geschichte der wissenschaftlichen Ideen und Prinzipien gebessert werden, die ein gutes, wenn nicht das beste Teil der Wissenschaften enthält. Einzelne erfolgreiche Versuche, wie z. B. die Geschichte der induktiven Wissenschaften von WHEWELL, sprechen stark dafür.

Besonders auffällig und folgenreich ist die geringe Beachtung, welche der Geschichte der exakten Wissenschaften im Unterricht auf niederen wie höheren Schulen zu teil wird, während doch gerade hier auf dieses im guten Sinne populäre und allgemeiner verbindende Element ein besonderer Nachdruck gelegt werden sollte. In der Methode, wie in dem ganzen systematisch-theoretischen Aufbau sind die empirischen von den philologischen Wissenschaften der Schule weit getrennt; in der Geschichte aber berühren sie sich vielfach in verschiedenen Zeiten, Völkern und einzelnen Persönlichkeiten, so dafs durch die Geschichte der Wissenschaften vielfache Verbindungen und sogar eine gewisse Einheit im Unterrichte der Schule hergestellt werden könnten, die sonst vollständig fehlen, und die doch eine ganz allgemeine nützliche Überleitung des Interesses von einer Gruppe der Wissenschaften auf die andere sehr erleichtern.

Wie schon angedeutet, kann man nicht behaupten, dafs die empirischen Wissenschaften in dieser Beziehung ihre Pflicht bis jetzt bereits voll erfüllt hätten. Von den wissenschaftlichen Akademien herab bis auf unsere

niederen Schulen zeigt sich eine Zwiespältigkeit der Bildung, die auf der einen Seite als philosophisch-historisch und auf der andern Seite als mathematisch-naturwissenschaftlich bezeichnet wird. Mag nun diese Zwiespältigkeit auch bis zu einem gewissen Grade in der Methode und noch mehr in der schulgemäfsen Entwicklung der Wissenschaften selbst begründet sein, so ist sie doch, einerseits durch das kolossale Anwachsen des Materials und andererseits durch den Wegfall des verbindenden Einflusses der Philosophie, die sich selbt nach jenen beiden Richtungen zweigeteilt hat, viel gröfser geworden, als für die Entwicklung unserer modernen Gesamtkultur wünschenswert und nützlich ist. Den gröfsten Schaden haben wohl dabei, wenigstens in Bezug auf den Schulunterricht, die empirischen Wissenschaften erlitten, denn sie sind am stärksten zur Seite gedrängt worden, aber sie sind dabei auch insofern nicht ohne Schuld geblieben, als sie die Erforschung ihrer eigenen historischen Entwicklung vernachlässigten und dadurch die alle Wissenschaften ursprünglich verbindenden Fäden in Vergessenheit geraten liefsen.

Alle andern haben mehr als die Naturwissenschaften für die Erkenntnis ihrer historischen Entwicklung gethan und haben dadurch ihre Bedeutung für die allgemeine Geistesbildung in steter Erinnerung erhalten. Für die philosophisch-historischen Wissenschaften ist das allerdings nicht weiter wunderbar, ja hier erscheint es oft nur natürlich, dafs der Unterricht sich mehr auf die historische Entwicklung konzentriert und der Vortrag der systematisch-theoretischen Wissenschaft dagegen zurücktritt, oder dafs der Unterricht, wie meist in der Philosphie, sich ganz in eine historische Kritik der vorhandenen Systeme auflöst. Aber charakteristischer Weise haben in neuerer Zeit auch die Künste, die doch ebenfalls an einen starken Fortschritt ihrer Entwicklung in der Gegenwart glauben, sich mit allgemeiner Zustimmung und vielem Erfolg auf das Studium ihrer Geschichte geworfen. Die meisten Kunstschulen, wie viele Universitäten und technischen Hochschulen, haben besondere Professuren für Kunstgeschichte errichtet und die Kunsthistoriker üben durch ihre Kritik auf die Entwicklung der modernen Kunst keinen geringen Einflufs aus. Selbst einige Mittelschulen, die höheren Töchterschulen wohl ausnahmslos, lassen Kunstgeschichte auf ihren Stundenplänen paradieren, und manche Mütter, die ohne Verlegenheit ihre gänzliche Unbekanntschaft mit dem Wesen und der Entwicklung physikalischer Instrumente und Maschinen, die sie täglich vor Augen haben, gestehen, würden es für eine Schande halten, wenn ihre Töchter nicht zu jeder Zeit mit einem kleinen Vortrag über eine beliebige längst ausgestorbene Malerschule brillieren könnten.

In den Kreisen der Naturwissenschaftler läfst man sich eine solche

Zurücksetzung wohl wenig kümmern, ja manchmal hat es gar den Anschein, als ob man in diesen Kreisen auf den Charakter der empirischen Wissenschaften als durchaus moderner Errungenschaften zu stolz sei, um nicht der eigenen langen Vergangenheit und ihrer mannigfachen Fehlschläge und Irrtümer sich einigermaſsen zu schämen. Man setzt sich darum wohl mit voller Absicht in einen Gegensatz zu den andern Wissenschaften, um das eigene ausnahmsweise schnelle Vorwärtsschreiten um so kräftiger zu markieren. Das aber hat eben auch seine Nachteile. Indem die exakten Wissenschaften sich selbst isolieren, rufen sie auch eine gegen sich gerichtete Ausschlieſsung hervor, durch welche die Allgemeinheit ihres Einflusses und ihrer richtigen Würdigung vermindert wird. Die exakten Wissenschaften haben sich thatsächlich durch die Macht, die sie im Leben der Völker wie des Einzelnen ausüben, eine einzige Stellung und ein unbegrenztes Ansehen in den weitesten Kreisen erworben, daſs aber ihre Kenntnis dem entsprechend auch in der ganzen gelehrten Welt verbreitet und ihre Wertschätzung eine ganz angemessene sei, kann man keineswegs mit voller Sicherheit behaupten. Jedenfalls trifft man auch in gelehrten Kreisen noch gar merkwürdig schiefe Ansichten über Naturvorgänge und ihr Wesen an, deren Beseitigung doch wohl bei einem besseren Anschluſs der exakten Wissenschaften an die historische Betrachtung unserer Erkenntnis eine beschleunigtere sein könnte.

Gehen wir nach dieser Besprechung der Auſsenstellung zur Würdigung des Einflusses über, den die Geschichte auf die exakten Wissenschaften selbst nach innen auszuüben vermag. Die Art die Geschichte der exakten Wissenschaften zu studieren und darzustellen kann eine mehrfach verschiedene sein, und je nach dieser Art ist ihre Aufnahme immer eine verschiedene gewesen. Dem Ursprunge interessanter wissenschaftlicher Entdeckungen und Aufsehen erregender Erfindungen ist man zu allen Zeiten nicht allein in den Kreisen der Fachleute, sondern unter den Gebildeten überhaupt mit groſsem Eifer nachgegangen, auch die Persönlichkeiten und Lebensumstände der Entdecker und Erfinder haben immer die weitesten Kreise in hohem Maſse interessiert. Aber diese Art des historischen Studiums hat meist einen zufälligen und etwas dilettantischen Anstrich gehabt, weil die Wahl der dabei behandelten Sachen und Personen immer weniger durch das Interesse an der wissenschaftlichen Entwicklung als vielmehr durch zufällige Modethemata und zeitweilig herrschende Sympathien für gewisse Personen und Theorien bestimmt war. Nicht immer die wichtigsten Momente wurden dabei aus dem Flusse der Entwicklung aufgenommen und epochemachende Faktoren blieben bei dieser Art von Geschichtsforschung oft ganz unbeachtet. Die einzelnen

Schilderungen, ohne Berücksichtigung des historischen Zusammenhangs bearbeitet, halten oft einer weitsichtigeren Kritik kaum Stand, und die sagenhaften Elemente, welche vielfach aufgenommen werden, entziehen sich von vornherein der Kontrole. Darum bedarf diese Einzelgeschichtschreibung, so freudig und dankbar ihre Mitarbeiterschaft auch zu begrüfsen ist, doch immer noch einer sorgfältigen Nachprüfung durch eine weiter ausholende, den Zusammenhang erfassende und den momentanen Charakter der Wissenschaft wohl berücksichtigende allgemeinere Geschichtsforschung.

Die Geschichte der Entdecker und Erfinder giebt der Zeit wie der Materie nach eng begrenzte Bilder. Zeitlich weiter greifend, aber materiell doch noch immer ziemlich beschränkt, ist auch die Geschichte der einzelnen wissenschaftlichen Theorien, die darum, obgleich unabhängiger als die vorige, doch immer noch der Gesamtgeschichte der betreffenden Wissenschaften zur kritischen Ergänzung bedarf. Auch die Geschichte der einzelnen Theorien ist schon immer fleifsiger studiert und häufiger als ein Bedürfnis empfunden worden. Der selbständige Forscher, welcher sich lange Zeit mit der Lösung einer Aufgabe intensiv beschäftigt, ist durch verschiedene Gründe auf das geschichtliche Studium derselben hingewiesen. Er mufs nachsehen, ob diese Aufgabe nicht früher schon einmal ganz oder für den damaligen Standpunkt genügend gelöst ist und ob er nicht mit einer eigenen Bearbeitung derselben nur Arbeit zweiter Hand liefern würde; oder ob nicht wenigstens die Aufgabe früher schon begonnen und angedeutet worden, so dafs seine Arbeit nur in der Vollendung und besseren Begründung der Lösung zu bestehen braucht; oder ob nicht im schlimmsten Falle die geplante Lösung bereits als irrtümlich oder gar unmöglich nachgewiesen ist. Durch solche Studien aber wird der Forscher von selbst wohl in den meisten Fällen so viel reines Interesse an der früheren Entwicklung der fraglichen Theorie gewinnen, dafs er nicht allein diese speziell, sondern auch die andern gleichzeitig entstandenen und gegenseitig sich beeinflussenden Theorien mit studiert und kritisiert. Viele der bedeutendsten Gelehrten haben durch die Veröffentlichungen solcher Studien nicht blofs der Wissenschaft Dienste geleistet, sondern auch das Verständnis und die allgemeine Würdigung ihrer eigenen Arbeit sehr erleichtert und beschleunigt.

Eine dahin zielende geschichtliche Einleitung sollte jeder Autor seiner Arbeit vorausschicken, und er sollte dabei nicht unterlassen, die Entwicklung und Entstehung seiner Arbeit gleich mit zu schildern, so sehr ihm vielleicht auch das Offenlegen der eigenen Gedankengänge, erfolgreicher, aber besonders auch erfolgloser, widerstehen mag. Niemand kann den Schaden, welchen eine Unterlassungssünde des Autors in dieser

Beziehung verursacht, der Wissenschaft gegenüber wieder völlig gut machen, und je bedeutender der Forscher war, desto unersetzlicher wird der Verlust sein. Auch von Freunden, Gesellschafts- und Zeitgenossen erfolgreicher Gelehrter mufs man ähnliche Dienste erwarten, denn sie vermögen noch aus eigener sicherster Beobachtung Aufschlüsse über die Entwicklung wissenschaftlicher Fortschritte zu geben, die später auf keine Weise mehr zu erlangen sind. Nur aus Berichten von Zeitgenossen kann der wissenschaftliche Grund und die Stimmung erkannt werden, aus denen die wissenschaftlichen Theorien und Systeme hervorwachsen und wissenschaftliche Entdeckungen und Erfindungen scheinbar plötzlich hervorgebrochen sind.

Indessen sind die Geschichten der einzelnen wissenschaftlichen Theorien noch immer, auch in ihrer Summe, noch nicht die Geschichte der Wissenschaft selbst. Die Arbeiten, welche die geschichtliche Entwicklung der zeitweilig geltenden oder auch noch zur Geltung zu bringenden Theorien behandeln, haben einerseits immer noch ein nur beschränktes Gesichtsfeld und nehmen andererseits, eben weil sie von den in der Gegenwart vorhandenen Theorien ausgehen, ihren Beurteilungsmafsstab nur aus der Gegenwart. Die Geschichte der Gesamtwissenschaft aber mufs nicht blofs die in Geltung gebliebenen, sondern auch die aufgegebenen Theorien mit in Betracht ziehen, um die Entwicklung richtig zu verstehen. Die geschichtlichen Darstellungen der einzelnen Entdeckungen und Theorien müssen als Grundlage ihrer Betrachtungen von der Gegenwart ausgehen, weil ihnen das allgemeine historische Fundament fehlt. Darin ähneln diese Darstellungen der systematisch-theoretischen Schilderung der Wissenschaft, die ebenfalls von der Gegenwart ausgehend, zwar Exkurse in die Vergangenheit nicht zu scheuen braucht, aber doch immer diese letztern aus der erstern zu erklären sich bemüht. Die Geschichte hingegen versucht die Weltanschauungen der Vergangenheit zu rekonstruieren und aus ihnen ein Verständnis der Gegenwart zu gewinnen. In diesem Gegensatze der geschichtlichen gegen die systematische Methode der Forschung scheint mir der Hauptwert der ersteren als einer notwendigen Ergänzung der letzteren zu liegen.

Die systematisch-theoretische Darstellung schliesst mit der Gegenwart ab und stellt die Wissenschaft als eine mit dieser vollendete Sache vor, die ihren Zusammenhang nur in sich selbst hat. Alle in der Vergangenheit liegenden Entwicklungsmomente können dabei aufser Betracht bleiben. Denn entweder haben sie sich als wahre, bleibende Errungenschaften erwiesen, dann sind sie in der systematischen Wissenschaft gegenwärtig noch vollkommen erhalten; oder sie beruhten nur auf seitdem erkannten Fehlern und Irrtümern, dann ist ihre Berücksichtigung für die

Gegenwart unnütz und vielleicht sogar schädlich. Auch weitere Ausblicke in die Zukunft, Ideen über eine mögliche Weiterentwicklung darf man von der systematischen Wissenschaft kaum erwarten, denn dazu ist einesteils eine richtige Beurteilung der Vergangenheit nötig und andernteils steht die Überzeugung von der Vollkommenheit der Gegenwart ihnen hindernd entgegen.

Es ist nur menschlich natürlich, dafs jede Gegenwart sich selbst eine gewisse Vollendung zuerkennt, die alle Vergangenheit übertrifft und einer ergänzenden Zukunft nicht bedarf. Forscher wie Lehrer der Wissenschaften sind mit wachsendem Erfolg ihrer Thätigkeit in immer wachsender Versuchung die gegenwärtige Wissenschaft als vollendet und unveränderlich zu behandeln und jedem Versuche einer Umgestaltung oder einer Ersetzung älterer geltender Theorien durch neuere eine Zeitlang wenigstens entgegenzutreten. Der originelle Forscher hat sich die Theorien gewählt oder selbst konstruiert, die seinen Erfahrungen am besten entsprechen; wie weit er davon zu Gunsten neuer, fremder Theorien abgehen will, das hängt, aufser von der Güte und Überzeugungskraft dieser Theorien selbst, auch noch von der Weite seines Blicks, seinem Egoismus und seiner Anlage zur Herrschaft ab. Meist wird er es doch als eine Art von Niederlage empfinden, wenn er neuen fremden Theorien den Vorzug vor eigenen oder doch von ihm anerkannten und benutzten zugestehen mufs.

Fast noch stärker aber als der originelle Forscher erscheint der Lehrer an das Dogma von der Vollkommenheit der gegenwärtigen Wissenschaft gebunden. Nehmen wir an, dafs der Lehrer neben seinem pädagogisch-methodischen Fortschreiten auch noch Zeit findet, dem Fortschreiten der zu lehrenden Wissenschaft selbst zu folgen, so fragt es sich immer noch, wie weit er diese Fortschritte auch seinen Schülern nahe bringen will. Für das Verständnis und das Interesse des Schülers ist in erster Linie ein einfaches, festes und klares System nötig, das durch keine Varianten verdunkelt und durch keine Ungewifsheiten unsicher wird; ohne die Einfachheit haftet dasselbe nicht im Kopfe des Schülers und Zweifel an der Sicherheit setzen die Lernbegierde meist auf ein Minimum herunter. Lernbegierde ist immer mit einem gewissen Enthusiasmus verbunden, der kritische Ausstellungen und Hinweise auf Schwächen und Unvollkommenheiten des Lehrgegenstandes nur schlecht verträgt. Auf allen Gebieten der Wissenschaften sind die verehrtesten und darum auch erfolgreichsten Lehrer immer die gewesen, die mit festester Überzeugung und gröfster Sicherheit, oder wenigstens mit dem Anschein solcher, ihre Lehren vortrugen. Nun kann der Lehrer, und er mufs es,

wenn er seine Pflicht ganz erfüllen will, für sich selbst an dem vorzutragenden Lehrstoff eingehendste und vollwichtigste Kritik üben und doch denselben seinen Schülern mit gröfster Sicherheit und ohne jeden Schein des Zweifels vorführen, immerhin wird die Gefahr sehr nahe liegen, die Sicherheit des Vortrages bei vielen Wiederholungen unwillkürlich auf das Vorgetragene selbst zu übertragen und das vielleicht um so mehr, je mehr Wert auf die methodische Vollkommenheit gelegt wird. Dabei mufs aber nicht blofs die Wissenschaft, sondern auch der Unterricht zuletzt selbst Schaden leiden.

Aller Unterricht in den Wissenschaften strebt nach zwei Idealen, der festen Einprägung von positivem Wissen und der Erziehung zu freier selbständiger Prüfung; das erste wird am besten durch einen scholastisch-dogmatischen Vortrag der systematischen Wissenschaft, das zweite durch eine historisch-kritische Behandlung der Entwicklung der Wissenschaften erreicht. Beide Methoden des Unterrichts gehören zusammen und ergänzen einander in notwendiger Weise, werden aber vielfach doch einseitig bevorzugt. Legt man den Hauptwert auf die praktische Verwendung der Wissenschaft, auf ein immer bereites, zur technischen Verwendung nutzbares Wissen und Können, so ist die dogmatische Lehrmethode ohne Frage vorzuziehen. Hat man aber die Wissenschaft als solche besonders im Auge, soll der Schüler auch selbst einmal ein Meister der Wissenschaft werden, so wird man der kritisch-historischen Methode den Vorzug geben. Aufsichtsbehörden und Praktiker, denen es vor allem auf eine leichte Übersichtlichkeit der Erfolge ankommt, begünstigen meist die erstere Lehrmethode. Lehrer aber, die ihre Schüler nicht blofs zu Nachahmern und Handwerkern, sondern auch für selbständige Arbeit vorbilden sollen, bedürfen eines feinen, schwer zu erwerbenden Taktes, um beide Methoden in richtiger Weise mit einander zu verbinden.

Jedenfalls ist das, was der Lehrer in dieser Richtung zu Ungunsten der letzteren Methode sündigen sollte, schwer wieder gut zu machen, und viele nicht besonders veranlagte Geister finden wohl nach einem rein dogmatischen Unterricht niemals den Weg zu einer eigenen angemessenen und tiefer gehenden Kritik. Jede theoretische Wissenschaft hebt mit Axiomen an, die nur nach gewissenhafter Prüfung ihres Sicherheitsgrades als wahr angenommen werden dürfen. Dem Schüler, der einer solchen Prüfung noch nicht fähig ist, mufs die Autorität des Lehrers dieselbe ersetzen, und diese Autorität wirkt oft mächtiger als eine eigene Überzeugung, weil bei der letzteren sowohl die Gründe für als wider erwogen, bei der ersteren aber alle widersprechenden Momente mit Absicht unterdrückt werden. Einen gewissen Dogmatismus kann auch der kritische

Forscher nicht entbehren, der nur darin keinen Schaden anrichten kann, weil er in seiner hypothetischen Natur erkannt ist. Absolut dem Fortschritt hinderlich aber ist jener scholastische Dogmatismus, der die Autorität der Schule als vollgültigen Grund seines Wissens anerkennt, ohne mit Bewufstsein die Stärke dieses Grundes untersucht zu haben, ja ohne nur ein Bedürfnis nach einer solchen Untersuchung zu fühlen.

Die böse Rolle, welche die Scholastik im Mittelalter gespielt hat, wird oft mit viel Entrüstung erwähnt, aber mancher, der sich in dieser Richtung gar nicht genug zu thun weifs, steckt selbst noch tief in einem Scholasticismus, der nur moderne Formen angenommen hat. Gerade da, wo man die Vergangenheit, von der man nichts zu lernen vermag, mit gröfster Verachtung behandelt, wo man der Gegenwart erst die Entdeckung der allein wahren wissenschaftlichen Methode und der daraus resultierenden vollendeten Wissenschaft zuschreibt, wo man für die Zukunft vielleicht noch einige Anfügungen und Fortbildungen, aber keine fundamentalen Umgestaltungen der Anschauungen mehr als möglich anerkennt, gerade da ist man unbewufst dem Scholasticismus am nächsten.

Der Scholasticismus bildet immer ein tragisches Moment in der Wissenschaft. Nicht blofs, dafs er die Entwicklung der Wissenschaft hemmt und zeitweise ganz zum Stillstand bringt, auch die einzelnen Forscher, besonders die genialen, werden von ihm oft auf lange Zeit gehindert oder ganz unterdrückt und um die ihnen gebührende Anerkennung und den notwendigen Einflufs gebracht. Aus der Scholastik vor allem entspringt jener geistige Hochmut, der ohne innere sachliche Gründe das Gute und Bessere nur darum verwirft, weil es nach der sanktionierten Schultheorie nicht zu begreifen ist, oder auch nur nicht nach der richtigen Methode gewonnen erscheint. Und dieser Scholasticismus wirkt um so nachteiliger, je bequemer er ist. Neue Theorien nach ihrem inneren Werte zu beurteilen, dazu gehört eine dem Autor selbst kongeniale Natur, und oft ist ein richtiger Entscheid erst nach längerer allgemeiner Prüfung möglich. Die Theorie dagegen auf ihre Übereinstimmung oder Nichtübereinstimmung mit den Lehren der Schule zu untersuchen, dazu ist nur eine genaue Kenntnis dieser letzteren oder auch nur ein gewisser Instinkt für das der Schule Angemessene erforderlich. Scholastisch angehauchte Gelehrte sind darum zu allen Zeiten die schnell-bereitesten und sichersten, aber auch die starrsinnigsten und erbarmungslosesten Kritiker gewesen.

Man mufs zugeben, dafs der Scholasticismus auch Nutzen bringen kann und bis zu einem gewissen Grade seine Berechtigung hat. Neue,

aufstrebende Theorien gleichen jungen Pflänzchen, deren Bewurzelung oft noch so zart ist, dafs wohl der kundige Gärtner ihr Leben sichern, dafs aber ein nur einigermafsen rauher Wind sie vielleicht in ihrem Wachstum zum Stillstand bringen oder auch gänzlich vernichten kann. Für solche Pflänzchen bildet wohl der Scholasticismus, wenn er sich ihrer annimmt, ein Schutzhaus, das sie so lange bewahrt, bis sie durch vielfache Pflege und Unterstützung erstarkt, auch einem scharfen Klima zu trotzen vermögen. Aus diesem Grunde haben kluge Forscher zu allen Zeiten und vielfach mit Erfolg versucht, ihre Entdeckungen und originellen Theorien dem Scholasticismus als vollkommen angemessene Produkte der geltenden Schule unterzuschieben, auch wenn dieselben nur äufserlich etwas nach den Schulformen zugestutzt und sonst wesentlich gegnerischer Natur waren. Leider ist der Scholasticismus immer mehr beflissen, gesunden Nachwuchs zu ersticken und längst Verrottetes zu bewahren, als Neues und Fruchtbares in eigene Pflege zu nehmen, weil er seiner ganzen Natur nach der Ruhe und Beharrung besonders zugeneigt ist, und es immer eines günstigen kräftigen Gegengewichts bedarf, um die schädlichen Wirkungen dieser Beharrungskraft aufzuheben.

Ein solches dem Scholasticismus entgegenwirkendes Prinzip ist die Geschichte, welche im Gegensatz zu dem Bilde des Stillstandes, das sich die Scholastik ausmalt, die Wissenschaften im steten Flusse, in nie zu vollendender Entwicklung zeigt. Dieser Gegensatz tritt auch überall deutlich hervor und wird auf den beiden Seiten fast instinktiv gefühlt. Wo der Scholasticismus herrscht, da ist die Geschichte verpönt oder darf doch nur in verkümmerter Form, als Entwicklungsgeschichte der Schulmeinungen, gelehrt werden. Umgekehrt, wo man die Geschichte der Wissenschaften allgemein und unbehindert studiert, da ist die Herrschaft einer veralteten Scholastik auf die Dauer nicht mehr zu halten. Man hat wohl öfter der Geschichte der Wissenschaften einen reaktionären Charakter zugeschrieben, in Wahrheit könnte man ihr ebenso gut revolutionäre Neigungen andichten, denn ihre Aufgabe ist die Schilderung des ewigen Übergangs vom Alten zum Neuen, des unendlichen Werdens.

In diesem negativen, antischolastischen Momente liegt ein Hauptwert der Geschichte, doch entbehrt sie auch eines direkten positiven Einflusses auf die Zukunft der Wissenschaft nicht. Die Entwicklung einer Wissenschaft gleicht einer krummen Linie oder gekrümmten Fläche, deren Gesetz oder mathematische Formel nicht bekannt ist, und die man darum auch nicht genau konstruieren kann. Je mehr man aber Punkte derselben, je genauer man eines ihrer Stücke kennen lernt, mit desto gröfserer Genauigkeit wird es auch möglich sein, ihre Fortsetzung nach

rückwärts und vorwärts zu erraten und die Richtung ihres Laufes bis auf einige Entfernung hin anzugeben. Wer die geschichtliche Entwicklung der Wissenschaft in einer gewissen Zeitperiode genau erkannt und verstanden hat, der mufs daraus mit ziemlicher Sicherheit auf die Tendenz der Entwicklung in der nächsten Vergangenheit und Zukunft zu schliefsen vermögen; der mufs ceteris paribus am besten in der Lage sein, die Aufgaben zu erkennen, welche die fortschreitende Wissenschaft der Forschung stellt und der wird auch am ehesten eine Idee über die Art der Lösungen zu fassen im Stande sein. Die systematische Wissenschaft giebt nur Punkte aus der Entwicklungslinie, die Geschichte versucht diese zur Linie selbst zu ergänzen. Die systematische Wissenschaft fafst die Wissenschaft in einzelnen zeitlichen Momenten, die Geschichte fügt die Richtung oder Tendenz des Fortschreitens hinzu. Die Gesamtwissenschaft aber kann nicht nur die einer einzelnen Zeit sein, sondern mufs alle Entwicklungsmomente in sich enthalten. Darum ist die Geschichte der Wissenschaften den letzteren nicht blofs interessant und nützlich, sondern neben den systematisch-theoretischen Bearbeitungen auch notwendig.

Dabei mufs freilich vorausgesetzt werden, dafs auch die Art Geschichte zu schreiben eine angemessene ist, und dafs wirklich die Entwicklung im allgemeinen erfafst wird, d. h. dafs der historische Zusammenhang richtig erkannt und alle Thatsachen, nicht blofs die einer gewissen Schulmeinung günstigen, in ihrer Bedeutung unparteiisch gewürdigt werden. Wir haben schon zugegeben, dafs die chronikenartige Berichterstattung, die biographischen Schilderungen, wie die juridisch-philologischen Prioritätsverhandlungen für die Geschichte der Wissenschaften förderlich und von unersetzlichem Nutzen sind; für den eigentlichen Fortschritt und das innere Verständnis aber haben sie geringeren Wert und die zuletzt besprochenen hohen Dienste können sie den Wissenschaften keineswegs leisten. Es ist jedenfalls interessant und belehrend, wenn in ausführlichen geschickt verfafsten Abhandlungen der erste Autor einer epochemachenden Erfindung oder Entdeckung unzweifelhaft festgestellt wird, für das Verständnis des Wesens der wissenschaftlichen Entwicklung aber würde in den meisten dieser Fälle eine richtige Schilderung des wissenschaftlichen Charakters der betreffenden Zeit und des betreffenden Ortes wichtiger sein als der Name des Erfinders, wenn nicht dessen Name etwa schon selbst ein ganzes wissenschaftliches Programm bedeutet.

Auch die scholastische Methode der Geschichtsschreibung, welche wohl den Zusammenhang der Entwicklungen zu kennzeichnen verspricht, aber doch nur die zur Zeit in der Schule geltenden Theorien berücksichtigt,

ıat für die Wissenschaft nicht den Nutzen, den sie haben könnte. Die cholastische Geschichtsschreibung erhebt zwar häufig den Anspruch die inzig richtige und sichere Art der Geschichtsschreibung zu sein, aber ihrem ganzen Charakter und ihren ausgesprochenen Zielen nach kann sie das nie verden, weil sie nur unvollständige und darum einseitige Anschauungen ermittelt und so die wahre, thatsächliche Entwicklung oft mehr verdunkelt ıls erleuchtet. Die scholastische Historie mag vielleicht direkt aus den Quellen schöpfen und kann dabei doch zu falschen Bildern kommen, weil ie nicht alle Quellen und selbst die in Betracht gezogenen nur einseitig benutzt. Sie will allerdings Entwicklung schildern, aber doch nur lie der gegenwärtig herrschenden Schultheorien, während sie alle andern Theorien, mögen sie auch zu ihrer Zeit den gröfsten Einflufs geübt haben, gänzlich zu vernachlässigen pflegt. Am allerwenigsten von allen kann man lie scholastischen Geschichtsschreiber als kompetent zur Beurteilung wissenschaftlicher Theorien anerkennen, denn gröfser noch als in der systematischtheoretischen Wissenschaft ist die Blindheit der Scholastik in der Geschichte. Dort, in der Gegenwart, drängen sich doch die feindlichen Systeme der Beachtung noch unabweisbar auf und lassen sich nicht ohne weiteres totschweigen; hier aber in der Vergangenheit reichen die ausgelebten Systeme gar nicht direkt an den Forscher heran und müssen erst zweckbewufst von lem sie verdeckenden Staub und Geröll befreit werden.

Die experimentellen Wissenschaften haben in den letzten Jahrhunderten eine solche Kraft des Fortschritts gezeigt, sie haben eine solche Menge grofsartiger Erfolge errungen, dafs man in der Neuzeit vielfach alle Kraft des wissenschaftlichen Fortschritts nur dem geschickten Experiment hat zuschreiben und die Wirksamkeit genialer Ideen ganz übersehen wollen. Diese Meinung hat sich dann nach gut scholastischer Art auch nicht selten dem Geschichtsschreiber der Wissenschaften mitgeteilt. Ideenreiche Geister, die zwar nicht selbst neue experimentelle Entdeckungen erzielten, die aber doch zu ihrer Zeit durch die Zusammenfassung der von andern erlangten Beobachtungsresultate zu theoretischen Systemen einen ungeheuren Einflufs auf die wissenschaftliche Entwicklung ausübten, hat man demgemäfs mit dem Fluche der Vergessenheit bedeckt und öfters ihre blofse Erwähnung in der Geschichte als ein Zeichen von unwissenschaftlichem Geiste angesehen. Ja selbst unzweifelhaft erfolgreiche Experimentatoren wurden wohl gern, wenn sie zur Erklärung der Erscheinungen weitergehende hypothetische Elemente aufzunehmen sich nicht enthalten konnten, einer geheimen Neigung zu phantastischen Abweichungen von der allein richtigen wissenschaftlichen Methode angeklagt und danach der Erwähnung in der echten Wissenschaft nicht mehr für

unzweifelhaft wert gehalten. Wer aber der Geschichte der Wissenschaften mit unparteiischer Aufmerksamkeit folgt, der mufs ohne Weigern zugeben, dafs z. B. ohne ein gründliches Studium des verlästerten Naturphilosophen DESCARTES, an dessen Gegnerschaft die neuzeitliche Physik sich entwickelte, auch diese selbst nicht richtig verstanden werden kann, und dafs sich die NEWTON'sche Physik, zu der die Physiker sich gegenwärtig noch zum gröfsten Teile bekennen, sich nicht richtig schildern läfst ohne eine gründliche Bekanntschaft mit dem DESCARTES'schen Weltsystem, das NEWTON ein halbes Jahrhundert lang bekämpfte. Wer durch geschichtliche Studien sich davon überzeugt, wie vollständig die kinetischen Theorien der Schwere und des Lichts durch so geniale Physiker und Mathematiker wie HOOKE, HUYGENS, EULER u. a. im 17. und 18. Jahrhundert schon entwickelt waren, wie vollständig sie dann aber durch die NEWTON'sche Physik aus dem Gesichtskreis und fast auch aus dem Gedächtnis der Physiker verdrängt schienen und wie sie doch im letzten Jahrhundert wenigstens teilweise wieder den unbestrittenen Sieg an ihre Fahnen heften konnten, der wird auch nicht so sicher, wie es manchmal scheint, darüber sein dürfen, dafs unter den vergangenen und vernichteten Hypothesen nicht doch noch einige sind, die später in neubearbeiteter und verbesserter Ausgabe wieder aufleben können.

Die scholastische Art, das Werden der Wissenschaft als eine Entwicklung zu schildern, die nur die gegenwärtige Wissenschaft zum Ziele gehabt und mit dieser ihr natürliches Ende erreicht hat, ruft leicht jene schädliche Selbstgenügsamkeit hervor, die an dem wissenschaftlichen Fortschritt nur zu bewundern weifs, wie herrlich weit wir es gerade in der Gegenwart gebracht, und die kaum ein Bedürfnis des Fortschreitens mehr empfindet.

Glücklicherweise aber trägt jede Art der Geschichtschreibung auch die scholastische, ein ihre Schäden korrigierendes Moment schon in sich. Indem die Geschichtsforschung das wissenschaftliche Werden zu ergründen versucht, ist sie gezwungen vor allem zu erforschen, welche Einflüsse die verwandten Wissenschaften, Disziplin und Theorien auf einander ausüben und findet so genügende Veranlassung alle treibenden Momente in der Entwicklung zu beobachten. In diesem leisen Zwange, den die Geschichtsforschung zu allen Zeiten ausübt und ausgeübt hat, scheint mir ihr Hauptwert für die Wissenschaft selbst zu liegen.

Diesen Satz und damit den Wert der Geschichtsforschung wird man aber wohl auch kaum ernstlich bestreiten, man wird vielleicht im Gegenteil den vorhergehenden Ausführungen den Vorwurf machen, dafs sie zu schwarz gemalt und den exakten Wissenschaften Unterlassungssünden zu-

geschrieben haben, die diese niemals begangen. Das wäre allerdings ein Vorwurf, der mir hier an dieser Stelle besonders schmerzlich sein würde. Denn der Mann, dem diese Abhandlung gewidmet ist, hat nicht bloſs selbst unter allgemeinem Beifall an einem Beispiel gezeigt, wie Geschichte der exakten Wissenschaften geschrieben werden soll, sondern auch allgemein als Mitredakteur der Zeitschrift für Mathematik und Physik die historische Erforschung der exakten Wissenschaften aufs Mächtigste gefördert. Unser Zeitalter bezeichnet sich allerdings wissenschaftlich gern als ein rein modernes, doch läſst sich schwer verkennen, daſs es trotzdem mit Erfolg bemüht ist, besonders nach methodischer Seite hin, seine historischen Anschauungen zu erweitern und zu vertiefen. Die historisch-kritischen Darstellungen der Entwicklung der exakten Wissenschaften und ihrer Teile, welche in letzter Zeit mehrfach erschienen sind, zeugen dafür in nicht miſszuverstehender Weise.

Doch betrifft dies bis jetzt nur mehr noch einzelne besondere Kreise und die Allgemeinheit verhält sich gegen die historisch-kritische Erforschung der exakten Wissenschaften immer noch zum gröſsten Teile interessenlos und ablehnend. Jedenfalls hat der Verfasser die im vorhergehenden bekämpften Angriffe nicht fingiert, sondern wirklichen Erfahrungen entnommen. Demgemäſs ist es dem Verfasser auch an keiner Stelle in den Sinn gekommen, unsere Meister über den ihnen jedenfalls wohlbekannten Wert der Geschichte belehren zu wollen, und seine Absicht war es nur diesen Wert der Allgemeinheit der Forschungsgenossen in deutlichster Weise vor Augen zu stellen und die fruchtbare Verwendung der Geschichte auch im Unterrichte der exakten Wissenschaften möglichst eindringlich zu empfehlen.

DIE UNVERZAGT'SCHEN LINIENKOORDINATEN.

EIN BEITRAG ZUR GESCHICHTE DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE

VON

FERDINAND RUDIO

IN ZÜRICH.

Wenn ich bei dem heutigen festlichen Anlasse auf eine Arbeit meines hochverehrten ehemaligen Lehrers Wilhelm Unverzagt zurückgreife, so ist das nicht ganz zufällig. War er es doch, dem ich die erste persönliche Bekanntschaft mit dem Manne verdanke, dem diese Blätter gewidmet sind.

Es war in Wiesbaden auf der Philologenversammlung des Jahres 1877. Unverzagt hatte in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion seine damals Aufsehen erregenden Thesen über die Ausdehnung des mathematischen Unterrichtes an den Realgymnasien aufgestellt und verteidigt und hatte durch die Wucht seiner Argumente, mehr aber wohl noch durch den eigentümlichen Zauber seiner zugleich imponierenden und gewinnenden Persönlichkeit selbst solche Fachgenossen zu überzeugen gewufst, die mit der ausgesprochenen Absicht, seine Thesen zu bekämpfen, in der Sitzung erschienen waren. An der Diskussion beteiligte sich auch Moritz Cantor. Mit grofser Wärme trat er für die Unverzagt'schen Thesen ein, die, wie er ausführte, geeignet seien, den höheren Realanstalten den Charakter „mathematischer Gymnasien" zu verleihen und ihnen so eine ebenbürtige Stellung gegenüber den humanistischen Gymnasien zu verschaffen.

Ich hatte, damals ein junger Student, ebenfalls an der Sitzung teilgenommen und konnte, von Unverzagt dazu aufgefordert, nachher aus eigener Erfahrung und mit gutem Gewissen Herrn Cantor und anderen bezeugen, dafs der Unverzagt'sche Unterrichtsplan niemals mit einer Überlastung der Schüler verbunden gewesen war.

Wenn ich bei dieser Erinnerung heute verweile, so geschieht es aus zwei Gründen. Zunächst ist die Arbeit, über die ich berichten will, aus dem Unverzagt'schen Unterrichte hervorgegangen. Sodann aber erinnere ich mich noch jetzt deutlich des Gefühles der Dankbarkeit, das ich dem mir bisher fremd gewesenen Manne gegenüber empfand, der sich so warm der Verteidigung meines Lehrers angenommen hatte. Ich darf dies heute als ein freundliches Omen betrachten, wenn ich auch freilich damals noch nicht ahnen konnte, zu wie grofsem Danke ich dereinst Moritz Cantor verpflichtet sein würde.

In neuerer Zeit ist wiederholt und mit Erfolg, namentlich in der angewandten Mathematik, von einem eigentümlichen Koordinatensysteme Gebrauch gemacht worden, das die gerade Linie in analoger Weise zu zwei Fundamentalpunkten in Beziehung bringt wie das kartesische System den Punkt zu zwei Fundamentalgeraden. Unter den hier in Betracht kommenden Arbeiten sind namentlich die des Herrn M. D'OCAGNE zu nennen. Es genügt an dieser Stelle, auf die Abhandlung des Herrn MEHMKE zu verweisen: „Beispiele graphischer Tafeln mit Bemerkungen über die Methode der fluchtrechten Punkte" (Ztschr. f. Math. u. Phys., Jahrg. 46). In dieser, die Litteratur sehr eingehend berücksichtigenden Abhandlung findet sich die Bemerkung, dafs das in Rede stehende Koordinatensystem schon zehn Jahre vor M. D'OCAGNE von Herrn K. SCHWERING (im Jahresberichte für 1874 des Westfälischen Provinzialvereins) eingeführt worden sei. Es ist aber thatsächlich älteren Ursprungs und systematisch schon von UNVERZAGT behandelt worden in der dem „Jahresbericht über das Kgl. Realgymnasium zu Wiesbaden von Ostern 1870 bis Ostern 1871" vorausgehenden Programmschrift: „Über ein einfaches Koordinatensystem der Geraden". Obwohl diese Abhandlung zum Teil in desselben Verfassers „Theorie der goniometrischen und der longimetrischen Quaternionen" (Wiesbaden, 1876) verarbeitet und auch von der Kritik nicht übersehen worden ist, scheint sie doch ganz in Vergessenheit geraten zu sein. Bei dem Interesse, das dem Gegenstande neuerdings entgegengebracht wird, dürfte es sich daher rechtfertigen, die Arbeit UNVERZAGT's wieder an das Tageslicht zu ziehen. Ich werde mich aber bei ihrer Wiedergabe im wesentlichen auf Definitionen und Resultate beschränken.

Das Koordinatensystem, um dessen Verwertung es sich hier handelt, war von UNVERZAGT in erster Linie zur Belebung seines Unterrichtes in der analytischen Geometrie ersonnen worden, wie er es überhaupt liebte, sich aufserhalb der ausgetretenen Geleise zu bewegen und seinen Schülern neue Wege zu zeigen. Das Prinzip der Dualität bot ihm Anlafs, für die gerade Linie, als Element, ein dem gewöhnlichen Koordinatensysteme dual gegenüberstehendes einzuführen. So verwandelten sich von selbst die beiden Koordinatenachsen mit ihrem Schnittpunkte in zwei Fundumentalpunkte mit ihrer Verbindungslinie. Den Winkeln des alten Systemes standen Strecken in dem neuen gegenüber. An die Stelle der Winkelfunktionen mufsten daher Streckenfunktionen, oder, wie sie UNVERZAGT nannte, *longimetrische Funktionen* treten. Diese werden folgendermafsen definiert. Teilt man eine Strecke $\mathfrak{ab}$, nach Festsetzung einer Längeneinheit (am einfachsten $\mathfrak{ab}$ selbst) und einer positiven Richtung, innerlich oder äufserlich durch einen Punkt $\mathfrak{c}$, so lassen sich aus den Strecken $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{cb}$, $\mathfrak{ab}$, die mit einander

durch die Gleichung $\mathfrak{ac} + \mathfrak{cb} = \mathfrak{ab}$ verbunden sind, sechs Quotienten bilden, nämlich:

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{ab}},\quad \frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{ab}},\quad \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{cb}},$$
$$\frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{ac}},\quad \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{cb}},\quad \frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{ac}}.$$

Diese werden nun *Sinus, Kosinus, Tangente, Kosekante, Sekante* und *Kotangente* der Strecke $\mathfrak{ac}$ in Bezug auf $\mathfrak{ab}$ genannt und kurz durch $\sin \mathfrak{c}$, $\cos \mathfrak{c}$, etc. bezeichnet. Zwischen den so definierten sechs longimetrischen Funktionen bestehen die sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin \mathfrak{c} + \cos \mathfrak{c} &= 1, & \sin \mathfrak{c} \,.\, \operatorname{cosec} \mathfrak{c} &= 1, \\ 1 + \operatorname{tg} \mathfrak{c} &= \sec \mathfrak{c}, & \cos \mathfrak{c} \,.\, \sec \mathfrak{c} &= 1, \\ 1 + \operatorname{ctg} \mathfrak{c} &= \operatorname{cosec} \mathfrak{c}, & \operatorname{tg} \mathfrak{c} \,.\, \operatorname{ctg} \mathfrak{c} &= 1, \end{aligned}$$

die es gestatten, jede longimetrische Funktion durch jede andere auszudrücken. Auch Additionstheoreme, die denen der goniometrischen Funktionen analog sind, lassen sich leicht aufstellen, wie z. B.

$$\sin(\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) = \sin \mathfrak{c} \,.\, \cos \mathfrak{b} - \operatorname{coc} \mathfrak{c} \,.\, \sin \mathfrak{b} \quad \text{u. a.}$$

Im übrigen erscheinen die longimetrischen wie die goniometrischen Funktionen als spezielle Fälle der allgemeinen Winkelfunktionen, d. h. der aus dem schiefwinkligen Dreiecke abgeleiteten Funktionen Sinus, Kosinus etc. In der That erhält man aus der diesem Dreiecke entnommenen allgemeinen Gleichung

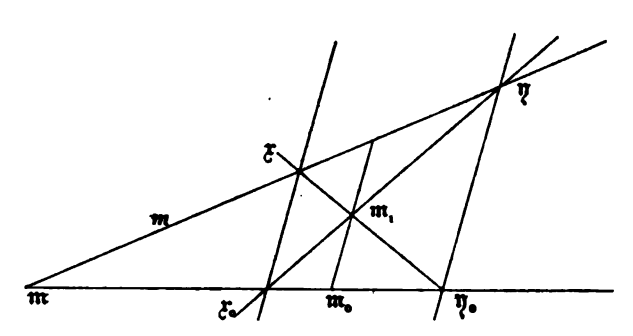
$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi \,.\, k = 1,$$

wo k den Kosinus in der herkömmlichen Bedeutung des Wortes bedeutet, für $k = 0$ die Grundgleichung $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ der goniometrischen und und für $k = 1$ die Grundgleichung $\sin \varphi + \cos \varphi = 1$ der longimetrischen Funktionen.

Nach diesen Vorbereitungen führt nun Unverzagt sein Koordinatensystem mit folgenden Worten ein: „Zieht man durch zwei feste Punkte $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0$, deren Abstand e heifse, zwei parallele Geraden, die wir die Achsen nennen wollen, während die durch $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0$ bestimmte Gerade den Namen Grund- oder Mittellinie des Koordinatensystems führen möge, so ist jede Gerade m in der Ebene der Achsen ihrer Lage nach bestimmt durch die auf den Achsen bestimmten Schnittpunkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Da diese Punkte selbst durch ihre Abstände von $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0$ festgelegt sind, so werden wir diese mit x und y bezeichneten Strecken die Koordinaten der Geraden m nennen. Zugleich möge auf der Geraden $\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0$ die Richtung von $\mathfrak{x}_0$ nach $\mathfrak{y}_0$ als die positive gelten und die Koordinaten selbst mit dem positiven oder negativen

Zeichen in Rechnung gebracht werden, je nachdem sie Stücke auf der einen oder der anderen Seite von $\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0$ angeben."

Aus diesen Definitionen erhält man sofort eine Reihe von Folgerungen. So ergiebt sich beispielsweise die Lage des Schnittpunktes $\mathfrak{n}$ der Geraden (x, y) mit der Mittellinie aus der Gleichung



$$\operatorname{tg} \mathfrak{m} = -\frac{x}{y},$$

die auch für den Fall unendlich großer Koordinaten ihre Gültigkeit behält. Sind zwei Geraden (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gegeben, so erhält man für den (in der Richtung der Achsen gemessenen) Abstand d ihres Schnittpunktes von der Mittellinie die Formel

$$d = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)},$$

während der Ausdruck

$$-\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

die Tangente dieses Schnittpunktes in Bezug auf den (in der Richtung der Mittellinie gemessenen) Abstand der beiden Achsen darstellt. Wenn die Achsen auf der Mittellinie senkrecht stehen, so ist die goniometrische Tangente des Winkels φ der beiden Geraden

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)}{e^2 - (x_1 - y_1)(x_2 - y_2)} \cdot e,$$

woraus sich ergiebt, daſs für $x_2 - x_1 = y_2 - y_1$ die beiden Geraden einander parallel sind und für $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) = -e^2$ auf einander senkrecht stehen.

Auch für den Flächeninhalt eines durch drei Geraden (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) bestimmten Dreiecks erhält man einfache Formeln, die sich dann in bekannter Weise sofort auf Polygone von n Seiten ausdehnen lassen. Unter der Voraussetzung, daſs die Achsen senkrecht zur Mittellinie sind, findet man für den Polygoninhalt J die Formel:

$$2J = \sum \frac{(x_k - x_{k+1})^2}{x_k - x_{k+1} + y_{k+1} - y_k} \cdot e.$$

UNVERZAGT führt sodann auch ein den *Polarkoordinaten* des Punktes entsprechendes Koordinatensystem der Geraden ein: „Zieht man durch die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, wo die Gerade m die Achsen trifft, Geraden nach beziehungsweise $\mathfrak{y}_0$ und $\mathfrak{x}_0$, so schneiden dieselben einander im Allgemeinen in einem Punkte $\mathfrak{m}_1$, durch dessen Angabe umgekehrt auch die Gerade m bestimmt ist. Legen wir nun diesen Punkt in Bezug auf unser Koordinatensystem dadurch fest, dafs wir seinen Abstand u von $\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0$ angeben (diesen Abstand parallel zu den Achsen genommen) und ferner das Verhältnis, in welchem $\mathfrak{m}_1$ den Abstand der Achsen teilt, so ist es leicht, mit Hülfe von u und der longimetrischen Funktionen von $\mathfrak{m}_1$ die Werte von x und y auszudrücken. Es ist nämlich allgemein, wenn wir in Zukunft einfach $\mathfrak{m}$ statt $\mathfrak{m}_1$ schreiben,

$$x = u \,.\, \sec \mathfrak{m}$$
$$y = u \,.\, \operatorname{cosec} \mathfrak{m}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{u}\,(\cos \mathfrak{m} + \sin \mathfrak{m}) = \frac{1}{u}.$$

Überdies sieht man, dafs u gleich der Hälfte der Strecke ist, die durch $\mathfrak{m}$ parallel zu den Achsen geht und von der Geraden m und der Mittellinie $\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0$ begrenzt wird, d. h. gleich der Hälfte des harmonischen Mittels aus x und y. Es ist nun ein Leichtes, eine in x und y gegebene Gleichung in eine solche mit u und $\mathfrak{m}$ zu verwandeln. So ist z. B.

$$xy = \pm k^2$$

die Gleichung der Ellipse oder der Hyperbel, je nachdem man die rechte Seite mit positivem oder negativem Zeichen nimmt. Daraus ergiebt sich sofort

$$u^2 \sec \mathfrak{m} \,.\, \operatorname{cosec} \mathfrak{m} = \pm k^2$$

oder

$$u^2 = \pm k^2 \sin \mathfrak{m} \,.\, \cos \mathfrak{m}$$

als die Polargleichungen der genannten Kegelschnitte in Linienkoordinaten.

Jede Gleichung in Polarkoordinaten des Punktes bietet somit Stoff zur Untersuchung über die Bedeutung derselben Gleichung, die Variabeln als Geradenkoordinaten in der oben gegebenen Bedeutung betrachtet."

Dies sind die Grundlagen, auf denen UNVERZAGT seine analytische Geometrie aufbaut. Die folgenden Zeilen geben natürlich nur eine kurze Übersicht.

Die Gleichung eines beliebigen Punktes $\mathfrak{m}$, als Träger der durch ihn gehenden Geraden (x, y), lautet:

$$x \cos \mathfrak{m} + y \sin \mathfrak{m} = p,$$

wenn p den (parallel zu den Achsen gemessenen) Abstand des Punktes $\mathfrak{m}$ von der Mittellinie bedeutet. Diese Gleichung ist in der Form identisch mit der bekannten Hesse'schen Normalgleichung der Geraden. Sie wird daher die Normalgleichung des Punktes genannt. Die allgemeine Gleichung ersten Grades $Ax + By = C$ wird in die Normalgleichung verwandelt, indem man sie mit $A + B$ dividiert. Ist $A + B = 0$, so liegt der Punkt $Ax + By = C$ im Unendlichen.

Schreibt man die Normalgleichung in der Form

$$x \cos \mathfrak{m} + y \sin \mathfrak{m} - p = 0,$$

so stellt, ähnlich wie bei der Hesse'schen Normalgleichung, die linke Seite für sich den (parallel zu den Achsen gerechneten) Abstand des Punktes $\mathfrak{m}$ von der Geraden (x, y) dar. Dadurch tritt die Bedeutung der Gleichung des Punktes scharf hervor.

Aber auch sonst bestehen, der Natur der Sache nach, zahlreiche Analogien zwischen den Gleichungen des Punktes und denen der Geraden, Analogien, deren gemeinsame Quelle zumeist der Umstand ist, daſs man es in beiden Fällen mit linearen Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen zu thun hat.

So stellt $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ die Gleichung eines Punktes dar, der, mit den Fundamentalpunkten verbunden, die Achsenabschnitte a und b liefert; so ist $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden (x_1, y_1), (x_2, y_2) etc.

Teilt ein Punkt $\mathfrak{m}_3$ den Abstand der Punkte $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$, deren Normalgleichungen kurz mit $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ bezeichnet werden mögen, im Verhältnis $k_1 : k_2$, so erhält man als seine Gleichung $k_2 u_1 + k_1 u_2 = 0$. Es ist also beispielsweise $u_1 + u_2 = 0$ die Gleichung des Halbierungspunktes, $u_1 - u_2 = 0$ die Gleichung des unendlich fernen Punktes von $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2$, und es ergiebt sich ferner als Bedingung dafür, daſs drei Punkte $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ in einer Geraden liegen, die Existenz dreier Multiplikatoren A_1, A_2, A_3, für die identisch $A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 = 0$ ist. Liegen die drei Punkte nicht in einer Geraden, so ist beispielsweise $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ die Gleichung des Schwerpunktes des von ihnen gebildeten Dreiecks etc.

Unter der Annahme, daſs die Achsen senkrecht zur Mittellinie stehen, kann man auch den Flächeninhalt eines Dreiecks durch eine einfache Formel aus den Gleichungen seiner Eckpunkte bestimmen. Sind diese von der Form $Ax + By = C$, so findet man leicht:

$$2J = \frac{e}{(A_1 + B_1)(A_2 + B_2)(A_3 + B_3)} \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}$$

Diese Formel gestaltet sich besonders einfach für den Fall, daſs die Eckpunkte durch ihre Normalgleichungen gegeben sind, da dann der Nenner $= 1$ wird.

Ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer Kurve in Linienkoordinaten, so ist der negative Quotient der beiden partiellen Ableitungen von F nach y und x gleich der longimetrischen Tangente des Berührungspunktes (die also hier an die Stelle des Richtungskoeffizienten tritt), und die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0$$

ist die Gleichung des Berührungspunktes der Tangente (x, y).

Unverzagt hat die Gleichung des Punktes noch auf eine bemerkenswerte Form gebracht. Man kann nämlich offenbar die Normalgleichung $x \cos \mathfrak{m} + y \sin \mathfrak{m} = p$ auch in der Form

$$x(py) + y(xp) = p(xy)$$

schreiben, wenn die Klammerausdrücke die Abstände der darin vorkommenden parallelen Strecken bedeuten. Dividiert man diese Gleichung mit e, so erhält man $x \sin(py) + y \sin(xp) = p \sin(xy)$. Schreibt man aber hierin z statt p und beachtet, daſs $\sin(zy) = -\sin(yz)$ ist, so kommt die symmetrische Gleichung zum Vorschein:

$$x \sin(yz) + y \sin(zx) + z \sin(xy) = 0.$$

Diese Gleichung enthält drei parallele Strecken und drei Abstände auf der Mittellinie, die durch die Bedingung $(xy) + (yz) + (zx) = 0$ mit einander verbunden sind. Läſst man in ihr zwei der parallelen Strecken (und ihren Abstand) variabel, alles übrige aber (nach Gröſse und Stelle) konstant sein, so stellt sie jedesmal eine Punktgleichung dar; läſst man dagegen die vorher variabelen Stücke konstant und die übrigen variabel sein, so stellt dieselbe Gleichung die Gleichung einer Geraden dar.

Aber nicht nur in dem hier zu Grunde gelegten Koordinatensysteme, auch in kartesischen Koordinaten stellt dieselbe Gleichung, je nachdem man zwei der Parallelen oder eine der Parallelen und ihre Abstände variabel sein läſst, die Gleichung eines Punktes oder einer Geraden dar.

Die groſse Übereinstimmung zwischen den Unverzagt'schen Linienkoordinaten und den kartesischen Punktkoordinaten zeigt sich auch bei der *Koordinatentransformation*. So wird z. B. der Übergang von den Achsen x, y zu Achsen x_1, y_1, die parallel zu den alten liegen, während die Mittellinie ihre Lage nicht ändert (was bei den kartesischen Koordinaten dem Übergange von einem Systeme zu einem anderen mit demselben Anfangspunkte entspricht), durch die Gleichungen vermittelt:

$$x \sin \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 = x_1 \sin \mathfrak{x}\mathfrak{y}_1 + y_1 \sin \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}$$
$$y \sin \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 = x_1 \sin \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1 + y_1 \sin \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}.$$

In einer Programmabhandlung, die nur den allgemeinen Grundlagen gewidmet ist, findet sich natürlich kein Raum für eine ausführlichere Behandlung höherer Gebilde. UNVERZAGT beschränkt sich daher auf einige wenige Andeutungen.

Die Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

stellt eine *Kurve zweiter Klasse* dar und zwar eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel, je nachdem man von dem Punkte

$$(2A + B)x + (B + 2C)y + D + E = 0$$

keine, eine, oder zwei Tangenten ziehen kann. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der Kurve. Er liegt bei der Parabel im Unendlichen, woraus sich für diese das besondere Kennzeichen $A + B + C = 0$ ergiebt.

Für die Gleichung des Poles der Geraden (x_1, y_1) in Bezug auf die Kurve zweiter Klasse findet man:

$$(2Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0.$$

Ist (x_1, y_1) eine Tangente, so ist diese Gleichung die Gleichung des Berührungspunktes.

Mit Benutzung der früher eingeführten Polarkoordinaten erhält man die *Polargleichung* der Kurve zweiter Klasse:

$$(A \sec^2 \mathfrak{m} + B \sec \mathfrak{m} \,.\, \operatorname{cosec} \mathfrak{m} + C \operatorname{cosec}^2 \mathfrak{m})u^2$$
$$+ (D \sec \mathfrak{m} + E \operatorname{cosec} \mathfrak{m})u + F = 0,$$

die nun fast buchstäblich dieselben Betrachtungen zuläſst wie die gewöhnliche Polargleichung.

Mit Hülfe der oben erwähnten Transformationsformeln kann man auch leicht Kegelschnittsgleichungen in besonders einfacher Form gewinnen, z. B.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x^2 - y^2 = a^2,$$

von denen die erste eine Ellipse, die zweite eine Hyperbel und die dritte eine Parabel darstellt, während sich bei anderer Wahl der Achsen (man lege die Koordinatenanfänge in die Enden eines Durchmessers und lasse die Achsen dem konjugierten parallel gehen, d. h. mit den Tangenten zusammenfallen), für die Ellipse und die Hyperbel die Gleichung ergeben:

$$xy = \pm k^2,$$

in denen sich eine bekannte Eigenschaft dieser Kurven in einfachster Form ausgedrückt findet.

Den Schlufs der Unverzagt'schen Abhandlung bildet die Einführung *trimetrischer Koordinaten.*

Man kann die Gleichung eines jeden Punktes $u = 0$ als die Summe der mit gewissen Koeffizienten multiplizierten Gleichungen dreier beliebiger Punkte $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ darstellen, vorausgesetzt nur, dafs diese nicht in einer Geraden liegen. Die Gleichung $u = 0$ kann also stets geschrieben werden in der Form

$$k u_1 + l u_2 + m u_3 = 0,$$

wo k, l, m sich in bekannter Weise als Quotienten gewisser Determinanten darstellen.

Nimmt man nun speziell u_1, u_2, u_3 in der Normalform an, so stellen diese Ausdrücke die den Achsen parallel genommenen Abstände der drei Punkte $u_1, = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ von den durch den Punkt $u = 0$ gehenden Geraden (x, y) dar. Man erhält also somit eine Gleichung des Punktes in Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3, die sich als die parallel zu den Achsen, d. h. zu einer beliebig vorgeschriebenen Richtung, genommenen Abstände der Geraden (x, y) von drei festen Punkten darstellen. Diese werden daher jetzt als Fundamentalpunkte eines trimetrischen Koordinatensystemes zu Grunde gelegt.

Die Koordinaten u_1, u_2, u_3 sind natürlich nicht von einander unabhängig, sondern durch die Gleichung

$$u_1 h_{23} + u_2 h_{31} + u_3 h_{12} = 2J$$

mit einander verbunden, in der die h nach Gröfse und Richtung die gegenseitigen Abstände der drei durch die Fundamentalpunkte gehenden neuen Achsen bedeuten und J den Flächeninhalt des Fundamentaldreiecks darstellt.

Man kann leicht die geometrische Bedeutung der in der Gleichung $ku_1 + lu_2 + mu_3$ auftretenden Multiplikatoren k, l, m angeben. Es zeigt sich, dafs sie proportional den Flächeninhalten J_{23}, J_{31}, J_{12} der drei Dreiecke sind, die man erhält, wenn man den Punkt $u = 0$ mit den Fundamentalpunkten 2, 3; 3, 1; 1, 2 verbindet. Dadurch geht die homogene Punktgleichung über in:

$$u_1 J_{23} + u_2 J_{31} + u_3 J_{12} = 0.$$

Drückt man die Inhalte der Teildreiecke durch ihre Höhen v_1, v_2, v_3 und ihre Grundlinien s_{23}, s_{31}, s_{12} aus, so erhält man:

$$u_1 v_1 s_{23} + u_2 v_2 s_{31} + u_3 v_3 s_{12} = 0.$$

Läfst man in dieser Gleichung v_1, v_2, v_3, d. h. die homogenen Koordinaten des Punktes variabel werden, so stellt dieselbe Gleichung auch die durch

die homogenen Koordinaten u_1, u_2, u_3 festgelegte Gerade dar, wobei die drei Punktkoordinaten durch die Gleichung

$$v_1 s_{23} + v_2 s_{31} + v_3 s_{12} = 2J$$

mit einander verbunden sind. —

Unverzagt wendet sich sodann zu dem Zusammenhange, der zwischen seinen und den Plücker'schen Koordinaten besteht. In beiden Koordinatensystemen benutzt man zur Festlegung einer Geraden drei von den Fundamentalpunkten an sie gezogene Strecken. Während diese aber hier parallel einer bestimmten, unveränderlichen Richtung gehen, stehen sie bei Plücker senkrecht auf den festzulegenden Geraden, verändern also ihre Richtung von Gerade zu Gerade. Setzt man dasselbe Fundamentaldreieck voraus, so erhält man die Plücker'schen Strecken, indem man u_1, u_2, u_3 mit dem (veränderlichen) Kosinus des Winkels multipliziert, den jene Lote in jeder Lage der Geraden mit der festen Richtung der durch die drei Fundamentalpunkte gehenden Achsen bilden. „Diese Operation ist so einfach, dafs es auf den ersten Blick unnötig scheinen mag, neue Koordinaten statt der von jenem berühmten Mathematiker eingeführten zu benutzen. Allein die von uns angewandten Koordinaten bieten doch einige wesentliche Vorteile. Zuerst ist es ein Vorzug, dafs sich, bei nur zwei Koordinaten zur Festlegung der Geraden, die Gleichung des Punktes in sehr einfacher, ja bei der von uns adoptierten Bezeichnung mehrfach in identischer Form mit der Gleichung der Geraden in kartesischen Koordinaten ergiebt, während der Versuch, eine Gleichung des Punktes zu bekommen, bei Annahme nur zweier Fundamentalpunkte und der von ihnen auf die Gerade gefällten Lote als Koordinaten der Geraden auf komplizierte Ausdrücke höheren Grades führt. Ähnliches gilt für Kurven zweiter und höherer Klasse." Als einen weiteren nicht unwesentlichen Vorzug seiner Koordinaten der geraden Linie hebt Unverzagt sodann mit Recht hervor, dafs diese durch eine Gleichung *ersten* Grades, nämlich durch die einfache Gleichung

$$u_1 h_{23} + u_2 h_{31} + u_3 h_{12} = 2J$$

mit einander verbunden sind, während bekanntlich der Zusammenhang der Plücker'schen Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch eine Gleichung *zweiten* Grades ausgedrückt wird, die mit Benutzung der früheren Bezeichnung lautet:

$$s_{23}^2(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) + s_{31}^2(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_1) + s_{12}^2(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2) = 4J^2.$$

„Schliefslich darf wohl auch die Leichtigkeit der Ableitung unserer Formeln für ihre Angemessenheit bei geometrischen Untersuchungen sprechen ... und wir fügen nur zu, dafs die Übertragung unserer Betrachtung von Punkten in der Ebene auf Ebenen im Raume, unter Zuziehung von vier

parallelen von den Eckpunkten eines Tetraeders ausgehenden Achsen, ohne alle Schwierigkeit ist."

Es ist bereits gesagt worden, dafs die Abhandlung, deren Inhalt hier in ihren wesentlichen Teilen wiedergegeben wurde, aus dem Unterrichte hervorgegangen ist, den Unverzagt an dem Realgymnasium zu Wiesbaden erteilt hat. Es würde daher nahe liegen, noch einiges über diesen Unterricht, der sich in mehr als einer Hinsicht weit über das gewöhnliche Niveau erhob, zu berichten und daran Mitteilungen über das Leben und die wissenschaftliche Thätigkeit Unverzagt's anzuknüpfen. Ich kann mich aber damit begnügen, auf den pietätvollen Nekrolog zu verweisen, den Herr August Schmidt seinem ehemaligen Lehrer und späteren Kollegen gewidmet hat. Er ist im 31. Bande der Ztschr. f. Math. u. Phys. veröffentlicht. Hier sollen nur noch einige litterarhistorische Bemerkungen über die besprochenen Koordinaten Platz finden.

Wie schon bemerkt, ist im Jahre 1874 auch Herr Schwering auf das von Unverzagt drei Jahre vorher veröffentlichte Koordinatensystem geführt worden. Seine im „Dritten Jahresberichte des Westfälischen Provinzial-Vereins für Wissenschaft und Kunst pro 1874" veröffentlichte Note ist betitelt: „Über ein neues Linienkoordinatensystem." Es darf übrigens noch gesagt werden, dafs Unverzagt schon längere Zeit vor dem Erscheinen seiner Programmabhandlung die darin behandelten Parallelkoordinaten in seinem Unterrichte benutzt hat. Nachdem Herr Schwering sich mit diesen Linienkoordinaten noch in dem im 21. Bande der Ztschr. f. Math. u. Phys. veröffentlichten Aufsatze: „Über ein besonderes Linienkoordinatensystem" sowie in einer Programmabhandlung des Briloner Gymnasiums beschäftigt hatte, fafste er seine Untersuchungen in dem Buche „Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten in der analytischen Geometrie der Ebene" (Leipzig 1884) zusammen.[1]) Es liegt in der Natur der Sache, dafs seine Wege und seine Resultate sich vielfach mit den Unverzagt'schen decken. Nur geht sein Buch viel weiter und bietet eine in sich abgeschlossene analytische Geometrie, während es Unverzagt nur auf die Grundlagen ankam. Andererseits erscheint indessen die von Schwering zu Grunde gelegte Voraussetzung, dafs die Achsen senkrecht auf der Mittellinie stehen, an vielen Stellen als eine unnötige, ja oft störende Beschränkung.

---

1) Siehe auch die von C. Köhler im 32. Bande der Ztschr. f. Math. u. Phys. veröffentlichte Abhandlung: „Zur Einführung der Linienkoordinaten in die analytische Geometrie der Ebene."

Im Jahre 1884 hat sodann Herr M. d'Ocagne dem in Rede stehenden Koordinatensysteme einen in den Nouv. Ann. de Math. erschienenen ebenfalls grundlegenden Aufsatz *„Étude de deux systèmes simples de coordonnées tangentielles dans le plan"* gewidmet. Anschliefsend an die Untersuchungen von Lalanne hat er dann noch in demselben Jahre in dem Aufsatze *„Procédé nouveau de calcul graphique"* (Annales des ponts et chaussées, 1884) dieses System zunächst zur graphischen Lösung trinomischer Gleichungen benutzt und später noch eine ganze Reihe von Anwendungen folgen lassen. Die bereits erwähnte Abhandlung von Herrn Mehmke und die von demselben Verfasser in der nämlichen Zeitschrift veröffentlichte Mitteilung „Über einen Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen mit vier oder fünf Gliedern" giebt mannigfachen Aufschlufs über die Verwertbarkeit der Parallelkoordinaten und enthält zugleich eine ausführliche Zusammenstellung der bereits ziemlich umfangreich gewordenen Litteratur.

Es wäre noch die Frage zu beantworten, ob nicht schon *vor* Unverzagt Parallelkoordinaten der geraden Linie angewendet worden sind. Soweit ich die Litteratur zu übersehen vermag, könnten Arbeiten von Plücker, Möbius und Chasles in Betracht gezogen werden. Über das Verhältnis seiner Koordinaten zu den Plücker'schen hat Unverzagt selbst alles Erforderliche gesagt. Wohl aber kann man, wenn man durchaus will, Spuren seiner Koordinaten in dem „Barycentrischen Calcul" entdecken, insofern es ein Leichtes ist, beispielsweise die Gleichung des Punktes in den Unverzagt'schen Koordinaten barycentrisch zu deuten. In der That bilden derartige Überlegungen auch den Ausgangspunkt der wiederholt genannten Mehmke'schen Abhandlung „Beispiele graphischer Tafeln etc." Anders liegt die Sache dagegen bei Chasles. In seinem Buche *„Le calcul simplifié"* (Paris 1894) macht Herr d'Ocagne auf Seite 110 die Bemerkung (auf die ich durch Herrn Mehmke aufmerksam wurde): *„Toutefois, l'idée même de ces coordonnées appartient à* Chasles, *Correspondance de* Quetelet, t. VI." In diesem Bande, Seite 81, findet sich in der That ein an A. Quetelet gerichteter Brief vom 10. Dezember 1829, in dem Chasles ein Koordinatensystem mit folgenden Worten einführt:

„Voici en peu de mots, mon système de coordonnées. J'ai pour but de représenter chaque surface par une équation qui donne, tous ses plans tangens, de même que dans le système usité, on représente chaque surface par une équation qui donne tous ses points.

Pour cela, par trois points fixes A, B, C, *je mène trois axes parallèles entre eux. Un plan quelconque rencontre ces axes en trois points dont les distances aux points* A, B, C *respectivement, sont les coordonnées* x, y, z *du plan.*

Une équation $F(x, y, z) = 0$ *entre ces coordonnées donne lieu à une infinité de plans, et représente, par conséquent, la surface enveloppe de tous ces plans.*

Si cette équation est du premier degré, elle représente un point."

Chasles verwendet sodann dieses Koordinatensystem zum Beweise eines allgemeinen flächentheoretischen Satzes. In einer Nachschrift vom 25. Dez. desselben Jahres giebt er noch eine weitere Anwendung, indem er ein für die Flächen zweiten Grades gültiges Theorem beweist, das sich als eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes von der konstanten Summe der Quadrate konjugierter Halbmesser darstellt.

Der Hinweis d'Ocagne's auf Chasles ist durchaus berechtigt, denn das von diesem benutzte Koordinatensystem ist nichts anderes als die Übertragung des Unverzagt'schen auf den Raum. Immerhin handelt es sich hier doch nur um eine ganz singuläre Erscheinung. Die *systematische* Einführung und Bearbeitung des in Rede stehenden Koordinatensystemes, wie sie durch Unverzagt, Schwering und schliefslich durch d'Ocagne selbst vollzogen wurde, ist dadurch keineswegs überflüssig geworden. Unverzagt eigentümlich bleibt überdies in jedem Falle das durch seine Einfachheit ausgezeichnete *trimetrische* System, mit dem er die analytische Geometrie bereichert hat.

FRANZ ADOLPH TAURINUS.

EIN BEITRAG
ZUR VORGESCHICHTE DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE

VON

PAUL STÄCKEL
IN KIEL.

Im Jahre 1895 habe ich auf die bis dahin übersehene Thatsache hingewiesen, dafs FRANZ ADOLPH TAURINUS (1794—1874) zuerst angeregt durch seinen Onkel F. K. SCHWEIKART, alsdann beeinflufst durch GAUSS bemerkenswerte selbständige Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie angestellt und insbesondere schon 1826, demnach früher als LOBATSCHEFSKY und J. BOLYAI, eine nichteuklidische Trigonometrie mit Anwendungen auf geometrische Probleme durch den Druck veröffentlicht hat[1]). Auf Grund weiterer Nachforschungen beabsichtige ich hier meine damaligen Mitteilungen in verschiedenen Punkten zu vervollständigen. Vor allem darf ich mit Erlaubnis der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen drei in deren Besitz befindliche Briefe von TAURINUS an GAUSS aus den Jahren 1824, 1825 und 1829 der Öffentlichkeit zugänglich machen, Briefe, die zu dem bereits bekannten Schreiben von GAUSS an TAURINUS (aus dem Jahre 1824)[2]) eine wichtige Ergänzung bilden.

1.

Taurinus' Lebensgang.

FRANZ ADOLPH TAURINUS wurde am 15. November 1794 zu König im Odenwalde, dem damaligen Regierungssitze der Schönbergischen Linie der Grafen ERBACH, geboren. Seine Eltern waren JULIUS EPHRAIM TAURINUS, gräflich Erbach-schönbergischer Hofrat, und LUISE JULIANE SCHWEIKART. Bereits im Jahre 1800 starb der kränkliche Vater, und die Mutter siedelte nach Ingelfingen über, wo ihr Schwiegervater als Hofrat in Fürstlich HOHENLOHEschen Diensten stand; er starb jedoch schon 1802. Im Jahre

1) Siehe den VI. Abschnitt des von mir in Gemeinschaft mit FRIEDRICH ENGEL herausgegebenen Werkes: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gaufs, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1895, das ich im Folgenden mit P. Th. anführen werde.

2) P. Th. S. 249—250. Am Schlusse des Bandes befindet sich ein Facsimile dieses Briefes.

1811 schloſs sie eine zweite Ehe mit dem Juristen FÜRER in Stuttgart. FÜRER war zuerst Rechtsanwalt und Notar gewesen und dann in den Württembergischen Staatsdienst übergetreten. Aus dieser Ehe stammte der 1898 zu Dürrenberg bei Corbetha verstorbene Pastor FÜRER, dem ich die folgenden Mitteilungen über TAURINUS' Leben verdanke.

Nachdem TAURINUS zuerst in Ingelfingen von dem dortigen Hofprediger und dann in Reichelsheim, dem Geburtsorte seiner Mutter, von seinem Onkel, dem Pfarrer AUGUST SCHWEIKART, unterrichtet worden war, absolvirte er die Prima des Gymnasiums zu Darmstadt und ging 1814 nach Heidelberg, um sich der Jurisprudenz zuzuwenden. Im Jahre 1815 hat er sich in Paris aufgehalten, wo sein Vater, der inzwischen in die preuſsische Rheinprovinz übergesiedelt war und während des Krieges eine Stellung bei der Armeepolizei bekleidet hatte, zeitweilig das IX. Arrondissement verwaltete. Nach seiner Rückkehr bezog er 1816 die Universität Gieſsen und ging bald darauf nach Göttingen, wo „er sich in einer einsamen Gartenwohnung in seine Speculationen vergrub"; unüberwindliche Scheu vor öffentlichem Auftreten soll ihm sein ganzes Leben hindurch eigen gewesen sein. Seit Ostern 1822 hat er ohne Amt und Beruf, sich mannigfachen wissenschaftlichen Beschäftigungen widmend, in dem Hause seines Schwagers, des Justizrates ALEXANDER HASENCLEVER in Köln, gewohnt, der eine der glänzendsten Zierden der rheinischen Advocatenbank war, und nach dessen 1838 erfolgtem Tode ist er Hausgenosse seiner Schwester, der Witwe HASENCLEVER'S, geblieben.

TAURINUS' hinterlassene Papiere zeigen, daſs er sich nicht nur beträchtliche Kenntnisse in der höheren Analysis und in der mathematischen Physik angeeignet, sondern daneben auch philosophische und linguistische Studien getrieben hat. Veröffentlicht hat TAURINUS nur zwei kleine Schriften, die sich auf die Grundlagen der Geometrie beziehen (1825 und 1826). Über ihre Entstehung und ihre Bedeutung für die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie soll in den beiden folgenden Abschnitten ausführlich gehandelt werden. Hier sei nur bemerkt, daſs sie nicht die Anerkennung der Mathematiker von Fach fanden, auf die TAURINUS gehofft hatte. Er hat zwar noch erlebt, daſs die Ideen, die er 1826 entwickelt hatte, sich siegreich Bahn brachen, denn zu der Zeit, wo er sein Leben beschloſs, — er ist am 13. Februar 1874 gestorben — begannen die Untersuchungen von LOBATSCHEFSKIJ und J. BOLYAI, RIEMANN und HELMHOLTZ bereits Verständnis zu finden, allein es ist anzunehmen, daſs diese erfreuliche Wandlung ihm verborgen geblieben ist.

2.

Die Theorie der Parallellinien vom Jahre 1825.

Aufser dem bereits erwähnten Pfarrer AUGUST SCHWEIKART hatte TAURINUS' Mutter noch einen 1780 in Erbach geborenen Bruder FERDINAND KARL SCHWEIKART. Dieser ist von 1812 ab in Charkow, von 1816 ab in Marburg, von 1821 ab[3]) in Königsberg Professor der Rechte gewesen und dort 1859 gestorben[4]). SCHWEIKART, der sich, wie das gerade bei Juristen früher nicht selten gewesen zu sein scheint, seit seiner Studienzeit für Mathematik interessirte, hatte 1807 eine von gründlichem Studium der betreffenden Literatur zeugende Schrift: Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie erscheinen lassen, in der er noch ganz auf dem Boden der Euklidischen Elemente stehend das elfte Axiom durch das „Postulat von Quadraten“ ersetzt. Später hat er Untersuchungen angestellt, die mit denen von SACCHERI und LAMBERT auf eine Stufe zu stellen sind, und hat sich schliefslich zu der Conception einer widerspruchsfreien Geometrie durchgearbeitet, in der das elfte Axiom nicht gilt und die Summe der Winkel des Dreiecks kleiner als zwei Rechte ist. Im Jahre 1819 legte er seine bereits während seines Aufenthaltes in Charkow gewonnenen Ideen durch Vermittelung seines Kollegen GERLING, eines Schülers von GAUSS, diesem vor. GAUSS' Antwort begann mit den Worten:

„Die Notiz von Hr. Pr. SCHW. hat mir ungemein viel Vergnügen gemacht und ich bitte ihm darüber von mir recht viel Schönes zu sagen. Es ist mir fast alles aus der Seele geschrieben“[5]).

---

3) P. Th. S. 243 heifst es 1820. Dass diese aus JUSTI's Hessischer Gelehrten-Geschichte (Marburg 1831, S. 622) entnommene und auch in POGGENDORFF's Handwörterbuch (Leipzig 1863, Bd. II, Spalte 875) übergegangene Angabe unrichtig ist, zeigt ein Brief von OLBERS an BESSEL vom 20. Mai 1821 (Briefwechsel zwischen OLBERS und BESSEL, herausgegeben von ERMANN. Bd. II. S. 195), in dem dieser schreibt: „Ich kann den Herrn Professor SCHWEICKHARD nicht abreisen lassen, ohne ihm einige Zeilen mitzugeben. Ich hoffe, Sie werden in diesem neuen Kollegen einen angenehmen Gesellschafter und vielleicht Freund erhalten.“

4) WINTER (Artikel „FERDINAND KARL SCHWEIKART“, Allgemeine Deutsche Biographie. Bd. 33, Leipzig 1891. S. 388) hat als Todesjahr 1857 bezeichnet. Diese P. Th. S. 243 übernommene Angabe ist irrtümlich, SCHWEIKART ist vielmehr, wie die Akten der Universität Königsberg zeigen, am 17. August 1859 gestorben; dasselbe Datum findet sich auch in POGGENDORFF's Handwörterbuch, Bd. II. Spalte 875.

5) P. Th. S. 246. Es ist mir inzwischen gelungen, diese merkwürdige Notiz von SCHWEIKART aufzufinden, die ebenso wie der vollständige Brief von GAUSS an

Von seiner Entdeckung, „dafs unsere Geometrie nur eine relative Wahrheit habe, und dafs es eine höhere, welche ich die Astralgeometrie nenne, gebe", hat SCHWEIKART seinem Neffen TAURINUS, von dessen mathematischer Begabung er eine hohe Meinung gehabt zu haben scheint, in einem Briefe vom 1. October 1820 Mitteilung gemacht und ihn aufgefordert, er möge doch zu ihm kommen. Er wies ihn darauf hin, dafs GAUSS auf demselben Wege sei, und schlofs mit den Worten: „In kurzer Zeit würde ich Dich in diese Ansicht einführen können und Deinem Erfindungstriebe ein weites Feld eröffnen"[6]).

TAURINUS hat dieser Einladung nicht Folge geleistet. Er sagt in seiner Theorie der Parallellinien (S. 91), dafs er sich mit der Astralgeometrie seines Onkels nicht habe befreunden können[7]). Erst 1824, also zu einer Zeit, wo er bereits in Köln bei seinem Schwager lebte, hat er sich wieder geometrischen Studien zugewendet, veranlafst durch den Umstand, dafs ihm „die 1807 in Jena erschienene Schrift desselben SCHWEIKART in die Hände fiel". Er erkannte den Grundfehler von dessen Demonstrationen in dem Postulate von Quadraten und versuchte auf anderem Wege das elfte Axiom zu beweisen. Seinen Beweisversuch teilte er SCHWEIKART mit, der ihm in einem Briefe vom 12. November 1824 dessen Unzulänglichkeit darlegte und abermals auf seine Astralgeometrie hinwies, die GAUSS' Zustimmung gefunden habe[8]).

Noch ehe diese Antwort eintraf, hatte TAURINUS, der inzwischen in seinen Untersuchungen weiter gerückt war und denselben Weg eingeschlagen hatte, auf dem SACCHERI und LAMBERT ihm vorangegangen waren, sich an GAUSS selbst gewendet. Sein Brief lautete folgendermafsen:

„Euer Hochwohlgeboren

haben Sich durch die ausgezeichnetsten Verdienste um die Mathematik einen so hohen Ruhm begründet, dass ich keinen Augenblick zweifelhaft sein konnte, an wen ich mich mit einem Anliegen von höchstem Interesse mit dem grössten Vertrauen zu wenden hätte.

Was so vieljährigen Bemühungen der besten Mathematiker nicht gelungen ist, eine befriedigende Theorie der Parallellinien aufzustellen, und so einem Mangel der Elementargeometrie abzuhelfen, den jeder Freund der

---

GERLING vom 16. März 1819 in dem demnächst erscheinenden VIII. Bande von GAUSS' Werken abgedruckt werden wird.

6) P. Th. S. 249.

7) Vergleiche auch die Einleitung zu den *Geometriae prima elementa*, S. V, P. Th. S. 247.

8) P. Th. S. 245—246 sowie GAUSS' Werke Bd. VIII.

selben unangenehm empfinden musste — das schwebt mir, wenn mich nicht alles täuscht, als ein erreichbares, ja halb erreichtes Ziel vor.

Der innliegende Versuch wird Euer Hochwohlgeboren die Überzeugung verschaffen, ob meine Hoffnung begründet ist, und ich darf wohl um die Gewogenheit bitten, sobald mein Versuch Ihren Beifall hat, mir Ihre Ansicht hierüber baldmöglichst mitzutheilen.

Mit der grössten Hochachtung

Euer Hochwohlgeboren
ergebenster Diener
A. Taurinus
bei R. Anwalt Hasenclever.

Cöln am Rhein
den 30. October 1824.

Wenn ab, cd zwei gerade Linien sind, die von einer dritten ef unter rechten Winkeln geschnitten werden, und es wird von der ab auf die cd ein Loth ik gefällt, so bleibt es zweifelhaft, was sich bei i für ein Winkel gik bilde, ob ein stumpfer, ein rechter oder ein spitzer Winkel?

Es werde vorerst angenommen, Winkel gik sey $> 2R$, so lässt sich folgendes beweisen:

1.) alle von ab auf cd gefällten Lothe werden desto kleiner, je weiter sie von ef abstehen.

2.) Dabei werden die Winkel gik, glm ... immer stumpfer.

3.) Zuletzt müssen sich ab und cd gehörig verlängert, schneiden.

Beweis.

1.) Es sey $hk = gh = km = mo$, und Winkel gik stumpf, so ist $ik < gh$.

Denn es sey eben so gross, so wären bei i rechte Winkel, wider die Voraussetzung.

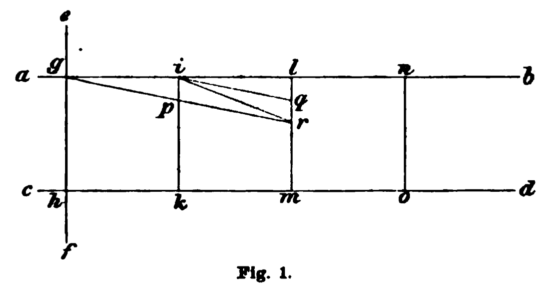


Fig. 1.

Oder es sey ik grösser, dass also z. B. $pk = gh$. Ziehe gp, so ist Winkel $gpk = pgh$: aber $pgh < R$, um so mehr $gip < R$, wider die Annahme.

Ferner ist $lm < ik$. Denn es sey eben so gross, so ist Winkel lik = Winkel ilm. Fälle das Loth iq, welches, da $ilm = lik$ ein spitzer Winkel ist, zwischen l und m fallen muss: alsdann wäre $qm = gh > ik = lm$, was unmöglich ist.

Oder es sey $lm > ik$, z. B. $rm = ik$. Ziehe ir, gr. Es lässt sich beweisen, dass $grm > grh$, weil $gh > rm$. Es ist $rik = irm > grm > rgh$: ferner $ril > rgl$, folglich $kil > hgl > R$, wider die Voraussetzung, dass $gik > R$.

Ein ähnlicher Beweis lässt sich für alle Lothe führen, nicht nur wenn $hk = gh = km \ldots$, sondern ganz allgemein für alle Lothe: sie werden desto kleiner, je mehr sie sich von ef entfernen.

2.) Nun sey also $lm < ik$. Fälle die Lothe $l\alpha$, $i\beta$, so ist $i\beta < l\alpha$: denn wenn dieses Verhältniss bei den Linien ab, cd, die von der ef

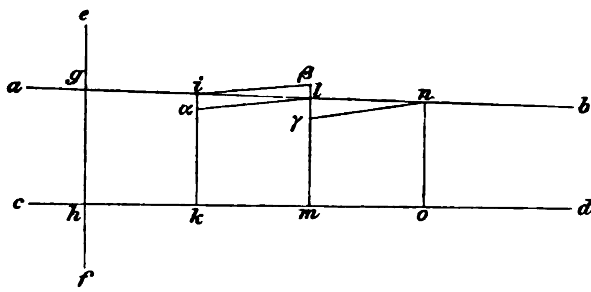


Fig. 2.

rechtwinklicht geschnitten werden, stattfindet, so muss das nemliche auch von den Linien ki, ml gelten, die bei k und m auf der cd rechtwinklicht stehen, zumal wenn $km = gh$: denn ausserdem wäre keine Geometrie möglich. Ist aber $i\beta < l\alpha$, so ist auch $il\beta < li\alpha$, und da $il\beta = mln$, so folgt daraus, dafs die Winkel lik, nlm u. s. w. desto kleiner werden, je weiter die Lothe von ef sich entfernen.

3.) Sehr leicht folgt daraus, dafs, wenn die Lothe $l\alpha$, $n\gamma$ u. s. w. gefällt werden, $l\gamma > i\alpha$ u. s. w., dagegen $k\alpha > lm$, $\gamma m > no$ (da $n\gamma > l\alpha$ u. s. w.) — woraus sich denn auch mit Nothwendigkeit auf ein Schneiden der Linien ab, cd schliefsen lässt, sobald sie nur gehörig verlängert werden, es mag auch $i\alpha$ anfangs noch so unendlich klein sein.

Es lässt sich dagegen auf mehr als eine Art der Beweis führen, dass zwei Linien, die auf einer dritten senkrecht stehen, sich unmöglich schneiden können. Daher ist es denn auch eine unrichtige Voraussetzung, dass wenn zwei Linien von einer dritten unter rechten Winkeln geschnitten werden, und von der einen auf die andre ein Loth gefällt wird, dieses nach der schneidenden Linie zu einen stumpfen Winkel bilde.

Hieraus ergiebt sich der Satz, dafs die Winkel eines Dreiecks zu-

sammen nie mehr als 2 Rechte ausmachen können. Denn dieſs sey der Fall in ABC: fälle AD. Es seyen auch in ADC mehr als 2 R: construire das ähnliche Dreieck ACE, daſs $AE = DC$: es ist also $EAD = DCE$, $> R$. Errichte das Loth AF und CF, so wäre $AFC > R$, welches nach dem obigen unmöglich.

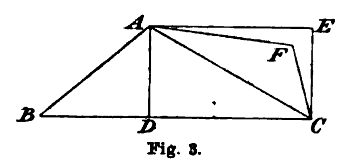


Fig. 3.

Nun lässt sich, wie ich glaube, auch der Beweis führen, dass die Winkel eines Dreiecks nicht kleiner sein können, als 2 R, sondern = 2 R: daraus ergiebt sich dann weiter, daſs wenn 2 Linien mit einer dritten sie schneidenden nach einer Seite hin weniger als 2 R machen, sie sich nothwendig schneiden müssen."

Um auf diese Auseinandersetzungen genauer einzugehen, scheint es zweckmäſsig, zunächst Gauss' Antwort mitzuteilen, die ich bereits 1895 (P. Th. S. 249—250) veröffentlicht habe. Gauss schreibt am 8. November 1824:

Ewr. Wohlgeboren

gefälliges Schreiben vom 30 Oct. nebst dem beigefügten kleinen Aufsatz habe ich nicht ohne Vergnügen gelesen, um so mehr, da ich sonst gewohnt bin, bei der Mehrzahl der Personen, die neue Versuche über die sogenannte Theorie der Parallellinien [machen,] gar keine Spur von wahrem geometrischen Geiste anzutreffen.

Gegen Ihren Versuch habe ich nichts (oder nicht viel) anderes zu erinnern als dass er unvollständig ist. Zwar lässt Ihre Darstellung des Beweises, dass die Summe der drei Winkel eines ebnen Dreiecks nicht gröſser als 180° seyn kann in Rücksicht auf geometrische Schärfe noch zu desideriren übrig. Allein dies würde sich ergänzen lassen, und es leidet keinen Zweifel daſs jene Unmöglichkeit sich auf das allerstrengste beweisen läſst. Ganz anders verhält es sich aber mit dem 2ⁿ. Theil, daſs die Summe der Winkel nicht kleiner als 180° seyn kann; dies ist der eigentliche Knoten, die Klippe woran alles scheitert. Ich vermuthe, dass Sie sich noch nicht lange mit dem Gegenstande beschäftigt haben. Bei mir ist es über 30 Jahr, und ich glaube nicht, daſs jemand sich eben mit diesem 2ⁿ. Theil mehr beschäftigt haben könne als ich, obgleich ich niemals etwas darüber bekannt gemacht habe. Die Annahme, daſs die Summe der 3 Winkel kleiner sei als 180°, führt auf eine eigne von der unsrigen (Euclidischen) ganz verschiedene Geometrie, die in sich selbst durchaus consequent ist, und die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe, so dass ich jede

Aufgabe in derselben auflösen kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Constante, die sich a priori nicht ausmitteln lässt. Je gröfser man diese Constante annimmt, desto mehr nähert man sich der Euclidischen Geometrie und ein unendlich grosser Werth macht beide zusammenfallen. Die Sätze jener Geometrie scheinen zum Theil paradox, und dem Ungeübten ungereimt; bei genauerer ruhiger Überlegung findet man aber, dafs sie an sich durchaus nichts unmögliches enthalten. So z. B. können die drei Winkel eines Dreiecks so klein werden als man nur will, wenn man nur die Seiten grofs genug nehmen darf, dennoch kann der Flächeninhalt eines Dreiecks, wie grofs auch die Seiten genommen werden, nie eine bestimmte Grenze überschreiten, ja sie nicht einmahl erreichen. Alle meine Bemühungen einen Widerspruch, eine Inconsequenz in dieser Nicht-Euclidischen Geometrie zu finden sind fruchtlos gewesen, und das Einzige was unserm Verstande darin widersteht, ist dafs es, wäre sie wahr, im Raume eine an sich bestimmte (wiewohl uns unbekannte) Lineargrösse geben müsste. Aber mir deucht, wir wissen, trotz der Nichts Sagenden Wort-Weisheit der Metaphysiker eigentlich zu wenig oder gar nichts über das wahre Wesen des Raumes, als dafs wir etwas uns unnatürlich vorkommendes mit Absolut Unmöglich verwechseln dürfen. Wäre die Nicht-Euclidische Geometrie die wahre, und jene Constante in einigem Verhältnisse zu solchen Grössen die im Bereich unsrer Messungen auf der Erde oder am Himmel liegen, so liesse sie sich a posteriori ausmitteln. Ich habe daher wohl zuweilen im Scherz den Wunsch geäufsert, dafs die Euclidische Geometrie nicht die Wahre wäre, weil wir dann ein absolutes Maass a priori haben würden.

Von einem Manne, der sich mir als einen denkenden Mathematischen Kopf gezeigt hat, fürchte ich nicht, dafs er das Vorstehende misverstehen werde: auf jeden Fall aber haben Sie es nur als eine Privat-Mittheilung anzusehen, von der auf keine Weise ein öffentlicher oder zur Öffentlichkeit führenkönnender Gebrauch zu machen ist. Vielleicht werde ich, wenn ich einmahl mehr Musse gewinne, als in meinen gegenwärtigen Verhältnissen, selbst in Zukunft meine Untersuchungen bekannt machen.

Mit Hochachtung verharre ich

Ewr. Wohlgeboren

Göttingen den 8 November 1824.

ergebenster Diener
C. F. Gauss.

Aus diesen Briefen ergiebt sich zunächst, dafs Taurinus im October 1824 noch durchaus der Überzeugung war, das elfte Axiom könne und müsse bewiesen, d. h. aus den übrigen Voraussetzungen der Euklidischen

Elemente hergeleitet werden, dafs er die wesentliche Identität des elften Axioms mit dem Satze, dafs die Summe der Dreieckswinkel 2 Rechte betrage, erkannt und den Beweis für diesen Satz auf apagogischem Wege durchzuführen versucht hatte, dafs er von den beiden Möglichkeiten, die alsdann zu betrachten sind, nur die eine, bei der die Winkelsumme gröfser als 2 Rechte vorausgesetzt wird, genauer untersucht hatte und dafs es ihm gelungen war ihre Unvereinbarkeit mit den Voraussetzungen des Euklidischen Systems zu zeigen, dafs er jedoch auf diesem Wege bei weitem nicht so tief wie Saccheri und Lambert vorgedrungen war, welche schon 1733 und 1766 die „Hypothese des stumpfen Winkels" eingehend untersucht hatten, von deren Untersuchungen jedoch Taurinus damals noch keine Kenntnis besafs.

Demgegenüber hatte sich Gauss zu derselben Zeit nicht nur nach langen Kämpfen, bei denen die Frage, ob man die Existenz einer an sich bestimmten Lineargröfse annehmen dürfe, eine wesentliche Rolle gespielt hat[9]) zu der Überzeugung von der logischen Unanfechtbarkeit einer „nichteuklidischen" Geometrie durchgerungen, in der die Summe der Winkel des Dreiecks kleiner als 2 Rechte ist, sondern auch diese neue Geometrie „für sich selbst ganz befriedigend ausgebildet"[10]). Die Worte: „Ich habe daher wohl zuweilen im Scherz den Wunsch geäufsert, dafs die Euklidische Geometrie nicht die Wahre wäre, weil wir dann ein absolutes Mafs a priori hätten", die sich übrigens dem Sinne nach genau mit einer Äufserung Lambert's decken[11]), stehen damit nicht in Widerspruch; der „Scherz" bezieht sich augenscheinlich nicht auf die nichteuklidische Geometrie, sondern allein auf die praktischen Folgen, die die Existenz eines absoluten Mafses haben würde.

Endlich wird durch die beiden Briefe die für die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie bedeutungsvolle Thatsache festgestellt, dafs Gauss und Taurinus erst im Jahre 1824 in Beziehungen zu einander getreten sind, und da Gauss keine weiteren Briefe an Taurinus geschrieben hat, wird zugleich der Einflufs, den jener auf diesen gehabt haben kann, genau festgelegt. Damit ist, worauf noch zurückzukommen sein wird, für Taurinus die selbständige Entdeckung der nichteuklidischen Trigonometrie gesichert, die freilich Gauss spätestens seit 1819 besessen haben mufs.

9) Weitere Aufschlüsse hierüber wird Bd. VIII der Gauss'schen Werke geben.

10) Eine ähnliche Äufserung findet sich auch in dem Briefe an Gerling vom 16. März 1819. P. Th. S. 246. Siehe auch die Abhandlung von Friedrich Engel und mir: Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie, Mathematische Annalen, Bd. 49. S. 150—151, 1897.

11) Lambert's Parallelentheorie § 80, P. Th. S. 200.

Nimmt man die weitere Thatsache hinzu, dafs Schweikart unabhängig von Gauss die Idee der „Astralgeometrie" concipirt hat — nach einer Äufserung Gerlings bereits während seines Aufenthaltes in Charkow 1812—1816[12] —, so ergiebt sich, dafs die Ansicht, alle Untersuchungen über nichteuklidische Geometrie gingen auf Anregungen von Gauss zurück, nicht mehr haltbar ist. Damit aber verliert die Frage, ob die Untersuchungen von Lobatschefskij und Johann Bolyai direkt oder indirekt durch Gauss veranlafst sind[13]), ihre principielle Wichtigkeit; womit nicht geleugnet werden soll, dafs es sich hierbei um ein vom Standpunkte des Mathematikers wie des Historikers und Psychologen recht interessantes Problem handelt.

Doch kehren wir zu Taurinus zurück, für den die freundliche Antwort, die ihm ein Mann wie Gauss zukommen liefs, gewifs ein Ansporn gewesen ist, seine Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie mit erneutem Eifer fortzuführen. So entstand seine erste Schrift, die Theorie der Parallellinien, deren Druck im März 1825 vollendet wurde. Ehe Taurinus sein Erstlingswerk dem Buchhandel übergab, sandte er es an Gauss und schrieb ihm bei dieser Gelegenheit folgenden Brief:

Euer Hochwohlgeboren

weifs ich meinen Dank für die höchst gütige und interessante Beantwortung der Anfrage, die ich vor ungefähr vier Monaten an Hochdieselbe zu richten so frei war, nicht besser erkennen zu geben, als durch Übersendung beifolgender kleiner Schrift, bevor sie noch ins Publicum kommt. Ich würde mich zur Herausgabe derselben schwerlich entschlossen haben, wenn mir gleich anfangs bekannt gewesen wäre, dafs Legendre den Beweis, dem ich als einer ganz neuen Entdeckung einen bedeutenden Wert beizulegen geneigt war — dafs nemlich die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks zwei Rechte nicht übersteigen könne — bereits vollkommen befriedigend geführt hat, worauf mich erst Hr. Prof. v. Münchow in Bonn aufmerksam gemacht hat. Hierdurch verschwindet also das vorzüglichste Interesse, das die Schrift aufserdem für den Mathematiker hätte haben können: indessen enthält sie dennoch vielleicht eine oder die andere neue Ansicht.

Die neue Geometrie, auf welche Ew. Hochwohlgeboren wegen des, zu einer gründlichen Theorie der Parallelen noch fehlenden Beweises mich verweisen, ist mir seit vier Jahren nichts unbekanntes und mir zuerst von meinem Oncle, Professor Schweikart, damals in Marburg, mitgetheilt worden:

---

12) Vergl. meine Bemerkung in Engel's Buch: Nikolaij Iwanowitsch Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen. Teil II. Leipzig 1899, S. 428.

13) P. Th. S. 242—243 und Engel, a. a. O., S. 378—382.

ich vermochte aber aus bloſsen Andeutungen nicht, die Idee davon aufzufassen, bis ich vor vier Monaten eben jenen Beweis, den ich Euer Hochwohlgeboren mitzutheilen die Ehre hatte, auffand und so von selbst auf den Versuch geleitet wurde, ein geometrisches System, in welchem die Summe der Dreieckswinkel kleiner, als zwei Rechte wäre, zu entwickeln. Da ich hierbei auf unerwartete Schwierigkeiten stieſs, so gab ich den Versuch bald auf und habe mich seitdem nicht mehr damit beschäftigt. Ich konnte um so eher darauf verzichten, als mein genannter Oncle mir bemerkt hatte, daſs Euer Hochwohlgeboren dieselbe Idee lange schon und weit verfolgt hätten. Indessen hat sich bei mir gleich anfangs die Ansicht gebildet, die ich in der beiliegenden Schrift auszusprechen gewagt habe.

Höchst schätzbar und schmeichelhaft wäre es mir, wenn Euer Hochwohlgeboren die kleine Schrift einer Durchsicht und Critik würdig fänden und die Gewogenheit haben wollten, mir Ihre Einwendungen dagegen oder das ganze Resultat Ihrer Beurtheilung mitzutheilen. Die Schrift wird auf keinen Fall vor vierzehn Tagen irgend jemanden bekannt werden und ich bin bereit sie sogleich ganz zu unterdrücken, wenn es Euer Hochwohlgeboren im mindesten unangenehm wäre, daſs der gedachte Gegenstand zur Sprache käme.

Mit der Versicherung der ausgezeichnetsten Hochachtung und Verehrung verharre ich

Euer Hochwohlgeboren
ergebenster Diener
F. A. Taurinus.

Cöln a. Rh., den 20. März 1825.

Aus dem später mitzuteilenden Briefe Taurinus' an Gauss vom 29. Dezember 1829 geht hervor, daſs Gauss das Schreiben vom 20. März 1825 nicht beantwortet hat. Wenig ermutigend war auch die Antwort, die W. A. Diesterweg (1782—1835), damals Professor der Mathematik an der Universität Bonn, ihm auf die Zusendung der Theorie der Parallelen am 15. September 1825 zugehen lieſs. Es heiſst darin:

„Ich halte es für eine äuſserst bedenkliche Sache, einen Theil seines Lebens der Aufstellung einer neuen Parallelentheorie zu widmen. Was Euklides nicht konnte, und alle groſsen Mathematiker nach ihm nicht konnten, ist gewiſs eine sehr schwer zu leistende Sache. Und ohne einen neuen Grundsatz an die Stelle des elften Euklidischen zu setzen, dürfte es wohl unausführbar sein“[14]).

---

14) Mitteilung von Pastor Führer, vergl. S. 402 dieser Abhandlung.

[illegible] der Parallellinien eine ziemlich seltene Schrift [illegible] kurze Übersicht ihres Inhaltes zu geben; die [illegible] nichteuklidischen Geometrie wichtigen Stellen haben [illegible] abgedruckt[16]). In der Vorrede (S. 3—14) be- [illegible] hauptsächlichsten Ansichten, Vorschläge und [illegible] Euklidische Axiom anzuführen und die Gründe [illegible] nothwendigen Mifslingens darzulegen" und erklärt [illegible] der Summe der Winkel im Dreiecke ausgehen und [illegible] Widerspruch aufzudecken, der sich aus einer will- [illegible] derselben ergeben werde". Er fährt fort:

[illegible] Versuch mafst sich nicht an, zur Wahrheit, die zu [illegible] Bemühungen und Forschungen fruchtlos waren, end- [illegible] zu sein und dem Urtheil der Mathematiker vorzugreifen [illegible] unbemerkt bleiben, dafs über den 51ten Lehrsatz[17]) — und [illegible] mehr zu seiner Empfehlung gereichen könnte — Herr [illegible] bereits beifällig ausgesprochen hat. Das bei dem Be- [illegible] beobachtete Verfahren ist so eigenthümlich, dafs der Satz in [illegible] erstenmal erscheint."

[illegible] S. 15—72) „Die ersten Elemente der Geometrie". [illegible] beginnen sie mit 52 Erklärungen und 2 Forderungen [illegible] Geraden durch zwei gegebene Punkte, eines Kreises mit [illegible] Mittelpunkt und Halbmesser). Dazu kommen, den *Κοιναὶ ἔννοιαι* [illegible] entsprechend, 10 „allgemeine mathematische Grundsätze", und [illegible] Taurinus, worauf er grofses Gewicht legt, den „Be- [illegible] der Geometrie", nach dem zwischen zwei Punkten nur [illegible] möglich ist.

[illegible] Lehrsätzen und Aufgaben ein System der Elemente [illegible] das manchen originellen Gedanken aufweist. Hier [illegible] dafs in Lehrsatz 51 die Hypothese des **stumpfen** [illegible] der Art, wie das in dem Briefe an Gauss vom [illegible] war, abgewiesen wird. Während der Beweis

[illegible] nur auf den Königlichen Bibliotheken zu Berlin [illegible] Universitätsbibliotheken zu Bonn und Jena [illegible] auf der Bibliothek der technischen Hochschule zu [illegible]

[illegible] Parallellinien S. 55: „Wenn zwei Linien von einer [illegible] geschnitten werden und ein Loth von der ersten [illegible] mit der ersten nach der Seite der dritten hi[illegible] [illegible] alle diese Linien keine geraden Linien sein.

für Lehrsatz 51, bei dem mit Nachdruck die Voraussetzung hervorgehoben wird, dafs „es verstattet ist die gerade Linie ins unendliche verlängert vorzustellen“, als gelungen bezeichnet werden kann, ist der Beweis für den folgenden Lehrsatz 52: „Unter den beiden übrigen geometrischen Systemen ist das Parallelsystem, in welchem ein Viereck vier Rechte enthalten kann, allein geradlinig“ durchaus unzulänglich. TAURINUS scheint das selbst gefühlt zu haben, da er in den den „Elementen“ angehängten Erläuterungen (S. 73—88) gegen die Hypothese des spitzen Winkels acht weitere Gründe anführt (S. 86—87, P. Th. S. 258—259). Bemerkenswert ist, dafs er dabei, wohl durch GAUSS' Brief beeinflufst, die „innere Consequenz des dritten Systems“ ausdrücklich anerkennt, und zum Schlufs (S. 88) als seine Überzeugung ausspricht, „dafs es ein solches System allerdings gebe; dafs wir aber zweifeln, ob es eine geradlinige oder eine ebene Geometrie sein werde“.

Den Schlufs des Werkchens bildet eine Nachschrift (S. 88—93, vergl. auch P. Th. S. 259—261), in der sich TAURINUS über LEGENDRE's Untersuchungen äufsert, die ihm erst während des Druckes durch die Vermittelung von Professor v. MÜNCHOW in Bonn (1778—1836) bekannt geworden waren.

Später, jedenfalls erst nach dem 20. März 1825, hat TAURINUS seiner Schrift einen Nachtrag hinzugefügt (S. 95—102, P. Th. S. 261—266), der für die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie von besonderer Wichtigkeit ist. Augenscheinlich hatten ihn die Gründe, die er gegen das dritte System ins Feld geführt hatte und die in Wahrheit, um mit LAMBERT zu reden, nur „argumenta ab amore et invidia ducta“ waren[18]), auf die Dauer nicht befriedigt, und so war er dazu geführt worden, dieses System weiter zu entwickeln, in der Hoffnung, dadurch einen strengen Beweis für seinen Lehrsatz 52 zu gewinnen. Auf diese Weise ist er, wie vor ihm SACCHERI, zu dem Begriffe der Grenzgeraden und zu dem Beweise der Existenz eines gemeinsamen Lotes sich nicht schneidender Geraden gelangt[19]) und hat, wie vor ihm LAMBERT, nachgewiesen, dafs dem dritten System eine „Bestimmungsgröfse“ („Parameter, Axe, Potenz“) eigen ist, die man willkürlich annehmen kann[20]). Indem er auf diese unvermeidliche Folge der Annahme einer von zwei Rechten verschiedenen Winkelsumme des Dreiecks hinwies, glaubte TAURINUS dem Euklidischen Systeme die Alleinherrschaft gesichert zu haben, denn „es läfst sich“ meinte er, „gar kein Grund ein-

---

18) Theorie der Parallellinien § 81, P. Th. S. 201.

19) *Euclides ab omni naevo vindicatus.* S. 43—45 und 68—70, P. Th. S. 87—89 und 107—109.

20) Theorie der Parallellinien § 79 und 80, P. Th. S. 199—201.

sehen, dem einen System vor allen andern eine ausschliefsliche Gültigkeit beizulegen, man mufs vielmehr die gleichzeitige Möglichkeit aller Systeme annehmen und es wären also, wenn man sie als geradlinig betrachten wollte, zwischen zwei Punkten unendlich viele gerade Linien denkbar".

3.

Die Geometriae prima elementa vom Jahre 1826.

Dafs der Theorie der Parallellinien die Anerkennung der Mathematiker von Fach nicht zu Teil wurde, hat TAURINUS nicht entmutigt, war er doch selbst mit seiner Erstlingsschrift nicht zufrieden, „an der ihm vieles nicht gefiel"[21]). Dazu kam, dafs er gerade zu dieser Zeit CAMERER's vortreffliche Ausgabe der Euklidischen Elemente (Bd. I. Berlin 1824) kennen lernte und aus dem *Excursus ad El.* I. 29 (S. 402—442), einer noch heute wertvollen Geschichte der Versuche das elfte Axiom zu beweisen, ersah, dafs die Beweismethode, auf die er in seiner Theorie der Parallelen hingewiesen hatte, bereits von SACCHERI und LAMBERT, die wir im Vorhergehenden wiederholt erwähnt haben, angewandt worden war[22]). Der ursprüngliche Zweck der *Elementa* war daher eine neue, verbesserte Darstellung des Systems der Geometrie zu geben, das TAURINUS in der *Theorie der Parallellinien* entwickelt hatte. Wie bei diesen die Nachschrift und der Nachtrag, so ist bei jenen, die nach dem Datum der Vorrede zu urteilen, bereits Ende 1825 druckfertig gemacht worden waren, nach Vollendung des Druckes ein Additamentum hinzugekommen, in dem TAURINUS die Ergebnisse seiner inzwischen angestellten Untersuchungen niedergelegt hat, Untersuchungen, die ihn zur Entdeckung der nichteuklidischen Trigonometrie geführt hatten.

---

21) *Geometriae prima elementa* S. VI. P. Th. S. 248.

22) *Geometriae prima elementa* S. V. P. Th. S. 248. Dafs CAMERER's Excursus in dem von ENGEL und mir herausgegebenen Werke: Die Theorie der Parallellinien von EUKLID bis auf GAUSS nur gelegentlich erwähnt (S. 248 und S. 19), aber nicht gebührend gewürdigt worden ist, liegt daran, dafs ich ihn erst während des Druckes kennen lernte. Vor allem hätte daselbst in der Einleitung S. III—IV hervorgehoben werden müssen, dafs schon CAMERER mit grofsem Nachdruck und tiefem Verständnis auf die Untersuchungen von SACCHERI und LAMBERT hingewiesen hat und dafs daher BELTRAMI für jenen, STÄCKEL für diesen nur als Nachentdecker gelten können.

CAMERER's *Excursus* enthält auch noch eine Reihe weiterer für die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie wichtiger Literaturangaben, auf die ich bei andrer Gelegenheit eingehen zu können hoffe.

Auf die Einleitung (S. III—VI) folgen entsprechend den ersten Elementen der Geometrie die Geometriae prima elementa; sie enthalten nach einander 32 Definitiones, 2 Postulata, 6 Axiomata und 26 Propositiones; die 26te ist Euklids elftes Axiom. Den Schwerpunkt bildet die Propositio XXIV: „Omnis trianguli rectilinei tres anguli duobus rectis aequales sunt." Der Beweis wird apagogisch geführt. Bei dem Fall, daſs die Summe der Dreieckswinkel gröſser als 2 Rechte vorausgesetzt wird, benutzt Taurinus Legendre's Methode der Aneinanderreihung congruenter Dreiecke[23]). Bei dem Fall, daſs diese Summe kleiner als 2 Rechte vorausgesetzt wird, zeigt er zuerst, daſs diese Voraussetzung, falls sie bei einem einzigen Dreieck wirklich erfüllt ist, für jedes Dreieck gilt, beweist darauf die Existenz der Lobatschefskij'schen Grenzgeraden und leitet endlich die Existenz des absoluten Maſses her, dessen Willkürlichkeit bedingt, daſs es unendlich viele geometrische Systeme giebt, in denen die Summe der Winkel des Dreiecks kleiner als zwei Rechte ist. Aus dieser „Vielheit der möglichen Systeme" folgert er endlich, wie in dem Nachtrage zu der Theorie der Parallellinien, die Unzulässigkeit der Annahme eines solchen geometrischen Systemes.

Es folgen (S. 43—64) Observationes, von denen diejenigen zur Propositio XXIV (S. 53—64) am wichtigsten sind[24]). Taurinus betont hier abermals, daſs die „neue Geometrie" in sich widerspruchslos sei, giebt die bei ihr geltende Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks und macht schlieſslich den Versuch eine die „gesamte Geometrie", also alle drei Hypothesen über die Winkelsumme, umfassende Trigonometrie herzuleiten. Sind nämlich α, β, γ die durch eine constante Linie $2\pi R$ dividirten Seiten a, b, c eines Dreiecks, und ist A der der Seite a gegenüberliegende Winkel, so setzt er die Formel an:

$$A = \frac{\operatorname{arc}\cos\left(\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}\right)}{\frac{\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{C(2S+C)}+1},$$

in der S die halbe Summe der Seiten und C eine willkürliche Constante bedeutet, und leitet daraus (S. 58—64) eine Reihe von Sätzen ab, die in der „neuen Geometrie" gelten sollen. Wenn auch ein groſser Teil dieser Sätze richtig ist, so muſs doch dieser Versuch einer nichteuklidischen Trigonometrie als durchaus miſsglückt bezeichnet werden.

---

23) Legendre, *Élémens de Géométrie*, zweite Ausgabe, Paris 1799, Propositio XIX.

24) Vergl. P. Th. S. 269—270.

TAURINUS fährt jetzt fort: „Dies war bereits gedruckt, und es blieb mir nur noch übrig, meine Ansicht über das wahre Wesen dieser Geometrie vorzubringen, da gelangte ich endlich zu der Gewifsheit, dafs sich diese meine Ansicht wirklich beweisen läfst. Von Anfang an hatte ich nämlich die Vermutung gehegt, dafs eine solche Geometrie gewissermafsen die Umkehrung der sphärischen sei, dafs sie Logarithmen mit sich bringe und sich aus der allgemeinen Formel der sphärischen Geometrie herleiten lasse, und ich würde mich darüber wundern, dafs ich eine Sache, die so klar ist und die für jedermann auf der Hand liegt, nicht früher durchschaut habe und so grofse Weitläufigkeiten nötig hatte, wenn ich mich nicht erinnerte, dafs gerade Dinge, die ganz selbstverständlich erscheinen, oft sogar bedeutenden Männern lange verborgen geblieben sind. Die Formel

$$A = \text{arc}\cos\left(\frac{\cos\alpha i - \cos\beta i \cdot \cos\gamma i}{\sin\beta i \cdot \sin\gamma i}\right) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

wird eine Geometrie bestimmen, bei der alle Dreiecke weniger als zwei Rechte enthalten, wenn nämlich für den imaginären Cosinus oder besser für den Cosinus des imaginären Bogens irgend eine Zahl gesetzt wird, die gröfser als die Einheit ist. Dabei müssen jedoch von den Zahlen α, β, γ je zwei zusammen gröfser als die dritte sein: ich denke mir nämlich, dafs diese Zahlen die durch eine gewisse constante Linie R geteilten Seiten eines Dreiecks sind [während A den der Seite a gegenüberliegenden Winkel bedeutet]."

Diese Zeilen zeigen, dafs TAURINUS am Anfange des Jahres 1826 durch eine geniale Intuition zu der fundamentalen Entdeckung gelangt war, dafs die Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie aus denen der sphärischen Trigonometrie hervorgehen, wenn man den Radius der Kugel imaginär setzt. Ich habe bei einer andern Gelegenheit darauf hingewiesen[25]), dafs LAMBERT diesem Gedanken schon sehr nahe gewesen war, indem er folgende Bemerkung machte[26]):

„Hierbey scheint mir merkwürdig zu seyn, dafs die zwote Hypothese statt hat, wenn man statt ebener Triangel sphärische nimmt, weil bei diesen sowohl die Summe der Winkel gröfser als 180 Gr. als auch der Überschufs dem Flächenraume des Triangels proportional ist. Noch merkwürdiger scheint es, dafs, was ich hier von den sphärischen Triangeln sage, sich ohne Rücksicht auf die Schwierigkeit der Parallellinien erweisen lasse, und keinen andern Grundsatz voraussetzt, als dafs jede durch den Mittelpunkt der

25) P. Th. S. 252.

26) Theorie der Parallellinien § 82, P. Th. S. 145 und 202—203.

Kugel gehende ebene Fläche die Kugel in zween gleiche Theile theile. Ich sollte daraus fast den Schluss machen, die dritte Hypothese komme bei einer imaginären Kugelfläche vor. Wenigstens muſs immer etwas seyn, warum sie sich bey ebenen Flächen lange nicht so leicht umstoſsen läſst, als es sich bey der zwoten thun lieſs."

Selbstverständlich soll durch die Anführung dieser Äuſserung Lambert's Taurinus' Verdienst nicht im mindesten geschmälert werden. Er war so fast mühelos zu einer Einsicht gelangt, die sich Lobatschefskij[27]) und Johann Bolyai[28]) erst durch lange und harte Arbeit erkämpft haben, indem sie die nichteuklidische Geometrie systematisch entwickelten und schlieſslich zu den Formeln der zugehörigen Trigonometrie gelangten[29]). Auch für Gauss scheint dasselbe zu gelten, da er in einem Briefe an Wolfgang Bolyai vom 6. März 1832 sich dahin äuſsert, daſs der Weg, den dessen Sohn Johann eingeschlagen habe, fast durchgehends mit seinen eigenen Meditationen übereinstimme[30]).

Taurinus hat sich aber nicht damit begnügt, die Formeln der Trigonometrie in der, wie er sich ausdrückt, logarithmisch-sphärischen Geometrie entdeckt zu haben, er hat vielmehr in einem Additamentum seiner Elementa (S. 69—74) diese Formeln zur Lösung verschiedener geometrischer Aufgaben angewandt und ist bis zu der Berechnung des Umfanges und Inhaltes des Kreises, der Oberfläche und des Volumens der Kugel vorgedrungen. Wenn man also auch seine Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie einem glücklichen Zufall zuschreiben will, so hat er doch durch sein Additamentum gezeigt, daſs er diesen Zufall zu würdigen und zu benutzen verstand, und das wird man ihm hoch anrechnen, ohne ihm freilich in der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie den-

---

27) Vergl. Engel, a. a. O. S. 371—373 und S. 392—393 und P. Th. S. 240.

28) P. Th. S. 241—242.

29) Daſs diese Formeln in diejenigen der sphärischen Trigonometrie übergehen, wenn man den Radius der Kugel imaginär setzt, scheinen Lobatschefskij und J. Bolyai erst nachträglich erkannt zu haben. Jener bemerkt es am Schlusse seiner Abhandlung: О НАЧАЛАХЪ ГЕОМЕТРІИ (Über die Anfangsgründe der Geometrie) vom Jahre 1829 (siehe Engel, a. a. O. S. 65), dieser sagt darüber in seiner Appendix kein Wort, aber in dem zweiten Bande des Tentamen (Maros-Vásárhely 1833) giebt sein Vater Wolfgang eine ausführliche Darstellung dieser Entdeckung Johann's (S. 380—385); in seinem Kurzen Grundriss vom Jahre 1851 S. 85—86 ist er darauf zurückgekommen; hiernach ist die bezügliche Stelle P. Th. S. 146 zu berichtigen.

30) Vergl. P. Stäckel, Mitteilungen aus dem Briefwechsel von Gauss und W. Bolyai, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. Jahrgang 1897. S. 6—7.

selben Rang wie GAUSS, LOBATSCHEFSKIJ und J. BOLYAI zuerkennen zu wollen, denn bei TAURINUS vermifst man vor allem diejenige Freiheit der Auffassung der „neuen Geometrie", zu der aufser den eben genannten Forschern auch sein Onkel SCHWEIKART gelangt war.

Anders lautete das Urteil der Zeitgenossen. „In der Periode von 1780—1830 waren alle Beweisversuche [für das elfte Axiom] gescheitert, und man war schliefslich dahin gelangt, die Beschäftigung mit der 'berüchtigten' fünften Forderung als Vorrecht unklarer Köpfe anzusehen und mit den Bemühungen um die Quadratur des Kreises auf eine Stufe zu stellen. Dieses Vorurteil war so stark, dafs, um mit HOÜEL zu reden, selbst ein Mann von so imposanter Autorität wie GAUSS mit seinen Untersuchungen nicht hervortrat, 'weil er das Geschrei der Boeoter scheute'."[31]) Die Anerkennung, auf die TAURINUS bei den Mathematikern von Fach gehofft hatte, blieb aus. Augenscheinlich hatte TAURINUS die klare Erkenntnis, welch wesentlichen Fortschritt in der Parallellentheorie seine Elementa bedeuteten. Um so gröfser war seine Enttäuschung, und in Unmut und Bitterkeit hat er den Rest der auf seine eigenen Kosten gedruckten Auflage der Elementa den Flammen überliefert[32]).

Von seiner Stimmung in der folgenden Zeit giebt ein Brief Zeugnis, den er am 29. Dezember 1829 an GAUSS richtete:

Euer Hochwohlgeboren

werden es einem lebhaften wissenschaftlichen Eifer, sowie dem unbegränzten Vertrauen, mit welchem mich Ihre unsterblichen Verdienste stets erfüllt haben, zu gute halten, wenn ich mich aufs neue mit einer dringenden Bitte an Sie wende: denn Sie erinnern Sich ohne Zweifel, dafs ich schon einmal vor längerer Zeit Ihr Urtheil zu erfahren wünschte über einen Gegenstand, der mich damals lebhaft beschäftigte, nemlich die Theorie der Parallellinien. Sie hatten damals die Güte mich mit einer baldigen Antwort zu erfreuen und mir sehr interessante und belehrende Mittheilungen zu machen, deren Werth ich sehr wohl erkenne: dabei behielten Sie Sich aber vor, von denselben „keinen öffentlichen oder zur Öffentlichkeit führenkönnenden" Gebrauch zu machen. Da ich nun seitdem doch zwei Versuche über diesen

31) P. Th. S. 239.

32) So kommt es, dafs „die Elementa zu den seltensten Schriften gehören, welche die Bücherkunde aufzuweisen hat", P. Th. S. 251. Die dort gemachten Angaben bedürfen jedoch insofern der Berichtigung, als auch die Königliche Bibliothek in Berlin die Elementa besitzt und als sie in ROGG's Handbuch der mathematischen Literatur, Erste Abtheilung. Tübingen 1830, S. 361 erwähnt werden.

Gegenstand bekannt gemacht habe, es hat mich seitdem oft der Gedanke beunruhigt, Ihr Misfallen dadurch erregt, oder mich in Ihren Augen nicht hinlänglich gerechtfertigt zu haben[33]). Ich habe Ihnen bemerkt, dafs die Idee einer möglichen Entwicklung eines bisher unbekannten geometrischen Systems mir keineswegs ganz unbekannt war, da ich sie, aber freilich auch nicht mehr, schon einige Jahre früher von Pr. Schweikart mitgetheilt erhalten hatte; die mir auch so lange eine Hieroglyphe blieb, bis ich zufällig selbst veranlasst wurde, mich mit der Th. d. P. zu beschäftigen. Ich darf nun hinzufügen, dafs ich das ganze Problem eigentlich schon von Anfang gewissermaassen durchschaut hatte: denn sobald ich bemerkt hatte, dafs die Annahme einer Winkelsumme $> 180^0$, consequent verfolgt, auf eine sphärische Geometrie führt, war es mein erster Gedanke, dafs dem entgegengesetzten Falle auch eine Bedeutung gegeben werden könne, und ich vermuthete sogleich, dafs diese Hypothese mit der wechselseitigen Beziehung zwischen Kreisbogen und Logarithmen zusammenhängen müfste. Sie werden mir verzeihen, wenn ich dem Drange, mir so wichtig und interessant scheinende Wahrheiten, soweit ich sie mit Recht für mein Eigenthum halten zu dürfen glaubte, der Welt nicht vorzuenthalten, nicht widerstand. Der Erfolg bewies mir, dafs Ihre Autorität dazu gehört, ihnen Anerkennung zu verschaffen, und dieser erste schriftstellerische Versuch ist aus Übereilung, anstatt wie ich gehofft hatte, mich zu empfehlen, für mich eine reiche Quelle von Unzufriedenheit geworden. Zwar dafs man meine Theorie so gut wie gar nicht beachtet, ihr nicht einmal das Verdienst zuerkannt hat, eine Widerlegung aller andern zu enthalten und seitdem mehrere, selbst Crelle, mit neuen unhaltbaren Theorieen aufgetreten sind, würde mich mehr freuen als betrüben: allein ich sehe mich in die Nothwendigkeit versetzt, mir durch ein gründliches, an Inhalt und Form gleich gediegenes Werk die Achtung erst zu erwerben, die mir meine ersten Versuche unmöglich verschafft haben können: und so nöthigt mich der erste Schritt auf einer Bahn fortzuschreiten, welche ich vielleicht nicht hätte betreten sollen.

---

33) Wie schon S. 412 erwähnt wurde, hatte sich Taurinus in der Vorrede zu der Theorie der Parallellinien (S. XIII) auf Gauss berufen, und ebenso hatte er in der Vorrede der Elementa (S. V—VI) Gauss erwähnt und ihn inständigst gebeten, seine Ansichten über die Parallelentheorie zu veröffentlichen, ein Verfahren, das gegenüber dem ausdrücklichen Wunsch von Gauss nicht unbedenklich erscheint, wenn auch Taurinus zu seiner Rechtfertigung sich darauf hätte berufen können, dafs er nur Gauss' Urteil über seine, Taurinus', Arbeiten, dagegen nicht Gauss's Äufserungen in Betreff der „Nichteuklidischen Geometrie“ veröffentlicht habe.

Vielleicht irre ich mich nicht, wenn ich glaube in der Hydrodynamik einen dankbaren Stoff gefunden zu haben. — — —

Den Rest des Briefes, in dem TAURINUS seine Ansichten über den „hydrodynamischen Stofs“ entwickelt, unterdrücken wir und bemerken nur noch, dafs er sich später eifrig mit Hydrodynamik beschäftigt und auf eine Reihe von Erfindungen in diesem Gebiete Patente genommen hat, die aber alle nutzlos blieben, da ihm die Mittel fehlten, sie praktisch ins Werk zu setzen[34]).

GAUSS hat weder auf diesen Brief noch auf einen vierten vom 1. October 1832 geantwortet, der für unsere Zwecke belanglos ist.

Ganz hat es übrigens TAURINUS an Anerkennung nicht gefehlt. Der bekannte Physiker GEORG SIMON OHM (1788—1854), der von 1817 bis 1826 Oberlehrer am Gymnasium zu Köln war, und der sich, wie seine Arbeit: Grundlinien zu einer zweckmässigen Behandlung der Geometrie, Erlangen 1817 zeigt, eingehend mit den Grundlagen der Geometrie beschäftigt hatte, antwortete auf die Zusendung der Elementa mit einem freundlichen Briefe vom 14. April 1826. „Die Analogien“, schreibt OHM, „die Sie mit dem Namen logarithmisch-sphärische Geometrie bezeichnen, sind überraschend und, wenn ich nicht irre, von mehr als einer Seite her merkwürdig.“ Interessant ist auch, dafs OHM ausdrücklich erklärt, der Beweis der Propositio XXIV sei ihm dunkel, er finde keinen Widerspruch in der Vielheit der Systeme[34]).

Aufzeichnungen, die sich in TAURINUS' Nachlafs gefunden haben und die aus dem Jahre 1835 stammen, zeigen, dafs er später zu seinen geometrischen Untersuchungen zurückgekehrt ist[34]). Wir entnehmen aus ihnen folgende Stelle:

„Die Geometrie behauptet von jeher das Ansehen einer Wissenschaft von höchster Gründlichkeit, von möglichster Kraft der Überzeugung. Ihr Ursprung scheint so tief in dem Geistesvermögen zu liegen, ihr Gang, wie sie Schritt vor Schritt festen Boden gewinnt, so sicher und zuverlässig, dafs sie stets als das Muster wissenschaftlicher Form erschien, und es war den Mathematikern nicht zu verdenken, wenn sie im Gegensatze anderer, auf schwankender Erfahrung oder wechselnder Ansicht beruhender Wissenschaften von der ihrigen eine besonders hohe Meinung hegten.

Indessen scheint dem grossen Ansehen der Geometrie ein mehrfacher Irrthum zu Grunde zu liegen. Es giebt nemlich für die Geometrie eine

---

34) Mitteilung von Pastor FÜRER.

innere und eine äufsere Wahrheit. Jene beschränkt sich darauf, dafs die Geometrie ein in sich selbst beschlossenes, durchaus consequentes System ohne logischen Widerspruch bildet, ohne Frage noch von ihrer Anwendbarkeit auf die Erscheinungen der Aufsenwelt. Diess ist der Standpunkt, von welchem der Mathematiker seine Wissenschaft zu betrachten pflegt: er nennt sie eine reine, von aller Erfahrung unabhängige, auch nicht nothwendig auf sie hinweisende Wissenschaft und diese Eigenthümlichkeit wird häufig als ein besonderer Vorzug hervorgehoben. Soll aber die Geometrie nicht blofs ein müfsiges Erzeugnifs der productiven Einbildungskraft, sondern auch von praktischer Bedeutung sein, so fragt es sich, ob der Geometrie auch äussere Wahrheit zukomme, eine Untersuchung, die nicht mehr rein mathematisch ist. Dieser Übergang von dem reinen Erkennen zur Objectivität, von der Construction der productiven Einbildungskraft zur Bestimmung äufserer Verhältnisse hat von jeher grofse Schwierigkeiten und Zweifel verursacht.

Aber auch abgesehen von dieser eigenthümlichen Schwierigkeit ist die Geometrie noch nicht in der reinen Entwicklung dargestellt, deren sie fähig ist.

Die Geometrie gründet sich überhaupt auf das Gesetz der Coincidenz, welches aber selbst kein Axiom genannt werden kann, und überhaupt hat die Geometrie gar keine Axiome nöthig, diese müssen gänzlich aus ihr verbannt werden. Dieser Grundsatz der Coincidenz besteht darin, dafs die Geometrie die einfachsten Elemente des Raumes, nemlich die Linien, als gleichartig voraussetzt, so, dafs in den Linien eines und desselben Systemes nichts zu unterscheiden ist, als ihre Gröfse. Die Coincidenz ist nicht zu verwechseln mit der Congruenz, welche nicht nur ein Zusammenfallen, sondern auch gleiche Gränzen oder Gleichheit fordert.

Bogen eines und desselben Kreises sind also gleichartig, Kreisbogen und gerade Linien sind ungleichartig, Kreisbogen mit verschiedenen Halbmessern beschrieben, sind nur ähnlicher Art.

Die Analysis, die eine reine Entwicklung der Geometrie möglich macht, leitet aus dieser Bedingung der Coincidenz, ohne welche gar keine allgemeinen Sätze erhalten werden könnten, ein dreifaches System der Geometrie her und erweist die Winkelsumme eines Dreiecks als nothwendige Folge von der dreifachen Art der Linien.

Dagegen klebt der Elementar-Geometrie nach der Methode des Euklid die Unvollkommenheit an, dafs sie nur die geradlinige Geometrie betrachten will, es aber nicht vermeiden kann, da sie an der Anschauung haftet und nicht den rein analytischen Begriff der Linien festhält, alle drei Systeme zugleich bis zu dem Punkte zu betrachten, wo ihr wesentlicher Unterschied

erst recht hervortritt und wo sie völlig auseinander gehen — nemlich da, wo von der Summe der Winkel die Rede ist. Dieſs ist die berüchtigte Lücke in der Geometrie, die soviel Versuche über die Theorie der Parallellinien veranlasst hat. Das Problem besteht hier mathematisch betrachtet in nichts weiter, als in der scharfen Trennung jener drei geometrischen Systeme und hat insofern nicht die mindeste Schwierigkeit. Der Verf. glaubt, dieses Problem mathematisch vollkommen gelöst zu haben, obgleich ihm diese Anerkennung noch nicht zu Theil geworden ist.

Die Mathematiker, welche an seiner Darstellung keine Befriedigung finden möchten, scheinen theils etwas Unmögliches, theils aber mehr zu fordern, als die Mathematik leisten kann.

Sie fordern etwas Unmögliches einmal, weil sie verlangen, man solle ihnen nach dem Begriffe der geraden Linie, den sie von Euklid haben, oder den sie sich auch selbst bestimmen, die Theorie der Parallellinien beweisen. Daher sind sie sehr zufrieden mit dem Beweise, daſs die Winkelsumme des geradlinigen Dreiecks nicht gröſser als zwei Rechte sein könne, wodurch die sphärische Geometrie ausgeschlossen wird, da diese Hypothese immer auf ein Schneiden zweier Linien in zwei Punkten führt, was dem Euklidischen Begriff der geraden Linie widerspricht. Sie verlangen daher für die entgegengesetzte Hypothese einen gleich bündigen Beweis, welcher aber nach der gewöhnlichen Definition der geraden Linien, die ein solches System nicht unbedingt ausschlieſst, eine Unmöglichkeit ist. Stellt man daher eine andere Definition auf, die ohne den allgemein angenommenen Eigenschaften der geraden Linie zu widersprechen, doch eine strenge Scheidung aller drei Systeme möglich macht, so halten sie wohl diese für etwas willkührliches, vorausbedachtes, dem Resultat der Beweisführung vorgreifendes und fühlen sich nicht befriedigt.

Sie verlangen aber auch zweitens etwas Unmögliches, indem sie fordern, daſs man ihnen jenes räthselhafte geometrische System, das weniger als zwei rechte Winkel in jedem Dreiecke enthält, als etwas Absurdes darstelle. Allein dieses System läſst sich nicht vertilgen, es ist schon darum möglich, weil es gedacht werden kann und übrigens von völliger innerer Consequenz. Schon um auch hier die ewige Dreizahl zu ergänzen, muſs es als möglich gedacht werden.

Aber genau betrachtet ist es etwas anderes, was diese Mathematiker, ohne mit sich selbst im Klaren zu sein, fordern. So sehr sie nemlich auf der einen Seite ihre Wissenschaft als eine reine, von aller Erfahrung unabhängige geltend machen möchten, so sehr hängen sie auf der anderen Seite an der Objectivität und behalten stets den Parallellismus zwischen der reinen Anschauung und der Empirie im Auge. Ihre gerade Linie soll

die des gemeinen Lebens sein. Daher werden sie sich auch nicht eher befriedigen, bis man ihnen die objective Bedeutung jenes räthselhaften Systems enthüllt, bis man ihnen beweist, was es mit der Anwendung desselben auf äufsere Verhältnisse für eine Bewandtniss habe.

Diefs ist allerdings die interessanteste Seite des tiefsinnigen Problemes, aber sie gehört nicht mehr der reinen Mathematik an, sondern ist eine Frage der Physik."

Auf diese recht klaren Auseinandersetzungen, die noch heute lesenswert sind, folgen weitschweifige Deduktionen im Stile der Naturphilosophie, die darthun sollen, dafs das rätselhafte dritte System für die Akustik eine entsprechende Bedeutung besitze wie die euklidische Geometrie für die Optik.

4.

J. W. H. Lehmann's Kritik der Theorie der Parallellinien (1829).

Als ich im Jahre 1895 in Gemeinschaft mit F. Engel die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss herausgab, äufserte ich mich dahin (S. 252), „dafs Schweikart und Taurinus ein bis jetzt nicht beachtetes, jedoch sehr beachtenswertes Mittelglied bilden zwischen Saccheri und Lambert einerseits und Gauss, Lobatschefskij und Bolyai andrerseits". Um so gröfser war meine Überraschung, als ich vor kurzem entdeckte, dafs diese Behauptung einer Einschränkung bedarf, da Taurinus' Theorie der Parallellinien im Jahre 1829 von Jacob Wilhelm Heinrich Lehmann (1800—1863) ausführlich besprochen worden ist; die Geometriae prima elementa sind freilich auch Lehmann unbekannt geblieben. Lehmann's Schrift führt den langen Titel:

Mathematische Abhandlungen, betreffend die Begründung und Bearbeitung verschiedener mathematischer Theorieen, nebst Idee eines Systems der Wissenschaft, und einem Anhange, welcher es versucht, die Keplerschen Gesetze und andere Gegenstände der höheren Mechanik nach der antiken, reingeometrischen Methode zu entwickeln. Zerbst, 1829, 8°, XII + 539 S., 4 Tfln.

Es scheint selten zu sein, denn es fehlt sowohl in Poggendorff's Handwörterbuch (Bd. I, Spalte 1411), als in dem von mir aufgestellten Verzeichnisse von Schriften über die Parallelentheorie[35]).

35) P. Th. S. 311 sind Lehmann's Anfangsgründe der höheren Mechanik aufgeführt. Als Gewährsmann ist Hill angegeben und hinzugefügt, dafs sich bei bei diesem die Jahreszahl 1839 finde. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dafs Hill, der die Titel nur abgekürzt angiebt, das Werk vom Jahre 1829 gemeint hat, wonach die Angaben in dem Verzeichnis abzuändern sind.

Taurinus wird zuerst auf S. 269—270 erwähnt. Die betreffende Stelle lautet im Zusammenhange:

„So sehen wir, dafs die Sätze, welche dazu vorbereiten, die Summe aller Winkel eines Vielecks aus der Seitenzahl bestimmen zu können, ohne die Theorie der Parallelen bewiesen werden können. Aber nun, diese Bestimmung der Summe der Winkel selbst vermögen wir nicht ohne die genannte Theorie zu geben; denn sie hängt von der Begründung des Satzes ab, dafs die 3 Winkel eines Dreieckes zusammen 2 *R* betragen.

Bei der Gelegenheit kann ich nicht umhin, auf eine merkwürdige Entdeckung aufmerksam zu machen, womit Saccherius und Lambert im vorigen Jahrhundert, wie es scheint, unabhängig von einander, die Geometrie als Kunst[36]) bereichert haben (siehe Hieron. Saccherii Euclides ab omni naevo vindicatus, Mediol. 1733; Lamberts Untersuchungen über die Theorie der Parallelen, nach seinem Tode herausgegeben von Bernoulli im Leipziger Magazin für Mathem. 2 St. 1786. p. 137 ff. und 3. St. p. 325 ff.). Beide versuchten, unabhängig vom 11. Grundsatze des Euclides, den Satz zu beweisen, dafs die Summe der Winkel eines Dreiecks = 2 *R* sei[37]).

Neuerlich hat indessen Hr. Taurinus in seiner Theorie der Parallellinien (Kölln, 1825), der die ganze Sache mit vielem Fleifse durchdacht und auseinandergesetzt hat, sehr richtig nachgewiesen, dafs dadurch, in völliger Strenge, nach euclidischer Form, nur der Satz bewiesen wird, dafs die Winkel eines Dreiecks zusammen nicht gröfser als 2 *R* sein können. Aber wenn auch nur dieses aus den 28 ersten Sätzen des Euclides ohne weitere Hilfe bewiesen werden kann, so bleibt es immer eine interessante Entdeckung, welche wir in unser System der Geometrie mit Freuden recipiren, und, unserm gefassten Plane gemäfs, in den vor der Theorie der Parallelen vorhergehenden Abschnitt verweisen. Ich theile den Gang des Beweises so kurz als möglich zusammengedrängt mit."

Nachdem dies gesehen ist, bespricht Lehmann (S. 275—277) Taurinus' Vergleichung der drei geometrischen Systeme:

„Herr Taurinus knüpft in der gedachten Schrift an dieses Resultat eine interessante Vergleichung. Er macht darauf aufmerksam, dafs in einem sphärischen Dreieck die Summe der Winkel allemal $> 2R$ ist, und dafs dieser Satz sich gleichfalls ohne die Parallelentheorie darthun lasse. Er setzt

---

36) Lehmann versteht unter „Geometrie als Kunst": „das Bestreben einer logischen Herleitung aus möglichst wenig Axiomen".

37) Wie aus einer Äufserung Lehmann's (S. 3) hervorgeht, verdankt er — ebenso wie Taurinus — die Kenntnis der Schriften von Saccheri und Lambert dem *Excursus* ad El. I. 29 von Camerer.

den Grund des Unterschiedes beider Resultate darein, dafs gerade Linien sich nur in einem [Punkte,] Bogen gröfster Kreise, auf einer Kugelfläche [,] aber einander in zwei Punkten schneiden können. Er fügt zugleich hinzu, dafs sich alle diejenigen planimetrischen Sätze, welche die Theorie der Parallelen nicht voraussetzen, ungeändert auf die Kugelfläche übertragen lassen, wenn man nur statt der geraden Linien Bogen gröfster Kreise, statt der Kreise kleinere Kreise der Kugelfläche setzt, und dafs sich auf diese Art eine sphärische Geometrie erdenken lasse, welche mit der Planimetrie gleichen Schritt halte. Und das ist auch ganz gegründet, und wir sehen einen sehr gelungenen, schon ziemlich weit ausgeführten Versuch dieser Art in den Sphaericis des Theodosius. Der Grund der Ähnlichkeit der ebenen und der sphärischen Geometrie liegt augenscheinlich in der Eigenschaft, welche die ebene mit der Kugelfläche, aber mit keiner andern Fläche gemein hat, dafs alle Theile derselben genau aufeinander passen; dafs aber von der Parallelentheorie an eine Verschiedenheit stattfindet, hängt damit zusammen, dafs ein Stück der Kugelfläche, wenn man es umwendet, nicht mehr auf die alte Fläche pafst, was doch bei der Ebene stattfindet; siehe, was ich darüber schon gesagt habe[38]).

Wenn nun aber Herr Taurinus, auf ähnliche Art, wie schon früher Saccherius (siehe die vorhin angeführte Schrift), weiter fragt, was für eine Geometrie denn das geben würde, wo man setzt, dafs die Summe der Winkel eines Dreiecks kleiner als $2R$ sei, und wenn er anfängt, den Gedanken auszuspinnen, so können wir darüber kein anderes Urtheil fällen, als über die Rechnungen mit imaginären Gröfsen; man kann ein sehr strenges System entwerfen, was erfolgen würde, wenn etwas, was nicht wahr ist, wahr wäre; man wird aber, wenn man auf diesem Wege kein Resultat für reelle Gröfsen erlangt, bald von selbst umkehren, wohl fühlend, dafs man sich mit blofsen Chimären beschäftigt. Wir haben vermittelst der Quadratwurzeln aus negativen Gröfsen manche bedeutende Entdeckungen gemacht, die sich auf reelle Gröfsen beziehen, und die uns sonst vielleicht ewig verborgen geblieben wären; ob man solche Entdeckungen auch durch die Fiction einer Geometrie, worin die Winkel eines Dreiecks $< 2R$, machen könne, darüber wage ich nicht zu entscheiden.

Eine andere Frage aber ist es, ob wir nicht den ohne die Parallelen-

---

38) Der von Lehmann angeführte Grund ist nicht stichhaltig, der wahre Unterschied der parabolischen und der elliptischen Geometrie liegt vielmehr in der Forderung der unendlichen Länge der geraden Linie. Dass es sich so verhält, hatte schon Taurinus richtig erkannt (vergl. seine Theorie der Parallellinien S. 57, sowie die Bemerkung oben S. 413) und sich dadurch, wie schon vor ihm Lambert, als Vorgänger Riemann's erwiesen; vergl. auch P. Th. S. 252.

theorie geführten Beweis, dafs die Winkel eines Dreiecks nicht $> 2R$ sein können, die Winkel eines sphärischen Dreiecks aber $> 2R$ sein müssen, dankbar annehmen und zu einer vollständigen Begründung der Parallelentheorie für die Ebene benutzen sollen. Die Frage kann nur die sein, ob man etwa die Ebene als den Zielpunkt ansehen dürfe, dem sich eine Kugelfläche, wenn ihr Halbmesser wächst, nähert, so dafs die Abweichung kleiner werden kann, als jede gegebene Abweichung, und ob man, dafs eine solche unendliche Annäherung stattfindet, ohne Hülfe des 11ten Grundsatzes des Euclides oder eines aequivalenten Satzes beweisen könnne[39]).

Dafs eine solche unendliche Annäherung wirklich statt findet, wird wol niemand im Ernst bezweifeln; schon die gemeine Betrachtung, wonach man ein Stück der Erdoberfläche, das man mit einemmale übersehen kann, für eben zu halten geneigt ist, leitet darauf. Aber ich leugne, dafs sich ein strenger, kunstmäfsiger Beweis ohne schon begründete Parallelentheorie geben lasse. Denn solcher Beweis müfste etwa auf folgende Punkte hinauslaufen.

Es sei aus dem Puncte C der unbegrenzten Linie AB Fig. 40 ein nach D unbegrenztes Perpendikel CD errichtet. Man schneide nun von CD ein beliebiges Stück CE ab, beschreibe aus E durch C einen Kreis, und lasse nun die ganze Zeichnung sich um die feststehende Linie CD drehen, so ist klar, dafs die Kreisperipherie eine Kugelfläche, die Linie AB aber eine die Kugelfläche berührende Ebene beschreiben werde. Schneidet man von CD ein gröfseres Stück ab, so erhält man eine Kugelfläche, welche der berührenden Ebene näher kommt. Wollten wir nun beweisen, dafs die Kugelfläche sich der Ebene so sehr nähern kann, dafs die Abweichung kleiner wird, als jede gegebene Abweichung, so müfsten wir auch beweisen können, dafs der Kreis sich auf dieselbe Art der geraden Linie AB nähern könne, oder, mit andern Worten, dafs die Entfernung eines Punctes der Peripherie von der geraden Linie AB, in jeder gegebenen Höhe über CD, kleiner werden könne als jede gegebene Gröfse. Aber so lange die Parallelentheorie nicht begründet ist, bleibt es zweifelhaft, ob nicht eine Curve FCG statt finde, welche auf derselben Seite der Linie AB liegt, als der Kreis, und welche AB in C berührt, und welcher sich der Kreis, wenn sein Halb-

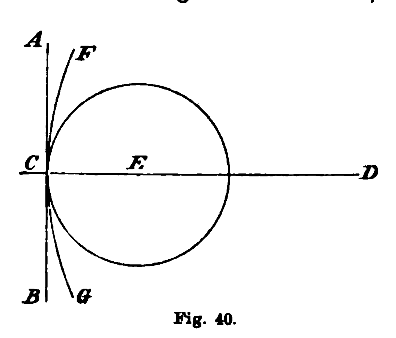


Fig. 40.

39) Mit genau denselben Gedanken hatte sich schon Lagrange beschäftigt und ebenfalls dessen Undurchführbarkeit erkannt; siehe P. Th. S. 211—212.

messer wächst, nähert, ohne sie jemals zu erreichen[40]). Ist aber erst die Parallelentheorie gegründet, dann ist es ein leichtes, aus der gegebenen Entfernung eines Punctes der Peripherie von der Linie CA und von der Linie CD den Halbmesser des Kreises zu finden; das nämlich, was der gegebenen Entfernung des Punctes der Peripherie von der Linie CA noch am Durchmesser fehlt, ist (nach Eucl. 6, 8, Zus.) die 3[te] Proportionallinie zu den beiden gegebenen Entfernungen.

Wir gewinnen also auf diesem Wege nichts zur Begründung der Parallelentheorie für die Ebene."

Ob diese Äufserungen zur Kenntnis von Taurinus gekommen sind, hat sich nicht ermitteln lassen. Dagegen finden sich Lehmann's Mathematische Abhandlungen in der Gaufsbibliothek zu Göttingen, und Randbemerkungen von Gauss zeigen, dafs von diesem das Werk gelesen oder wenigstens durchblättert worden ist. Es ist das auch insofern von Interesse, als man daraus schliessen darf, dafs Gauss, wenn nicht schon früher, im Jahre 1829 von den Untersuchungen Saccheri's und Lambert's erfahren hat.

---

40) Die Begriffe des Grenzkreises und der Grenzkugel, die uns hier entgegentreten, fehlen bei Taurinus. Sie werden wohl zum ersten Male in Wachter's *Demonstratio Axiomatis in Euclideis undecimi* (Danzig 1817) eingeführt. Die Angabe P. Th. S. 38, dafs bereits Saccheri zu den Oricyklen Lobatschefskij's gelangt sei, ist irrtümlich; dieser Irrtum ist bereits ebendaselbst in den „Nachträgen und Berichtigungen" S. 318 richtig gestellt worden.

Kiel, im April 1899.

JOHANNES SCHEUBEL,

EIN DEUTSCHER ALGEBRAIKER DES XVI. JAHRHUNDERTS

VON

H. STAIGMÜLLER
IN STUTTGART.

Wenn heute die Wissenschaften ein Gemeingut aller Kulturvölker sind, und wenn sie heute ihre Fortschritte nur dem Zusammenwirken aller Kulturvölker verdanken, so liegt doch die Zeit nicht allzufern hinter uns, wo dieselben noch einen nationalen Charakter trugen, und diese oder jene Wissenschaft eben nur gerade bei diesem oder jenem Volke vorzugsweise Pflege und Förderung fand. So zeigt z. B. die Geschichte, daſs die gröſste mathematische Geistesthat des XVI. Jahrhunderts, die Bewältigung der kubischen Gleichung, ausschlieſsliches Eigentum des italienischen Volkes ist, während im gleichen Jahrhundert in Deutschland selbst die führenden Geister auf dem Gebiete der Algebra sich der Hauptsache nach mit dem Ruhme begnügen müssen, ihren Volksgenossen das übermittelt zu haben, was andere Kulturvölker zum Teile schon längst besaſsen. Doch wie hätte man das auch anders erwarten können? Die an die Reformation sich anschlieſsenden Zeit- und Streitfragen absorbierten das ganze wissenschaftliche Interesse in Deutschland. Bezeichnend hierfür ist es, daſs der bekannteste deutsche Algebraiker des XVI. Jahrhunderts, Michael Stifel, durch seine mystischen Zahlenspielereien zur rein wissenschaftlichen Beschäftigung mit Arithmetik und Algebra hingeleitet wurde und später wieder von dieser zu jenen zurückkehrte. Ja trotz seiner teilweise wirklich genialen Leistungen auf dem Gebiete der Algebra und Zahlentheorie und trotz des bedenklichen Schiffbruchs seiner Zahlenmystik[1]) maſs Stifel der „Wortrechnung“ einen ungleich höheren Wert bei als der rein wissenschaftlichen Algebra.

Wenn nun auch stets eine Zeit groſser wissenschaftlicher Leistungen und Erfolge den Kulturgeschichtsforscher in erster Linie anziehen wird, so darf er sich doch auch nicht der Darstellung von Perioden entziehen, in denen keine Marksteine der Entwicklung einer Wissenschaft zu geschichtlicher Forschung anlocken. Ja die Darstellung einer solchen Zeit bietet ihre eigenen Reize dar; handelt es sich hierbei doch sehr oft darum, die unscheinbaren Samenkörner einer künftigen Entwicklung bloſszulegen, zum mindesten aber gilt es die Gründe aufzudecken, welche jene Stagnation ver-

1) Stifel „berechnete“ aus den Zahlen des Buches Daniel den Weltuntergang auf den 19. Oktober 1533 früh 8 Uhr.

ursachten. So sehr drum auch z. B. in der Geschichte der Algebra des XVI. Jahrhunderts Italien die Blicke des Kulturhistorikers auf sich ziehen wird, so wenig darf derselbe sich dadurch verleiten lassen, die gleichzeitige deutsche Algebra zu übersehen. Er hat beiden seine Zeit und sein Interesse gleichermaſsen zu widmen, muſs er sich auch zum Voraus sagen, daſs er hier ungleich weniger Neues zu Tage zu fördern im Stande sein wird als dort. — Nicht zuletzt aber war es ein persönliches Interesse, das mich bei der Wahl meines Themas leitete, galt es doch einen früheren Lehrer der Universität Tübingen, die mir selbst einst „alma mater" war, einer fast völligen Vergessenheit zu entreiſsen und für ihn denjenigen Platz in der Geschichte der deutschen Algebra in Anspruch zu nehmen, der ihm nach meinem Dafürhalten unbedingt gehört.

Gerhardt, der in seiner „Geschichte der Mathematik in Deutschland" Scheubel nicht einmal erwähnt, kommt bei der Behandlung der Algebra im XVI. Jahrhundert zu dem Schlusse: „Christoff Rudolff und Michael Stifel, die hervorragendsten deutschen Algebristen im 16. Jahrhundert, gehörten zu keiner öffentlichen wissenschaftlichen Korporation, und es wird sich kaum nachweisen lassen, daſs in dieser Zeit die Algebra auf den Universitäten Deutschlands Gegenstand öffentlicher Vorträge war." Möge es den folgenden Zeilen gelingen den Nachweis zu liefern, daſs in Johannes Scheubel ein Vertreter einer deutschen Hochschule jenen beiden als gleichberechtigt zur Seite zu stellen ist, der es auch versuchte der Algebra akademisches Bürgerrecht zu verschaffen.

Von Vorarbeiten, welche über das Maſs einer beiläufigen Erwähnung Scheubel's oder einer nur oberflächlichen Darstellung seiner Leistungen hinausgehen, habe ich nur zwei anzuführen. Erstens eine kleine biographische Skizze Scheubel's von der Meisterhand Bohnenberger's[2]) und zweitens die einschlägigen Partien in Treutlein's verdienstvollen Arbeiten über „das Rechnen im 16. Jahrhundert" und über „die deutsche Coſs"[3]). Doch ist jene Skizze Manuskript geblieben und umfaſst nicht einmal ganz $2\frac{1}{2}$ Quartseiten, und mit Treutlein's Darstellung und Wertung der Leistungen Scheubel's kann ich mich in keiner Weise einverstanden erklären, so daſs diese Vorarbeiten selbst für mich mitbestimmend waren bei der Wahl meines Themas.

Ist auch heute in der Geschichte der Mathematik Scheubel beinahe vergessen, so ermangelte er dagegen keineswegs der verdienten Anerkennung

---

2) Cod. hist. Fol. 657 der Kgl. öffentl. Bibliothek in Stuttgart. Bohnenberger starb 1831 als Professor der Mathematik, Physik und Astronomie in Tübingen.

3) Zeitschrift f. Math. u. Ph. Suppl. zu den Jahrgängen XXII u. XXIV.

seiner Zeitgenossen, dafür ist uns Bürge der berühmte, vielseitige und für das damalige gelehrte Studium so einflufsreiche Humanist PIERRE DE LA RAMÉE, der in seinen „*scholae mathematicae*" die berühmtesten Vertreter der Mathematik an deutschen Hochschulen aufzählt, und dabei auch SCHEUBEL[4]) nennt. Ebenso wissen wir, dafs SCHEUBEL von MÄSTLIN[5]), dem Lehrer und Freunde KEPLER's, besonders hochgehalten wurde[6]). Und der bekannte Basler Polyhistor PANTALEON nahm SCHEUBEL noch zu dessen Lebzeiten in sein deutsches Heldenbuch auf[7]). Aber nur zu leicht ist es verständlich, dafs neben der Algebra eines CARDANO und eines VIETA diejenige SCHEUBEL's in den Hintergrund treten und so ihr Autor der Vergessenheit anheimfallen mufste.

JOHANNES SCHEUBEL (JOANNES SCHEUBELIUS[8]), JOHANN SCHEYBL[9])) wurde am 13. August 1494[10]) in Kirchheim unter Teck geboren, einem am Nordfufs der schwäbischen Alb gelegenen und für damalige Zeit stark befestigten Städtchen, das schon 1381 an Württemberg gekommen war. Da das älteste Kirchenbuch in Kirchheim u. T., ein Taufbuch, nur bis zum Jahre 1558 zurückreicht[11]), war es mir nicht möglich, über SCHEUBEL's Familie irgend etwas Sicheres auffinden zu können. Den ersten Unterricht empfing SCHEUBEL jedenfalls in seinem Heimatstädtchen[12]), das sich gerade damals einer für jene Zeit hervorragend guten Schule erfreute[13]). Später

---

4) P. RAMI, *scholarum mathematicarum* lib. XXXI. Basil. 1569. p. 66. (lib. II).

5) MÄSTLIN bezog noch zwei Jahre vor SCHEUBEL's Tod die Universität Tübingen.

6) Vergl. BOHNENBERGER a. a. O.

7) *Prosopographiae heroum atque illustrium virorum totius Germaniae pars tertia; Authore* HENRICO PANTALEONE *Physico Basilensi*. Basileae 1566. p. 459.

8) So schreibt sich SCHEUBEL in denjenigen seiner Werke, welche er in lateinischer Sprache herausgab, ferner in den beiden lateinischen Eingaben, welche sich von ihm erhalten haben, sowie in der auf Seite 447, Anmerkung 47 erwähnten lateinischen Widmung.

9) So schreibt sich SCHEUBEL in dem einzigen Werke, das er in deutscher Sprache erscheinen liefs.

10) Vergl. „HARTMANN, Magisterbuch" Manuskript der Kgl. öffentl. Bibl. in Stuttgart: Cod. hist. Q. 309a u. b. ZELLER fügt dem Geburtsdatum SCHEUBEL's noch das Wort „*gemellus*" (Zwilling) bei. Vergl. ZELLER, Merkwürdigkeiten der Universität Tübingen. Tübingen 1743. p. 495.

11) Diese Notiz verdanke ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn Stadtpfarrverweser HERRLINGER in Kirchheim u. T.

12) Vergl. PANTALEON a. a. O.: „*in patria*".

13) Schon im Jahre 1249 existierte in Kirchheim u. T. eine Schule. Ums Jahr 1500 wird dem dortigen Schulmeister zur Pflicht gemacht, einen Baccalaureus als Provisor zu halten, desgleichen wird im Jahre 1522 der Schulmeister METZGER

bezog SCHEUBEL die Universität Wien[14]). Diese Wahl kann uns nicht besonders auffallen, wenn wir bedenken, in welch engen Beziehungen Württemberg von 1520 – 1534 zur Habsburgischen Dynastie stand[15]). Wie an keiner zweiten deutschen Hochschule blühte damals in Wien das Studium der Mathematik, und hier legte SCHEUBEL auch den Grund zu seinem hervorragenden Wissen in den mathematischen Disziplinen. Besonders für die Frage nach den Quellen, aus denen SCHEUBEL seine Kenntnisse in Arithmetik und Algebra schöpfte, ist der Aufenthalt desselben an der Wiener Hochschule und überhaupt in Wien von Bedeutung[16]). Auch werden wir nicht fehlgehen, wenn wir annehmen, daſs neben dem Studium der Mathe-

---

verpflichtet, „allweg einen geschickten und gelehrten Provisor zu halten". Vergl. PFAFF, Versuch einer Gesch. des gel. Unterr. in Württemberg etc. Ulm 1842. p. 9.

14) „als er die fundament begriffen, zoge er gehn Wien, und studieret daselben in freyen Künsten. Weil auch zu seiner Zeit die Mathematischen Künst daselben fleiſsig fürgelesen, hat er sich fürnemlich auff die Arithmeticā uñ Geometrey begeben, und grossen verstand darinen erlanget." Vergl. die deutsche Ausgabe von PANTALEON's deutschem Heldenbuch: Der dritte und letste Teil Teutscher Nation Warhafften Helden etc. durch HEINRICH PANTALEON, Basel 1578, p. 443. Die kurze Biographie, welche PANTALEON von SCHEUBEL bietet, stützt sich der Hauptsache nach auf ein Gedicht, welches CELLIUS (HORN), der spätere Tübinger Professor, als etwa 19jähriger Student in Tübingen verfaſste und PANTALEON zustellte. Diese Epigramme, deren Inhalt somit im wesentlichen wohl sicher auf SCHEUBEL selbst zurückgeht, sind in der lateinischen Ausgabe von PANTALEON's Heldenbuch enthalten. Wie von den übrigen behandelten Personen giebt PANTALEON auch von SCHEUBEL ein Bildnis; doch stellen sich diese Bilder der Hauptsache nach als frei erfunden dar, und stimmen nicht einmal in den verschiedenen Auflagen völlig überein. Zwar erscheint es kaum glaublich, daſs bei einem noch Lebenden PANTALEON dem Zeichner nicht wenigstens eine briefliche Beschreibung zur Verfügung stellte, und eine solche hätte er sich sehr leicht mit jenen Epigrammen durch CELLIUS verschaffen können. Das Bild SCHEUBEL's bei PANTALEON zeigt ein schön und scharf geschnittenes, von einem langen Vollbarte umrahmtes Gesicht.

Da die Wiener Matrikeln nicht veröffentlicht sind, war es mir nicht möglich, genau die Zeit festzulegen, während welcher SCHEUBEL in Wien studierte. Spätere Daten berechtigen zu der Vermutung, daſs SCHEUBEL jedenfalls nicht mehr allzu jung war.

15) Der schwäbische Bund hatte nach der Vertreibung Herzog ULRICH's im Jahre 1520 Württemberg gegen Ersatz der Kriegskosten Kaiser KARL V. zur Verfügung gestellt, der es 1522 seinem Bruder, dem späteren König FERDINAND, übertrug. Erst nach der Schlacht bei Lauffen (1534) kehrte ULRICH wieder als Herr in sein Erbland zurück.

16) Da der mir hier zur Verfügung stehende Raum es mir nicht erlaubt, später bei der Besprechung von SCHEUBEL's Algebra speciell auf deren Quellen einzugehen, möchte ich hier ganz besonders darauf hinweisen, wo dieselben zu suchen sind.

matik die damals ganz Deutschland aufs Tiefste bewegenden religiösen Zeit- und Streitfragen SCHEUBEL in ihren Bannkreis zogen, und daſs hierbei SCHEUBEL sich der neuen Lehre zuneigte; nur dies kann ihn veranlaſst haben, sich von Wien nach Wittenberg zu begeben[17]). Doch scheint SCHEUBEL sich nur vorübergehend in Wittenberg aufgehalten zu haben, wenigstens finde ich ihn nicht als Studierenden eingeschrieben[18]). Von Wittenberg begab sich SCHEUBEL zur Fortsetzung seiner mathematischen Studien an die Universität Leipzig[19]), die sich damals in den Fächern, welche für SCHEUBEL maſsgebend waren, eines nicht unbedeutenden Rufes erfreute, und zwar lieſs er sich hier im Wintersemester 1532 immatrikulieren[20]). Doch war seines Bleibens in Leipzig nicht allzulange, schon im März 1535 finden wir SCHEUBEL als Studierenden[21]) in Tübingen[22]), und wohl waren es wiederum Gründe, welche mit der damaligen religiösen Bewegung[23]) zusammenhingen, die SCHEUBEL zu diesem Wechsel bestimmten; ja dieser Schritt und die dadurch bedingte spätere Wirksamkeit SCHEUBEL's in Tübingen beweisen uns, daſs derselbe nicht bloſs zur neuen Lehre sich hinneigte, sondern ein entschiedener Anhänger derselben geworden war[24]).

---

17) Vergl. die Epigramme des CELLIUS: Leucorea = Wittenberg.

18) Vergl. *Album Academiae Vitebergensis*. Ed. FÖRSTEMANN, Lips. 1841.

19) Vergl. PANTALEON a. a. O.

20) Vergl. *Codex dipl. Sax. Reg.* Zweiter Hauptteil, XVI. Bd. Die Immatr. von 1409—1559, p. 609: „1532 Wintersemester . . . Natio Bavarorum: JOANNES SCHEUBEL de Kirchhain . . .“.

21) Fällt uns die Erscheinung eines 41jährigen Studenten vom heutigen Standpunkte aus betrachtet zunächst auf, so liegt doch für die damaligen Zeiten nichts so ganz auſserordentliches darin.

22) Vergl. Urkunden zur Gesch. d. Univ. Tübingen aus den Jahren 1476 bis 1550. Tübingen 1877, und zwar Matr. Univ. Tub. 1477—1545, p. 658: „1535 Martii . . JOHANNES SCHEYBEL ex Kirchen sub Theckh . .“ Diese Urkunden, deren Vorrede mit einem R. unterzeichnet ist, wurden von dem damaligen Oberbibliothekar Professor Dr. RUDOLF VON ROTH veröffentlicht.

23) Während Herzog GEORG VON SACHSEN († 1539) mit aller Macht die neue Lehre von seiner Hochschule Leipzig fern zu halten suchte, hatte der durch die Schlacht bei Lauffen wieder in den Besitz seines Landes gelangte Herzog ULRICH in den letzten Monaten des Jahres 1534 mit der Reformation der Universität Tübingen begonnen, in erster Linie unterstützt durch jenen GRYNAEUS, der auch in der Geschichte der Mathematik als Herausgeber des ersten griechischen EUKLID's einen Ehrenplatz einnimmt.

24) Und zwar der streng lutherischen Richtung. Wie hätte er es auch sonst später zum Professor an der Universität Tübingen bringen und vor allem solcher bleiben können, jener Universität, welcher der noch neben SCHEUBEL wirkende Märtyrer der neuen Lehre, PHILIPP APIAN, nicht rechtgläubig genug war, und welche später aus demselben Grunde wie für APIAN, so auch für ihren gröſsten

Hier in Tübingen erwarb sich Scheubel 1540 die Magisterwürde[25]), und hier brachte endlich das Jahr 1544 dem nun 50jährigen Magister die ersehnte Stellung als Docent der Mathematik. Noch handelte es sich aber nicht um eine ordentliche Professur, sondern nur um einen Lehrauftrag in Arithmetik und Geometrie. In der am 20. Juli 1544 von Herzog Ulrich erlassenen Ordnung der Artistenfakultät in Tübingen lesen wir unter anderem: „Dieweil dann Mathematica nit die geringst vnder den bonis artibus ist, So soll fürterhin derselbigen Professor auch im Rat der Artisten Facultet gezogen vnd gebraucht werden, Vnd alweg die Materi, so er zu lesen fürnimpt, mit rat vnd vrtail der Artisten Facultet vnder hand nemen, damit er nit allain den Zuhörern, Sonder auch allen guten Künsten nutz, fürderlich und fürstendig sein meg. Darbey dann der Imser als geschickt vnd taugenlich in seiner besoldung gelassen werden vnd alweg sein stund vmb Zwolff Vr zu mittag haben soll. . . . Mit Maister Johan Scheüblin soll gehandlet werden, das er vmb ain bestimpte Besoldung Euclidem zu lesen, auch Arithmetices vnd Geometrie ler den Jungen einzubilden"[26]).

Im Jahre 1544 wird also, neben Imser als Ordinarius, dem Maister („magister") Scheubel ein Lehrauftrag in Geometrie und Arithmetik an der Universität Tübingen zu teil. Aus dem so von Scheubel angetretenen Unterrichte heraus entstanden nun in den folgenden Jahren jene Werke. die uns hier zunächst nur insofern interessieren, als sie uns in ihren Titeln und Vorreden biographische Notizen über ihren Autor geben. In ihnen bezeichnet sich Scheubel im Jahre 1545 als „Joannes Scheubelius bonarum artium magister" und im Jahre 1549 (März) als „magister Joannes Scheubelius ex Kirckhain sub Teckh". Dagegen zeigt seine Euklid-Ausgabe vom Jahre 1550 (April) im Titel die Worte: „Authore Joanne Scheubelio, in inclyta Academia Tubingensi Euclidis professore ordinario" und diejenige vom Jahre 1555 trägt die Autorenangabe: „durch Magistrum Johann Scheybl, der löblichen vniuersitet zu Tübingen des Euclidis und Arithmetic Ordinarien". In der Zeit zwischen dem März des Jahres 1549 und dem April des Jahres 1550 mufs also Scheubel zum Ordinarius ernannt worden sein, vergebens aber versuchte ich über diese Ernennung im Tübinger Universitätsarchiv irgend eine Notiz aufzufinden[27]). Als dann

---

eigenen Sohn, für Kepler, keinen Platz hatte, und doch hatte Kepler gleich Apian dem neuen Glauben persönliche Opfer der allerschwersten Art gebracht.

25) Vergl. „Hartmann, Magisterbuch". Roth giebt fälschlich — wohl ein Druckfehler — das Jahr 1546 an.

26) Vergl. „Roth, Urkunden". p. 235 und 236.

27) Von den in Betracht kommenden Sammelbänden trägt der eine die Bezeichnung: „Facult. Philosoph. G. Prof. math. & physices. I. 1557—1700". Der-

im Jahre 1557 IMSER auf seine Professur verzichtete[28]), trat nicht SCHEUBEL in diese Stelle ein, sondern der Astronom und Geograph SAMUEL SIDEROCRATES; handelte es sich doch bei dieser Professur neben Mathematik in erster Linie um Astronomie. Tübingen hatte somit vom Jahre 1550 bis zu SCHEUBEL's Tod zwei mathematische Professoren, doch beweist die Folgezeit, dafs dabei nicht an die definitive Schaffung einer zweiten mathematischen Professur gedacht werden darf, sondern es lag ein Ausnahmezustand vor, welcher wohl eben nur durch persönliche Verhältnisse bedingt war; und galt schon die bleibende Professur für Astronomie und Mathematik als „eine der geringeren Stellen"[29]), so ist nicht zu verwundern, wenn dies in noch höherem Grade bei der ad hoc geschaffenen Stelle SCHEUBEL's der Fall war. Dementsprechend finden wir auch, dafs SCHEUBEL schon im Jahre 1551[30]) und dann später im Jahre 1562[31]) noch einmal um Erhöhung seines Gehaltes einkommt. Gerade diese zweite Eingabe, aus der wir auch erfahren, dafs SCHEUBEL verheiratet war, läfst einen tiefen Blick thun in die finanziell mehr als prekäre Lage des Achtundsechzigjährigen, und erlaubt uns Rückschlüsse auf alle jene Nöthe und Entbehrungen, durch welche derselbe in langen Jahren hindurch mufste[32]), bis er es nur „soweit" gebracht

---

selbe beginnt mit folgenden Nummern: 1) Resignatio PHIL. IMSSERI 1557; 2) literae S ISENMENGERI 1558; 2a) Bericht des APIAN's etc.; 3) Entlassung APIAN's und Einsetzung MÄSTLIN's; etc." SCHEUBEL wird also hier überhaupt nicht erwähnt. Der andere jener Bände trägt die Aufschrift: „Facultas Philosoph. F. Professorum vocationes electiones. I. 1510—1599". Auch er bietet nichts über SCHEUBEL's Ernennung, dagegen enthält er unter den Nummern 29 und 29a zwei Eingaben SCHEUBEL's an den akademischen Senat aus den Jahren 1553 und 1562, welche beide eine kräftige aber nicht leicht zu lesende Handschrift zeigen. Die Schrift der Eingabe vom Jahre 1562 läfst in keiner Weise das Alter des Schreibers ahnen. In der ersten dieser Eingaben beklagt sich SCHEUBEL bitter über das mangelhafte Interesse, das die Tübinger akademische Jugend dem Studium der Mathematik entgegenbringe, und legt im Sinne jener Zeit, mit Bezugnahme auf das klassische Altertum, die hohe Wichtigkeit der von ihm vertretenen Disciplinen dar. In der zweiten dieser Eingaben bittet SCHEUBEL um eine Unterstützung und um Erhöhung seiner Besoldung. Eine Abschrift beider Eingaben verdanke ich der Freundlichkeit des Herrn Dr. KÖHLER in Tübingen.

28) Um sich ganz seiner Liebhaberei, der Herstellung mechanischer Kunstwerke, widmen zu können. Vergl. ROTH, Urkunden, p. 167.

29) Vergl. ROTH, Urkunden, p. 167.

30) Vergl. ZELLER, Merkwürdigkeiten etc., a. a. O.; dabei legt ein gewisser BALTHASAR VON GÜLTLINGEN Fürbitte für SCHEUBEL ein.

31) Siehe oben Anm. 27 auf S. 436.

32) Auch ROTH schreibt (s. a. a. O. p. 237): „Er hat in der Folge mit allerlei Unglück und Armut zu kämpfen."

hatte[33]). Wahrlich nur ein hoher Idealismus, nur jene tiefe Liebe zur Wissenschaft, welche uns aus allen SCHEUBEL'schen Vorreden, sowie aus der Senatseingabe vom Jahre 1553[34]) entgegenleuchtet, kann zu solchen Opfern befähigen. Diese Liebe zu seiner Wissenschaft und diese Opfer, welche SCHEUBEL seiner Wissenschaft brachte, schildert MELCHIOR ADAM[35]) mit folgenden schlichten Worten: „JOANNEM SCHEUBELIUM *accepimus Tubinganae quondam scholae professorem mathematicum insignem, ... ad* EUCLIDIS *ἀποδείξεις cognoscendas et explicandas, omne suum contulisse studium, neglecta re familiari*"[36]). Am 20. Februar 1570[37]) starb SCHEUBEL in Tübingen[38]), woselbst er auch begraben wurde. Seine Instrumente und mathematischen Manuskripte vermachte er der Universität[39]).

Mit dieser dürftigen biographischen Skizze SCHEUBEL's habe ich alles das gegeben, was ich an wirklich gesichertem Material über die äufseren Lebensumstände unseres Autors auffinden konnte, und ich möchte diese Skizze nicht abschliefsen, ohne Herrn Oberstudienrat Dr. VON HARTMANN in Stuttgart, Herrn Oberbibliothekar Dr. GEIGER in Tübingen und Herrn Dr. KÖHLER in Tübingen meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die vielfachen Unterstützungen, welche sie mir beim Zusammentragen des benützten Materials zu teil werden liefsen.

Wenden wir uns nun zu SCHEUBEL's Werken. Hier tritt uns eine ungleich reichere Fülle an Material entgegen, und es würde den mir zur Verfügung stehenden Raum weit überschreiten, wollte ich eine vollständige und gründliche Analyse und Wertung sämtlicher Werke SCHEUBEL's geben, eines Autors, der in gleicher Weise Arithmetik, Algebra und Geometrie in den Kreis seiner Darstellungen zog. Ich beschränke mich deshalb, wie schon

---

33) Ich möchte nur zwei Sätze aus dieser Eingabe citieren: *„Rogo autem vos, mihi iam prebere velitis viginti Florinos, deinde vero in singulas angarias, non quinque tantum sed decem florinos dare velitis! Nam ita ego, iam quidem, creditoribus satisfacere possum, curare insuper, ut per hanc aestatem ligna et unum cum aliis acquiram, id quod necessitas requirit."*

34) Auch diese Eingabe enthält den Satz: *„sed etiam me misere ac tenuiter vivere cogi".*

35) Litterarhistoriker, gestorben 1622.

36) Vergl. *Vitae Germanorum Medicorum* etc. a MELCHIORE ADAMO, Frankofurti a. M. 1705: Vita SCHEGKII, p. 133.

37) ZELLER, Merkwürdigkeiten a. a. O., und MELCHIOR ADAM etc. a. a. O. Da das älteste Totenbuch in Tübingen nur bis 1596 zurückreicht, welche Angabe ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn Stadtpfarrer GROSS in Tübingen verdanke, ist es nicht möglich, dort etwas weiteres zu finden.

38) Wenn ZELLER auch nicht ausdrücklich erwähnt, dafs SCHEUBEL in Tübingen starb, so geht das doch aus der ganzen Darstellung hervor.

39) Vergl. ZELLER, Merkw. a. a. O.

die Fassung des von mir gewählten Themas zum Ausdrucke bringt, der Hauptsache nach auf die Darstellung der Leistungen SCHEUBEL's in der Algebra. Handelt es sich dabei auch nur um einen verhältnismäfsig kleinen Bruchteil der gesamten litterarischen Thätigkeit unseres Autors, so tritt doch gerade in diesem Bruchteil die Bedeutung SCHEUBEL's am besten zu Tage. Allerdings vollständig stillschweigend möchte ich an SCHEUBEL's arithmetischen und geometrischen Werken auch nicht vorbeigehen, doch mufs ich mich bei ihnen mit ein paar Umrifslinien begnügen.

Ein Zug ist es, der alle Werke SCHEUBEL's mit Ausnahme eines einzigen, des letzten, charakterisiert und nach Umfang, Inhalt und Form der Darstellung bestimmt: sie sind aus der akademischen Lehrthätigkeit heraus und für die akademische Lehrthätigkeit geschrieben, widmet er doch eines derselben direkt der akademischen Jugend Tübingens. Liegt so unserem Autor nichts ferner, als in seinen Werken nur „Eigenes" geben zu wollen, so ist er sich doch stolz bewufst, darin neben dem Fremden auch „Eigenes" bieten zu können, und gleich im Dedikationsschreiben des ersten Werkes, das SCHEUBEL im Drucke erscheinen liefs, sagt er: *„nonnulla etiam ipsi inuenimus nequaquam aspernanda"*.

Dieses erste Werk SCHEUBEL's selbst trägt den Titel: *„De numeris et diversis rationibus seu regulis computationum opusculum, a* JOANNE SCHEUBELIO *compositum. Non solum ad usum quendam uulgarem, sed etiam cognitionem et scientiam exquisitiorem arithmeticae accomodatum."*, und am Schlusse steht: *„Lipsiae ex Officina* MICHAELIS BLUM, *a restituta salute Anno M.D.XLV. Jdib. Maij."* Gewidmet ist das Werk den Doktoren und Magistern des Senates der Universität Tübingen. Es zerfällt in 5 Traktate. Im ersten Traktat behandelt SCHEUBEL das Rechnen mit ganzen Zahlen bis zum Ausziehen der Kubikwurzel, im zweiten das Rechnen mit Verhältnissen und Proportionen, im dritten das Rechnen mit gemeinen Brüchen und im vierten das Rechnen mit physischen Brüchen[40]). Im fünften Traktat, dem gröfsten

---

40) Bei diesem Rechnen mit „physischen" Brüchen handelt es sich zunächst um das auf die Winkeleinteilung zurückgeführte Rechnen mit Sexagesimalbrüchen. Doch ist damit der Begriff des „physischen" Bruches keineswegs erschöpft, sondern jede aus dem wissenschaftlichen oder bürgerlichen Leben gegriffene Einteilung eines Ganzen in Teile und Unterabteilungen kann zur Aufstellung einer Art von absteigenden Brüchen verwendet werden, die bis zu einem gewissen Grade unsere heutigen Decimalbrüche zu ersetzen im Stande sind. Allerdings berührt es in hohem Grade eigentümlich, zum erstenmale eine Multiplikation zu sehen wie die folgende, welche eben unserem Traktate entnommen ist (vergl. fol. Q. 5^r): „7 Gulden 4 Schilling 5 Pfenig württembergischer Währung sollen mit 7 Gulden 7 Schilling 7 Pfenig württemb. Währ. multipliziert werden." Als Resultat errechnet SCHEUBEL: 52 Gulden 8 Schilling $2\frac{11}{24}$ Pfenig württemb. Währ. Da nach damaliger

und wichtigsten, entwickelt SCHEUBEL zunächst die Regel de tri[41]) aus EUKLID VII, 19 und knüpft daran eine sehr große Anzahl von Beispielen, wie sie in den landläufigen Rechenbüchern nach allen möglichen Regeln mit besonderen Namen gelöst wurden. Weiterhin behandelt hier SCHEUBEL ganz allgemein das Wurzelausziehen und geht dann noch über zu Aufgaben geometrischer Art, sowie zu Aufgaben aus den Gebieten der arithmetischen, geometrischen und harmonischen Progressionen. Den Beschluſs bilden einige der bekannten arithmetischen Epigramme aus der griechischen Anthologie.

SCHEUBEL hat diese seine Arithmetik in bewuſstem Gegensatze zu den damals gebräuchlichen Rechenbüchern geschrieben; ihm ist das Rechnen nicht die handwerksmäſsige Ausübung feststehender Regeln, die man sich einprägt, ohne nach ihrem „Woher" zu fragen, sondern ihm ist das Rechnen eine Wissenschaft, die jedem, der auf gelehrte Bildung Anspruch macht, nötig und nützlich ist, eben deshalb auch wählt er für sein Werk die lateinische Sprache.

Bald aber fand SCHEUBEL selbst, daſs dieses Werk, welches die gesamte Theorie und Praxis der damaligen Rechenkunst zur Darstellung bringen sollte, doch für manche Zwecke zu viel bot und zu groſse Anfordrungen stellte. Er entschloſs sich daher in einem kurzen Kompendium das nötigste aus der Arithmetik zusammenzufassen, und so entstand das zweite Werk SCHEUBEL's, das den Titel trägt: *Compendium Arithmeticae Artis, ut breuissimum ita longè utilissimum erudiendis tyronibus, non solùm propter ordinem. quo paucis perstringuntur huius artis capita, sed etiam causa perspicuitatis. quae delectat et iuuat discentes, summoperè expetendum: per* JOANNEM SCHEUBELIUM *adornatum et conscriptum. Continet autem utrunque hoc Compendium, numerorum scilicet et calculorum seu proiectilium (ut uocant) ratiocinationem.*" Am Ende steht: „*Basileae, per* JACOBUM PARCUM, *expensis* JOANNIS OPORINI. *Anno 1549.*" Dieses Werk ist es, das SCHEUBEL der Tübinger akademischen Jugend widmete. Während sein erstes Werk 254 Oktavblätter umfaſst, ist dieses „Compendium" auf 86 zusammengezogen, und daſs dasselbe in der That einem Bedürfnis entgegen kam und vielfachen Anklang fand, ersehen wir daraus, daſs SCHEUBEL selbst noch im Jahre 1560 eine zweite Ausgabe davon besorgen durfte. Materielle Änderungen zeigt diese Neuausgabe eigentlich keine, dagegen ist dieselbe formell durch besseren Druck, über-

---

württembergischer Währung 1 Gulden = 28 Schilling und 1 Schilling = 6 Pfenig war, so bedeutet eben das obige Beispiel nichts anderes als:

$$\left(7 + \frac{4}{28} + \frac{5}{168}\right) \cdot \left(7 + \frac{7}{28} + \frac{7}{168}\right) = 52 + \frac{8}{28} + \frac{2\frac{11}{24}}{168}.$$

41) Die er selbst allgemein „*regula proportionum*" nennt.

sichtlichere Anordnung[42]) und Beigabe zweier Register erheblich verbessert. Der Titel zeigt nur den Beisatz: *Iam denuò ab ipso autore recognitum et emendatum*". Am Schlusse steht jetzt: „*Basileae excudebat* Jacobus Parcus, *expensis* Joannis Oporini, *anno M.D.LX. mense Martio.*"

Doch wir müssen von hier wieder zeitlich zurückgehen, wollen wir uns nun dem dritten Werke Scheubel's, seinem Hauptwerke, zuwenden. Dasselbe zeigt den Titel: „Euclidis Megarensis, *Philosophi et Mathematici excellentissimi, sex libri priores, de Geometricis principiis, Graeci et Latini, unà cum demonstrationibus propositionum, absque literarum notis, ueris ac propriis, et aliis quibusdam, usum earum concernentibus, non citra maximum huius artis studiosorum emolumentum adiectis. Algebrae porro regulae, propter numerorum exempla, passim propositionibus adiecta, his libris praemissae sunt, eaedemque demonstratae. Authore* Joanne Scheubelio, *in inclyta Academia Tubingensi* Euclidis *professore ordinario.*" Am Schluſs steht: „*Basileae, per* Joannem Heruagium, *Anno salutis humanae M.D.L. Mense Septembri.*"

Scheubel widmet diese seine Euklidausgabe dem bekannten Augsburger Kaufherrn Anton Fugger und den Söhnen des kaum minder bekannten Raimund Fugger[43]), seinen „Maecenaten", denen er durch vielfache und auſsergewöhnliche Beweise einer wohlwollenden Gesinnung und einer offenen Hand sich verbunden fühlt. In dem Dedikationsschreiben legt Scheubel genau die Motive dar, welche ihn bei seiner Arbeit leiten. Nichts wäre verfehlter, als wollte man hier eine auf eigene textkritische Studien basierte Euklidausgabe erwarten, ein solcher Gedanke lag der damaligen Zeit nicht so nahe als uns heute, ein solcher Gedanke lag vor allem Scheubel ferne. Wohl kennt Scheubel Euklidausgaben, welche nach unseren heutigen Begriffen weit von einander abstehen, doch sind die in denselben zu Tage tretenden Verschiedenheiten für ihn von so nebensächlicher Bedeutung, daſs er dieselben nicht einmal erwähnt. Ausgaben, die in direktem Gegensatze zu einander stehen, und von denen die spätere die frühere nicht schroff genug tadeln kann, wie diejenige des Campanus und diejenige des Zamberti,

---

42) Vor allem durch Einschaltung von Kapitelüberschriften.

43) Die beiden von Kaiser Karl V. in den Reichsgrafenstand erhobenen Brüder Raimund und Anton Fugger sind die Ahnherrn der heute noch blühenden Linien der Fugger. Raimund starb schon 1535; sein zweiter Sohn Georg war selbst ein nicht ganz unbedeutender Mathematiker. Anton, der erst 1560 starb, trägt — obgleich einst von Hutten ob seiner Knausrigkeit verspottet — nicht mit Unrecht den Beinamen eines „Hortes der Armen und der Gelehrten". Einen Beleg statt vieler bietet eben sein Verhältnis zu Scheubel: Anton Fugger, ein Anhänger der alten Lehre, unterstützt thatkräftig den armen gelehrten Scheubel, einen Anhänger der neuen Lehre.

werden, wie überall damals, friedlich nebeneinander mit gleich hohem Lobe bedacht. Doch darf uns dies nicht auffallen, ging ja SCHEUBEL — wie eben aus der Vorrede nicht unschwer zu entnehmen ist — von der damals ganz allgemein verbreiteten Ansicht aus, daſs nur die Lehrsätze „des EUKLID" auf EUKLID selbst zurückzuführen seien, daſs aber die beigegebenen Beweise ein geistiges Eigentum dieses oder jenes Herausgebers „des EUKLID" darstellen, eine Ansicht, von welcher Spuren sogar schon im Altertume vorzuliegen scheinen. Als die besten „*demonstratores*" der „Geometrie des Megarenser[44]) EUKLID" nennt SCHEUBEL unter den griechisch schreibenden THEON und HYPSIKLES, unter den lateinisch schreibenden CAMPANUS und ZAMBERTI. Verdienen dieselben durch ihre Leistungen auch das ihnen gespendete hohe Lob, so machen sie sich doch — nach SCHEUBEL — dadurch eines Fehlers schuldig, daſs sie bei ihren Beweisen zur Bezeichnung von Punkten etc. Buchstaben verwenden. Dadurch sollen sie sich nicht nur in einen Gegensatz zu Euklid stellen, der ja seine Lehrsätze ohne jenes Hilfsmittel aussprach, sondern auch die Aufgabe von Lehrer und Schüler erschweren, indem sie ein Element hereinziehen, das nicht bloſs überflüssig ist, sondern auch verwirrend wirkt. „Kürzer und klarer" sei es, eine Sache durch die ihr direkt zukommenden Bezeichnungen dem Hörer vorzuführen, als durch Buchstaben, die sich derselbe erst lange zusammensuchen muſs, und die in keinem inneren Zusammenhange mit der Sache stehen. Dementsprechend verzichtet SCHEUBEL konsequent auf jede Buchstabenbezeichnung in Figur und Text, und sieht darin denjenigen Vorzug, der in erster Linie für den Wert seiner Euklidausgabe bestimmend ist, und sie vor allen andern auszeichnet. SCHEUBEL betont ausdrücklich, daſs er nicht nur als Lehrer mit dieser seiner Methode die allerbesten Erfahrungen gemacht habe, sondern auch seine Schüler hätten ihn versichert, daſs sie auf diesem Wege ungleich leichter und angenehmer ihr Ziel erreicht hätten, als auf dem gewöhnlichen. Als Beispiel, wie SCHEUBEL seine Methode durchführt, mögen aus dem Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes diejenigen Stellen hier wiedergegeben sein, durch welche die bekannten Hifslinien festgelegt werden: „*Demittatur ab angulo trianguli recto, tanquam à puncto dato, super suam subtensam, … linea perpendicularis, atque haec ad latus usque oppositum per quadratum continuetur, et erit quadratum lateris, angulum rectum subtendentis, in duo parallelogramma diuisum, quorum ….. Demittantur ab angulo trianguli recto, ad remotiores ab eo duos quadrati iam diuisi angulos, duo rectae*

44) Ganz allgemein wurde damals der Geometer EUKLID mit dem mehr als 100 Jahre älteren Philosophen und Schüler des SOKRATES, dem Megarenser EUKLID verwechselt, eine Verwechslung, welche sich schon im klassischen Altertume nachweisen läſst.

lineae .... Ducantur ultimò, etiam ab acutis rectanguli trianguli angulis duae rectae lineae, quarum utraque per latus eundem angulum subtendens, usque ad angulum quadrati illum, cui idem acutus hactenus non est coniunctus, continuetur."

So lange der vortragende Lehrer oder der repetierende Schüler in der Lage ist, seine Worte gegebenen Falles durch ein direktes Hindeuten auf bestimmte Teile einer Figur zu illustrieren, können Buchstaben umgangen werden, und in diesen engen Grenzen ist den Darlegungen SCHEUBEL's nicht alle Berechtigung abzusprechen, aber in allen anderen Fällen wird durch das „notwendige Übel" der Buchstaben die Beweisführung entschieden „kürzer und klarer". Und zu diesen Fällen gehören vor allem diejenigen, in welchen der Druck den Beweis übermitteln soll. Hier eine neue Methode einzuführen, weil dieselbe sich dort bewährt hat, ist, milde bezeichnet, eine „Schrulle", selbst wenn die Durchführung, wie dies bei SCHEUBEL thatsächlich der Fall ist, als eine gelungene bezeichnet werden mufs.

Und noch eine andere „Schrulle" ihres Autors weist unsere Euklidausgabe auf: Wo in einzelnen Sätzen nur immer die Fläche eines Dreiecks eine Rolle spielt, fügt SCHEUBEL numerische Auswertungen der Heronischen Dreiecksformel an, d. h. der Formel, welche in unserer heutigen Zeichensprache lautet: $\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$. Solche mehr oder weniger umfangreiche Beigaben zeigen z. B. im ersten Buche folgende Sätze: 34, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 43 und 47. Bei Satz 34 z. B. handelt es sich darum zu zeigen, dafs jedes Parallelogramm durch eine Diagonale halbiert wird. Nachdem SCHEUBEL den Euklidischen Beweis auf seine Art gegeben hat, fährt er fort: „Da nun aber dieser Satz 34 und noch viele folgende in Zahlen, d. h. in der „diskreten Quantität" in gleicher Weise als wahr erfunden werden, wie in der „kontinuierlichen Quantität" so ist es nötig, um dies bequemer zu zeigen, mit folgenden Worten eine gewisse allgemeine Regel unten anzufügen, vermittelst welcher die Flächen aller Arten von Dreiecken (sofern nur ihre Seiten bekannt sind) gefunden werden können." Und nun folgt in Worte gekleidet die Heronische Formel, und zwar, wie an dieser Stelle nicht anders möglich, ohne jede Andeutung, auf welchem Wege dieselbe erhalten oder bewiesen werden kann. Des weiteren wird die aufgestellte Regel auf 4 Folioseiten an nicht weniger als 9 Dreiecken[45]) durchgeführt, wobei gegebenen Falles SCHEUBEL darauf hinweist, wie die errechnete Dreiecksfläche der Hälfte des zugehörigen Parallelogramms entspricht. Wie wenig er dabei komplizierten Zahlenbeispielen aus dem Wege geht, mögen die folgenden beiden beweisen. Das eine Mal nötigt ihn seine

---

45) Darunter sind auch rechtwinklige Dreiecke enthalten.

Figur die Fläche eines Dreiecks zu bestimmen, dessen Seiten = 6, 11 und $\sqrt{157 - \sqrt{9680}}$ sind, ein anderes Mal wiederholt er ein einfaches rationales Beispiel in irrationaler Form, indem er den Inhalt eines Dreiecks von den Seiten 6, $\sqrt{40 + \sqrt{576}}$ und 10 berechnet. In ganz analoger Weise behandelt SCHEUBEL, um noch ein Beispiel anzuziehen, den Satz: Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich (35). Nach der geometrischen Durchführung giebt SCHEUBEL eine Figur, in welcher 3 Dreiecke von gleicher Höhe auf derselben Grundlinie stehen. Den Seiten dieser Dreiecke sind folgende Zahlen beigedruckt: 8, 12, 12; 8, $\sqrt{192}$, $\sqrt{384}$; 8, $\sqrt{228}$, $\sqrt{452}$, daneben steht: „es zeigt die Figur 3 Dreiecke, von welchen durch die folgende Berechnung gezeigt werden soll, daſs sie, wie „geometrice" so auch „per numeros" gleich seien". Dementsprechend führt nun SCHEUBEL für die 3 Dreiecke die Inhaltsberechnung nach der Heronischen Formel durch und findet jedesmal den Wert $\sqrt{2048}$, den er annäherungsweise („ferè") gleich $45\frac{23}{91}$ setzt. Ja selbst bei einem Satze wie dem pythagoreischen kann sich SCHEUBEL eine analoge Beigabe nicht versagen; auch hier berechnet er den Inhalt der Hilfsdreiecke aus ihren Seiten und vergleicht die Resultate mit den entsprechenden Rechtecken und Quadraten. Aber in keinem einzigen Falle giebt SCHEUBEL auch nur die geringste Andeutung, auf welchem Wege er sich die numerischen Werte der Seiten der zu berechnenden Dreiecke verschafft hat.

Was will nun SCHEUBEL mit allen diesen Beigaben? Zur Überzeugung, daſs die betreffenden Lehrsätze wahr seien, tragen diese Rechnungen allerdings — wie KÄSTNER ganz richtig bemerkt — nichts bei. Doch das beabsichtigt SCHEUBEL gar nicht, wie sollte er es auch; geht er ja auf diese Rechnungen immer erst ein, nachdem er einen strengen Beweis des betreffenden Satzes gegeben hat. Aber SCHEUBEL giebt jene Beweise „geometrice" d. h. er führt sie direkt an den stetigen Raumgröſsen durch. Neben der — wenn ich so sagen darf — Mathematik der „stetigen Gröſsen" läuft ihm parallel eine Mathematik „diskreter Gröſsen"; jene beschäftigt sich mit den Raumgröſsen, diese mit den Zahlgröſsen. In diese Mathematik der diskreten Gröſsen gehört ihm der Heronische Satz, was sollte SCHEUBEL auch im Gebiete der Raumgröſsen mit jenem Produkte aus 4 Faktoren, wie er es aufstellt, anfangen? In seine „Euklidische Geometrie" kann er diesen Satz nicht unterbringen, braucht ihn aber auch nicht einzuzwängen, gehört er für ihn doch einem andern Gebiete an. Will SCHEUBEL aber dennoch das Parallellaufen der beiden getrennten Gebiete illustrieren, wie könnte er das in solch ausgedehntem Maſse in einfacherer und für ihn als Algebraiker

fruchtbarerer Weise erreichen, als dadurch, daſs er eben aus jenem Gebiete unsern Satz als „Regel" herüber nimmt. Daſs aber SCHEUBEL einer Euklidausgabe solches Beiwerk überhaupt einfügt, und daſs er vor allem dem Beiwerk einen Umfang einräumt, in welchem es oft die Hauptsache zu überwuchern droht, das ist es, warum ich von einer „Schrulle" unseres Autors gesprochen habe.

Eine dritte Eigentümlichkeit unserer Euklidausgabe ist es, daſs SCHEUBEL ihr einen kurzen Abriſs der Algebra vorausschickt, mit der schon im Titel gegebenen Begründung: „Weiterhin sind sodann die Regeln der Algebra diesen Büchern vorausgeschickt und bewiesen, wegen der Zahlenbeispiele, welche den Lehrsätzen allenthalben beigefügt sind." Da ich im zweiten Hauptteile dieses Aufsatzes eben diese Algebra eingehender behandeln werde, mögen hier nur ein paar allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt sein. Diese „Algebra", obgleich nur 76 Seiten umfassend, stellt dennoch eine Leistung dar, welcher aus der Geschichte der deutschen Algebra des XVI. Jahrhunderts nur noch „CHRISTOFF RUDOLFF's Coſs" und „STIFEL's Arithmetica integra" an die Seite gestellt werden können. Und wie rasch dieselbe sich auch die Anerkennung der Zeitgenossen erwarb, sehen wir daraus, daſs kaum ein Jahr nach dem Erscheinen unserer Euklidausgabe ein „Separatabdruck" eben dieser Algebra in Paris herauskam[46]). Da es mir nicht möglich war, diesen Abdruck selbst zu bekommen, gebe ich über denselben das, was PFAFF in KÄSTNER's Geschichte der Mathematik mitteilt: „Von SCHEUBEL's Algebra fand ich bey meinem Aufenthalte in Dresden, eine Ausgabe in Paris veranstaltet, deren Vorrede mir besonders auffiel, daher ich sie auf der Dresdener Bibliothek abgeschrieben habe. Der Titel ist: *Algebrae compendiosa facilisque descriptio qua depromuntur magna Arithmetices miracula. Authore* JOANNE SCHEUBELIO *Mathematicarum professore in Academia Tubingensi. Parisiis apud* GULIELMUM CAUALLAT *in pingui gallina ex aduerso collegii Cameracensis 1551. Cum priuilegio.* Die Vorrede fängt so an: *Typographus lectori .. Cum viderem (amice lector) Algebram a permultis propter artis praestantiam commendari, a nimis paucis intelligi proter obscuram ejus descriptionem. Rogaui quorundam sententiam de libello* SCHEUBELII *qui titulo breuem Algebrae descriptionem pollicebatur. Quam cum intelligerem non solum breuem sed etiam facilem, non sum passus ut eo libro tam utili ac expetito diu careres ....*"

Habe ich so kurz das skizziert, wodurch sich die SCHEUBEL'sche Euklid-

---

46) In der Bibliothek des britischen Museums, welche von SCHEUBEL's sonstigen Werken nur noch dessen Arithmetik vom Jahre 1545 besitzt, ist dieser Abdruck sogar in zwei nur durch den Titel verschiedenen Ausgaben vorhanden.

ausgabe vor andern auszeichnet, beziehungsweise von ihnen unterscheidet, so möchte ich noch mit ein paar Worten auf ihre allgemeine Anordnung zu sprechen kommen. SCHEUBEL schickt jeweils den griechischen Wortlaut der einzelnen Definitionen, Lehrsätze etc. voraus, sodann folgt eine lateinische Wiedergabe des griechischen Textes, und hieran schliefsen sich bei den Lehrsätzen Beweise, welche durch gute Figuren unterstützt werden, und welche, abgesehen von den schon berührten Eigentümlichkeiten, den bekannten Euklidischen Beweisen entsprechen. Bei der oben dargelegten textkritischen Stellung SCHEUBEL's hätte es wenig Wert, die Abhängigkeit desselben von den vorhandenen Ausgaben im Einzelnen festzulegen, nur das möge hier gesagt sein, dafs — soweit es sich nicht um SCHEUBEL's eigene Zuthaten handelt — alles sich auf damals schon im Druck vorliegende Ausgaben zurückführen läfst, und zwar in erster Linie auf die bekannte im Jahre 1533 durch GRYNAEUS besorgte griechische Euklidausgabe.

Wie das eben besprochene Werk SCHEUBEL's in engstem Zusammenhang mit dessen akademischer Lehrthätigkeit stand, so wurde eine andere Vorlesung, welche SCHEUBEL hielt, Veranlassung zu seiner nächsten Publikation. SCHEUBEL „las" nämlich die *Epitomen in Arithmeticam speculativam* BOËTHI, welche ein halbes Jahrhundert früher FABER STAPULENSIS (JACQUES LEFÈVRE) unter andern Drucklegungen zur Hebung des mathematischen Unterrichts an der Universität Paris herausgegeben hatte. Obgleich diese Epitome eine Reihe von Auflagen erlebt hatte, war sie zu SCHEUBEL's Zeit im Buchhandel vergriffen, und so entschlofs sich SCHEUBEL, eine neue Ausgabe zu veranstalten. Dieselbe trägt den Titel: „JACOBI FABRI STAPULENSIS *in Arithmetica* BOËTHI *epitome, unà cum difficiliorum locorum explicationibus et figuris (quibus antea carebat) nunc per* JOANNEM SCHEUBELIUM *adornatis et adiectis. Accessit* CHRISTIERNI MORSSIANI *Arithmetica practica etc.*" Am Schlusse des Werkes steht: „*Basileae excudebat* HENRICUS PETRI, *mense Augusto, anno M.D.LIII.*" Gewidmet ist die Ausgabe dem Dekane und den Mitgliedern der Tübinger Artistenfakultät.

Die äufserst dürftige Epitome LEFÈVRE's zerfällt in vier Teile. Der erste Teil enthält nichts weiter als diejenigen Begriffe übersichtlich zusammengestellt, welche der zweite Teil definiert. Hierbei kommen folgende Zahlbegriffe in Betracht: „*numerus, numerus par etc.; numerus primus etc.; numerus linearis etc.; trigonus etc.; pyramis, cubus etc.; medietas arithmetica etc.*" Der dritte Teil handelt sodann von den Eigenschaften dieser Zahlen, und in einem vierten Teile zeigte LEFÈVRE, wo das von ihm Gebotene bei BOETHIUS und JORDANUS NEMORARIUS abgehandelt wird. Dem zweiten und dritten Teile giebt nun SCHEUBEL in seiner Ausgabe in ziemlich ausgedehntem Mafsstabe erläuternde Figuren und Zusätze bei, welch letztere durch den

Druck vom eigentlichen Texte unterschieden werden. Dagegen läſst Scheubel den vierten Teil ganz bei Seite, und begründet dies damit, daſs derselbe für einen Studierenden, der weder den Boethius noch den Jordanus besitze, wertlos sei. Eine Arithmetik im heutigen Sinne, wie etwa Scheubel's „Compendium", bietet diese Epitome also in keiner Weise, und deshalb hatten auch schon die früheren Ausgaben einen ergänzenden Anhang. Speziell bei derjenigen Ausgabe, die Scheubel seinem Neudrucke zu Grunde legte, war dies die *„Arithmetica practica* Christierni Morssiani", welche deshalb auch Scheubel beibehielt. Diese *Arithmetica practica* behandelt kurz und bündig das gemeine Rechnen mit ganzen Zahlen und Brüchen, etwas Wurzelausziehen, sowie die Regeln und Beispiele für denjenigen Teil der gemeinen Arithmetik, den man heute etwa mit dem Namen „das bürgerliche Rechnen" bezeichnet.

In einem gewissen Gegensatze zu den bisherigen Publikationen Scheubel's steht dessen letztes Druckwerk, zu dem wir uns nun wenden. Hatte Scheubel seine bisher besprochenen Arbeiten eigentlich nur für die studierende Jugend geschrieben, so wendet er sich in diesem seinem letzten Werke an ein ungleich gröſseres Publikum, an alle: „so die Kunst der Rechnung liebhaben"; dementsprechend bedient er sich hier auch der deutschen Sprache. Das Werk[47]) selbst trägt den Titel: „Das sibend, acht vnd neünt buch, des hochberümbten Mathematici Euclidis Megarensis, in welchen der operationen vnnd regulen aller gemainer rechnung, vrsach grund vnd fundament, angezaigt wirt, zu gefallen allen den, so die kunst der Rechnung liebhaben, durch Magistrum Johann Scheybl, der löblichen vniuersitet zu Tübingen des Euclidis vnd Arithmetic Ordinarien, auſs dem latein ins teütsch gebracht, vnnd mit gemainen exemplen also illustrirt vnnd an tag geben, das sy ein yeder gemainer Rechner leichtlich verstehn, vnnd jme nutz machen kan." Am Ende des Buches steht: „Gedruckt in der Kaiserlichen Reichsstat Augspurg, durch Valentin Ottmar, am zehenden tag Aprilis, im tausent fünffhundert und im fünffundfünfftzigisten Jar." Scheubel widmet dieses Werk dem Pfalzgrafen Otto Heinrich (Ottheinrich), dem Reformator der Universität Heidelberg und Erbauer des nach ihm benannten Teiles des Heidelberger Schlosses.

In zwei getrennt nebeneinander herflieſsenden Strömen bewegte sich im 16. Jahrhundert fast ausschlieſslich das mathematische Leben und Streben in Deutschland. Dort der Mathematikbetrieb an den Hochschulen, der durch die feststehenden Vorschriften in betreff der Kompendien, nach denen ge-

---

47) Das Exemplar der Kgl. öffentl. Bibl. in Stuttgart zeigt eine Widmung von Scheubel's eigener Hand.

lesen werden mufste, dazu verurteilt war, am Althergebrachten kleben zu bleiben; hier die aus den Forderungen des bürgerlichen Lebens hervorgegangenen Rechenschulen, deren „Meister" in nicht geringerer Einseitigkeit eben nur die Forderungen der Praxis im Auge hatten, und nach festen Regeln ihre Kunst oder besser gesagt ihr Handwerk betrieben. Wagte SCHEUBEL mit seiner ersten Euklidausgabe den schüchternen Versuch einer Reformation des Hochschulmathematikbetriebs durch die „Einschmuggelung" der Algebra in den engen und starren Kreis der akademischen Lehrvorträge, so hatte diese zweite Euklidausgabe eine Reformation des handwerksmäfsigen Rechenbetriebs an den Rechenschulen im Auge. SCHEUBEL schreibt hier[48]: „so hab ich mir fürgenommen von diser kunst Arithmetica, in welcher ich meins achtens, etwas merers als maniger annder, durch Gottes hülff vnnd gnad, auch embsigen angewenten fleyfs, begriffen, von des gemainen nutz wegen etwas zuschreiben. Aber nach dem die gemain Rechnung von sehr vil vnd gelerten Rechenmaystern genugsam beschriben ist, hat mir nit gezymmen oder gebüren wöllen, mich mit dem jenigen, welches von yedem vormals berürt, einzulassen, sonder mit einem tyeffern vnnd nötigern bekümmeren." Was SCHEUBEL unter dem „Tieferen und Nötigeren" versteht, das ist die Hebung des damaligen Rechenunterrichts vom Handwerk zur Wissenschaft, und die Vereinfachung des ganzen Betriebs dieses Unterrichts. Doch ist SCHEUBEL dabei kein Fanatiker, der einem Prinzipe zu lieb die Forderungen der Wirklichkeit vernachlässigt. So giebt er z. B. bei der Behandlung der Gesellschaftsrechnungen zuerst die Regel, nach welcher die Rechenmeister arbeiten liefsen und setzt dann hinzu[49]: „Thund in dem recht, dann also mufs man mit gleichnussen den gmainen vnnd schwachuerstendigen Jungern begegnen." Dann aber entwickelt er selbst das betreffende Verfahren aus EUKLID VII, 12 und 13 und fügt diesen Darlegungen die folgende „ermanung" bei: „Es were, freündlicher Leser, meins achtens gar fein, das der kunst rechnung liebhabere, so mer als ein gmainer Junger wissen will, sich mit sölchen stücklen zieret, nit allain mit auflesung viler exemplen sich bekümmeret, sonnder auch vnderweilen gedecht, wie er sein operation, yetz der yetz einer andern regeln oder eines andern exempels, mit gründtlichem verstand vor menigklichen verthedingen und handhaben wolt, wie dann das ein yeder Rechenmaister namens halben wifsen soll." In ganz ähnlicher Weise verurteilt SCHEUBEL noch an vielen andern Punkten das Gebahren der meisten damaligen Rechenmeister, die keinerlei Verlangen spürten, sich Rechenschaft über die von ihnen vor-

48) Im Dedicationsbriefe.
49) p. XL.

getragenen Regeln zu verschaffen, die sich dafür aber darin gefielen, eine möglichst grofse Zahl speziellster Regeln aufzustellen. Gleich bei dem ersten Beweise, welchen SCHEUBEL giebt, schreibt er[50]): „Ich waifs wol, das vil der teütschen Rechner nit vil fragen nach der fürgaben[51]) gwifshait, demonstration oder glaubwirdigen darbringen, lafsen sich gnügen an den regulen vnd operationen, glauben denen, vnd faren fort." Und an einer andern Stelle sagt SCHEUBEL[52]): „Also hastu fraintlicher lieber Rechner, fünff fürnemer regulen, so bey allen Rechenmaystern in gemaynem vnnd maystern brauch sind, demonstration vnnd grüntlich herkommen vernommen. Etwas weitters von den andern regulen der gemainen rechnung, als von der regel des Gwins und verlusts, des Wechfsels, des Stichs und dergleichen, zusagen, deycht mich on not, dann die selben all aufs der regel Detri jren verstand haben ..... Man soll auch nit bald von aines oder zwaier exemplen wegen, welcher soluirung nit von stundan naher gehn will, ein anndere regel erdichten, sonder vil mehr arbayten, die selben exemplen durch die fürnemen hauptregulen sampt dem gmainen verstand auflesen und verantworten."

Gehe ich nun noch mit ein paar Worten auf die uns beschäftigende Euklidausgabe selbst ein. Wie SCHEUBEL schon in dem Titel hervorhebt, legt er seiner Übersetzung eine lateinische Ausgabe zu Grunde, sagt uns aber nicht, welche Ausgabe dies war[53]). Den einzelnen Definitionen und Lehrsätzen fügt SCHEUBEL erläuternde Zahlenbeispiele an; Beweise giebt er nur bei einer beschränkten Zahl von Lehrsätzen und wählt dabei mit Vorliebe solche, welche für das gemeine Rechnen von Bedeutung sind. An sie schliefst er dann die obenberührten Ableitungen bestimmter Regeln der praktischen Arithmetik an. Doch geht SCHEUBEL in solchen Beigaben z. B. auch auf die Summierung der geometrischen Reihe und ähnliches ein, oder sucht, um ein anderes Beispiel anzuziehen, bei IX, 36 eine möglichst grofse Zahl vollkommener Zahlen zu bestimmen. Als solche findet er: 6, 28, 496, 8128, 2096128, 33550336, 536854528, 8589869056 und 137438691328. Allerdings sind von diesen 9 Zahlen die 5. und die 7. keine vollkommenen Zahlen, aber es liegt hier nur ein Versehen vor, während z. B. SCHEUBEL's berühmter Zeitgenosse STIFEL glaubte, jede Zahl

50) p. XXVII.

51) So übersetzte SCHEUBEL das Wort *propositio* = *πρότασις*.

52) p. CXXXIX.

53) Vielleicht war es jene im Jahre 1537 bei HERVAGIUM — dem Drucker von SCHEUBEL's Hauptwerke — erschienene lateinische EUKLIDausgabe.

von der Form $2^{2n}(2^{2n+1}-1)$ sei eine vollkommene Zahl, sobald n einen der Werte 1, 2, 3 etc. in inf. annehme[54]).

Wie schon im Dedicationsbriefe, so verspricht auch am Schlusse unseres Werkes SCHEUBEL eine Fortsetzung desselben durch eine Herausgabe des X. Buches; allerdings fügt er dort den einschränkenden Beisatz hinzu: „und ich danckbarkait von den Rechnern spüret". Diese Dankbarkeit, die er wohl an der Aufnahme maſs, welche sein Werk fand, wurde ihm, wie es scheint, nicht zu Teil, ich wenigstens konnte keine Spur einer Scheubelschen Ausgabe dieses X. Buches finden.

Überblicken wir nach diesem kurzen Abriſs der litterarischen Thätigkeit SCHEUBEL's dieselbe noch einmal als Ganzes, so treten uns zwei Züge als charakteristisch entgegen. Einmal sucht SCHEUBEL zu verhüten, daſs in seinem Fache die akademische Lehrthätigkeit im Althergebrachten erstarre und alle Fühlung mit den Forderungen des praktischen Lebens verliere, und zweitens sucht er den Rechenbetrieb, wie sich derselbe in ausschlieſslichem Dienste des praktischen Lebens entwickelt hatte, vom Handwerk zur Wissenschaft zu erheben. SCHEUBEL will so zwischen zwei damals völlig getrennten Gebieten geistigen Lebens Beziehungen herstellen, welche auf beiden Gebieten befruchtend wirken sollten, und hätte er kein anderes Verdienst, als dasjenige, das eben in diesem Streben liegt, so müſste ihm doch schon in der Geschichte der Mathematik ein ehrenvoller Platz eingeräumt werden, ja dieses Verdienst allein genügt, um ihm in der Geschichte des mathematischen Unterrichts in Deutschland eine hervorragende Stelle zu sichern.

Ehe wir aber diesen unsern Abriſs von SCHEUBEL's litterarischer Thätigkeit völlig abschlieſsen dürfen, müssen wir noch auf eine Streitfrage zu sprechen kommen. Die älteste Landkarte Württembergs stammt aus dem Jahre 1559. Sie trägt die Überschrift „Das hochlöbliche Fürstentumb Würtemberg Anno 1559", und zeigt unten rechts statt jeder andern Bezeichnung ihres Autors die beiden Buchstaben J und S zu einem Monogramme verschlungen, und daneben auf einer Fahne das Tübinger Wappen und das Wort „Tübengen". Gewöhnlich gilt als Autor dieser Karte ein „JOHANN SIZLIN, Modist in Ulm." Diese Annahme beruht einzig und allein auf einer völlig unkontrollierbaren handschriftlichen Bemerkung[55]) des Exemplars der Königl. öffent. Bibliothek in Stuttgart und ist vollständig verfehlt

---

54) Auſser den verbleibenden von SCHEUBEL richtig bestimmten 7 vollkommenen Zahlen kennt auch die heutige Mathematik nur noch zwei weitere. Vergl. SCHUBERT, Mathematische Muſsestunden. Leipzig 1898. p. 106.

55) „Author creditur JOHANN SIZLIN modist zu Ulm".

und wohl nur durch ein typisches Beispiel mehrfacher Verwechslungen entstanden[56]). Schon durch das mit dem Monogramme in so naher Beziehung stehende Wappen und Wort „Tübengen" ist jede Möglichkeit an einen Ulmer Autor zu denken ausgeschlossen, und vor allem gab es eben um die fragliche Zeit keinen Modisten JOHANN SIZLIN in Ulm. Wollen wir jenes Monogramm deuten, so müssen wir seinen Träger unbedingt in Tübingen suchen, und da kommen wir für das Jahr 1559 ungesucht auf unsern JOHANNES SCHEUBEL. Ein Kenner altwürttembergischer Karten, HAUBER, spricht sich — allerdings nur sehr vorsichtig — auch in diesem Sinne aus, leider ohne auf seine Vermutung irgendwie näher einzugehen[57]). Ich möchte deshalb kurz hier die Gründe aufzählen, welche diese Deutung jenes Monogramms vielleicht stützen könnten. Einmal stellt PANTALEON in der deutschen Ausgabe seines Heldenbuches SCHEUBEL mit einem Globus in der Hand dar, dann scheint aus den schon mehrfach angezogenen Epigrammen des CELLIUS hervorzugehen, daſs SCHEUBEL im Stande war, Holzschnittstöcke selbst zu bearbeiten, und schlieſslich läſst sich gerade für das Jahr 1559 ein besonders reger Verkehr SCHEUBEL's mit dem bekannten Kenner des Schwabenlandes CRUSIUS nachweisen[58]). Aber es sind dies lauter sehr schwache Gründe, welche nur so lange zu einem Schlusse berechtigen, als für jenes Monogramm keine andere Deutung vorliegt. Nun hat sich mir aber eben im Verlaufe dieser Arbeit eine Deutung dargeboten, welche auf den oben erwähnten Kollegen SCHEUBEL's, SAMUEL SIDEROCRATES, führt. SIDEROCRATES hieſs eigentlich EISENMENGER, ein Name, der, wie ich mich im Tübinger Universitätsarchiv überzeugte, eben dort in der Form „ISENMENGER"[59]) auftritt. Die Gewalt, welche diese Deutung dem Monogramme scheinbar anthut, wird mehr als aufgewogen durch die Thatsache, daſs SIDEROCRATES ein berühmter Geograph war, während ich bei SCHEUBEL nirgends sichere Spuren einer eingehenden Beschäftigung mit geographischen Fragen finden konnte. Doch möchte ich ein definitives Urteil erst fällen,

---

56) Ein NICOLAUS SITZLIN ist 1572—1583 Rektor der lateinischen Schule in Ulm; ein „Modist SELZLIN" (von 1598 an in Ulm) giebt wohl 1572 eine Karte des schwäbischen Kreises heraus, doch heiſst derselbe „DAVID"; ein „JOHANNES STÖLZLIN" sticht eine von einem „JOHANNES SELZLIN" gezeichnete Karte des Ulmischen Gebietes in Kupfer, doch lebten diese beiden im 17. Jahrhundert. Vgl. WEYERMANN, Nachrichten von Gelehrten etc. Ulm 1798, und Neue Nachrichten etc. Ulm 1829.

57) „Ob diese (d. h. die Buchstaben J und S) den Namen des Stechers oder Authoris vielleicht JOHANNIS SCHEUBELII bedeuten, ist mir nicht bekannt." Vergl. Historische Nachricht von den Land-Charten deſs Schwäbischen Craiſses etc. von M. E. D. HAUBER. Ulm 1774. p. 74 u. folgende.

58) Vergl. KÄSTNER, Gesch. d. Math. 1796. Band I. p. 361.

59) Vergl. oben S. 436, Anm. 27.

wenn ich einmal Muse gefunden habe, die sonstigen Leistungen des SIDEROCRATES näher kennen zu lernen.

Habe ich im Vorstehenden versucht eine kurze biographische Skizze SCHEUBEL's sowie eine Übersicht über dessen litterarische Thätigkeit zu geben, so gehe ich, meinem oben dargelegten Plane entsprechend, jetzt dazu über, dessen Leistungen speziell auf dem Gebiete der Algebra etwas eingehender zu behandeln, und beginne zu diesem Behufe mit einer kurzen Analyse der einzigen algebraischen Abhandlung unseres Autors, eben jener *„brevis regularum algebrae descriptio"*, welche SCHEUBEL seiner Euklidausgabe vorausschickte.

Im ersten Kapitel, das die Überschrift „Numeratio" trägt, führt SCHEUBEL zunächst die „Characteres" ein, durch welche die verschiedenen Potenzen irgend einer Gröfse (radix, res), beginnend mit der 0ten Potenz, bezeichnet werden. Es sind dies die folgenden damals in Deutschland ganz allgemein verbreiteten Zeichen, welche z. B. auch RUDOLFF[60]) und STIFEL[61]) verwenden: „*φ*, *ϰ*, *ʒ*, *ce*, *ʒʒ*, *ßʒ*, *ʒce*, *bßʒ*, *ʒʒʒ* etc." Da aber auf diese Weise die Schwierigkeit entsteht, dafs für die unbegrenzte Zahl der Potenzen der radix eine unbegrenzte Zahl solcher Zeichen nötig wäre, so will SCHEUBEL jene Potenzen durch die Glieder der Zahlreihe, die ja auch unbegrenzt ist, bezeichnen, und dementsprechend führt SCHEUBEL als gleichbedeutend mit der obigen Zeichenreihe die folgende Reihe ein: „N, Ra., Pri., Se., Ter., Quar., Quin., Sex., Sep., etc.", deren Zeichen Abkürzungen der Worte: „numerus, radix, prima quantitas (weil entstanden durch einmalige Multiplikation), secunda quantitas, etc." darstellen[62]). Weiterhin wird in diesem ersten Kapitel noch die Bedeutung der Zeichen (: signa) + und — erläutert. Ein Ausdruck von der Form 30*ʒ* + 20*ϰ* — 10*φ* oder von der Form 30pri. + 20ra. — 10N bedeutet also nach unserer heutigen Schreibweise $30x^2 + 20x - 10$. In 4 weiteren Kapiteln wird sodann die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der so eingeführten „cossischen Gröfsen"[63]) gelehrt. Nach diesem ersten Abschnitte behandelt SCHEUBEL in einem zweiten die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Brüchen aus cossischen Gröfsen.

Aus dem so auf 13 Seiten dargestellten Algorithmus der Cofs möchte ich zur Charakterisierung SCHEUBEL's nur das folgende hervorheben. Wie

---

60) Vergl. RUDOLFF's Cofs vom Jahre 1525, fol. D, 2^v^.

61) Vergl. STIFEL, Arith. integ. 1544, fol. 235^r^; nur hat STIFEL das Zeichen *φ* nicht, sondern setzt dafür 1.

62) Einem ähnlichen Gedanken begegnen wir schon bei GRAMMATEUS.

63) SCHEUBEL, der sich eines reineren Latein befleifsigt, gebraucht den sonst verwendeten Ausdruck *„numeri cossici"* selbst nicht.

in andern algebraischen Werken des 16ten Jahrhunderts findet man auch bei SCHEUBEL gewisse Rechenregeln aufgestellt, welche den einzelnen Beispielen zu Grunde gelegt werden, und wie dort, so wird auch hier den einzelnen Beispielen jeweils eine „*comprobatio vel examen operationis*“ beigegeben, das heifst eine Probe durch Einsetzung eines bestimmten numerischen Wertes für die radix. Aber damit begnügt sich SCHEUBEL keineswegs, sondern er versucht auch das von ihm gelehrte Rechenverfahren abzuleiten; und da gerade diese Ableitungen für SCHEUBEL charakteristisch sind, möchte ich einige derselben mit seinen eigenen Worten wiedergeben.

Im dritten Kapitel, welches die Subtraktion behandelt, stehen unter andern auch die beiden Beispiele:

Pri.	N		Pri.	N
12	— 9		12	— 4
8	— 4	und	8	— 9
4	— 5		4	+ 5,

welche in unserer heutigen Schreibweise lauten würden:

$$(12x^2 - 9) - (8x^2 - 4) = 4x^2 - 5 \text{ und } (12x^2 - 4) - (8x^2 - 9) = 4x^2 + 5.$$

Die von SCHEUBEL beigegebene Ableitung lautet nun folgendermafsen: „*In his duobus exemplis, cum in utroque non* 8 *quantitates primae, sed hae in uno quidem minus* 4, *in altero uerò, minus* 9 *numeris subtrahendae sint,* 8 *primis integrè subtractis, residuis tandem id quod plus aequo subtractum est, iure accedere debet. Quare in priori quidem exemplo, loco* — 9, *cum* 4 *accedant, tantum* — 5, *in posteriori uerò loco* — 4, *cum* 9 *accedant,* + 5 *N positum est.*“ Ebenso enthält das 4te Kapitel, in welchem die Multiplikation gelehrt wird, unter andern folgende 3 Beispiele:

7 pri. + 4 ra.	7 pri. — 4 ra.	9 ra.
9 ra.	9 ra.	7 pri. — 4 ra.
63 se. + 36 pri.	63 se. — 36 pri.	63 se. — 36 pri.

dieselben würden heute lauten:

$$(7x^2 + 4x)\,9x = 63x^3 + 36x^2; \quad (7x^2 - 4x)\,9x = 63x^3 - 36x^2;$$
$$9x\,(7x^2 - 4x) = 63x^3 - 36x^2.$$

Dazu schreibt SCHEUBEL: „*Primum exemplum est facile, cum in eo tam* 7 *primae quantitates quàm* 4 *radices, cum* 9 *radicibus multiplicari debeant. Secundi autem, et tertii exemplorum ratio, cum sit paulo inuolutior, explicanda communi quadam (quae uersatur in huiusmodi rebus) notitia esse uidetur. In secundo,* 7 *primae solidae ac integrae cum* 9 *radicibus, in tertio,* 9 *radices cum* 7 *itidem integris primis multiplicentur: hae tamen integrae cum non sint, sed quandam decessionem perpessae sint priuatiuo signo*

—, *necesse est, ut in multiplicatione tantum decedat, quantum non legitime accessit, priori summae procreatae ex multiplicatione: atque hic quidem, quantum 9 radices cum 4 radicibus: illic uerò, 4 radices cum 9 radicibus multiplicatae producunt, id quod per signum diminutionis — fieri debet, sic. — 36 pri. — 36 pri. Ex quo ratio intelligi potest, propter quam, si multiplicetur + cum —, uel contrà — cum +: non plus, sed minus producatur, quod et ipsum regula quadam proposuerunt in Algebricis exercitati, quae est notanda.*" Ein weiteres Beispiel des 4ten Kapitels hat die Form:

8 pri. — 9 N			$8x^2 - 9$
8 pri. — 9 N		Die heutige Form	$8x^2 - 9$
64 ter. — 72 pri.		dieses Beispiels wäre:	$64x^4 - 72x^2$
— 72 pri. + 81 N			$- 72x^2 + 81$
64 ter. — 144 pri. + 81 N			$64x^4 - 144x^2 + 81.$

Scheubel erläutert dasselbe in folgender Weise: „*Quomodo 8 primae cum 8 pri. ut totum cum toto multiplicari debet, item quomodo 8 primae* — 9 N *cum 8 primis, Postremò 8 primae etiam cum 8 primis* — 9 N *suprà ostendimus. At uerò cum in hoc exemplo multiplicandi ratio minus sit perspicua, eam explanare obiter hoc loco uolui, ut intelligatur scilicet caussa etiam, propter quam, signo — notatis numeris, non minus, sed plus procreetur, hoc quod diuersum quid, quàm in superioribus hactenus est habitum, esse sola. Multiplicentur igitur 8 primae — 9 N ut dictum est, cum 8 primis, et producentur 64 ter. — 72 pri. Sed quia non cum 8 primis integris, uerùm cum iis, detractione, 9 N imminutis, multiplicatio institui debet, plus quàm par erat, priore multiplicatione est procreatum, quare ut conueniens producatur numerus, ratione defectus in multiplicante, 8 primae nouies ex hoc producto subtrahendae erunt. Atqui rursum, cum non 8 primae, sed hae minus 9 N multiplicari debeant, 9 N rursus nouies addendae sunt. quod tum fit, quando minus multiplicatur per minus (id quod tertiò ratione signorum, + & — in multiplicatione obseruari debet). Quo demum reddito, uerus productus numerus apparebit. Tribus igitur regulis his suprà propositis, omnis multiplicatio, ratione quidem signorum + & — absolvitur: quae tamen, quia prima et ultima coincidunt, ad duas regulas reduci possunt. Prima. Si fuerint eadem signa multiplicantis et multiplicandae quantitatis, procreatus ex multiplicatione numerus notatur signo affirmativo +. Secunda. Si fuerint signa diversa: notatur productus ex multiplicatione numerus signo priuatiuo vel negatiuo —.*" Und noch eine 2te Ableitung des eben behandelten Produkts giebt Scheubel mit folgenden Worten: „*Multiplicentur primò 8 pri. — 9 N cum 8 primis una, postea etiam cum 9 N altera quantitate. Subtrahatur deinde, per caput praecedens, posterius productum à priori, & relinquetur uerus ex multiplicatione productus numerus, ut sequitur:*

		Productorum subtractio.
8 *pri.* — 9 *N*	8 *pri.* — 9 *N*	64 *ter.* — 72 *pri.*
cum 8 *pri.*	*cum* 9 *N*	72 *pri.* — 81 *N*
64 *ter.* — 72 *pri.*	72 *pri.* — 81 *N*	64 *ter.* — 144 *pri.* + 81 *N*

Wenn ich in diesen Versuchen Scheubel's auch keine Beweise sehe, die allen Forderungen entsprechen, welche die heutige Algebra an ihre Beweise stellt, so kann ich doch auf der andern Seite auch Treutlein nicht verstehen, wenn derselbe in seiner „deutschen Coſs“ — in welcher er gerade auch Scheubel in den Kreis seiner Betrachtungen zieht — zu dem Schlusse kommt: „Entsprechend der allgemeinen Sitte der damaligen Zeit ist natürlich von einer Begründung der Richtigkeit solcher Rechenvorschriften (d. h. der Zeichenregeln für die Subtraktion relativer Zahlen) niemals die Rede“, oder gar ein anderesmal schreibt: „Von einer irgendwie auch nur plausibeln Erläuterung des Grundes solcher Zeichenregel (d. h. der Zeichenregel für die Multiplikation relativer Zahlen) ist natürlich nirgends die Rede“[64]).

Als Überleitung zum nächsten Hauptabschnitt, welcher die Lehre von den Gleichungen enthält, behandelt Scheubel ganz kurz die Anwendung der *„regula proportionum“* (Regel detri) in Aufgaben mit cossischen Zahlen. Die Gleichungen selbst teilt Scheubel, soweit er sie überhaupt in den Kreis seiner Betrachtungen zieht, in 3 Gruppen ein, je nachdem zu ihrer Lösung eine *Aequatio prima, secunda* oder *tertia* nötig ist. *„Aequatio prima“* nennt Scheubel eine Gleichung zwischen 2 Gliedern, welche verschiedene *„characteres“* d. h. verschiedene Potenzen der Unbekannten enthalten, eine solche *aequatio prima* ist z. B. die folgende:

4 sex. aequantur 108 ter., d. h. $4x^7 = 108x^4$.

„Aequatio secunda“ nennt Scheubel eine dreigliedrige Gleichung, deren Glieder 3 aufeinander folgende *„characteres“* enthalten; hierher gehört z. B. die Gleichung:

1 pri. + 12 N aequales 8 ra., d. h. $x^2 + 12 = 8x$.

Nahe verwandt[65]) mit der *„Aequatio secunda“* ist die *„Aequatio tertia“*, nur folgen sich die 3 *„characteres“* nicht unmittelbar aber doch mit gleichen Intervallen. Eine *aequatio tertia* wäre z. B. folgende:

$$ax^{m+2n} + bx^{m+n} = cx^m.$$

Auch hier, bei Scheubel's Behandlung der Gleichungen, beschränke ich mich darauf nur das Wichtigste hervorzuheben.

64) Vergl. Treutlein, die deutsche Coſs, a. a. O. p. 38 und 39.

65) *„Tertia aequatio est ferè eadem cum secunda.“*

Nachdem Scheubel die Lösung der ***aequatio prima*** gezeigt hat, weist er darauf hin, daſs dieser Lösung die ***regula de proportionalibus*** zu Grunde liege, welche Regel, gleichwie das eventuell nötige Wurzelausziehen, im gemeinen Rechnen behandelt zu werden pflege. Von den beigegebenen 17 Textaufgaben (*Aenigmata seu quaestiones*) greife ich zwei heraus. Die Aufgabe No. 15 lautet: „72 soll so in 4 Teile zerlegt werden, daſs der erste Teil $\frac{1}{7}$ des 2ten und 3ten; der 2te Teil $\frac{1}{5}$ des 3ten und 4ten & der 3te Teil die Hälfte der 4ten und ersten werde.“ Scheubel löst diese Aufgabe folgendermaſsen: Der erste Teil sei 1 ra., so beträgt der 2te und 3te zusammen 7 ra., und der 4te 72 N — 8 ra. . . Nun ist der 2te Teil $\frac{1}{5}$ des 3ten und 4ten, also $\frac{1}{6}$ des 2ten, 3ten und 4ten, d. h. $\frac{1}{6}$ von 72 N — 1 ra., also gleich 12 N — $\frac{1}{6}$ ra. . . Die 4 Teile sind also: 1 ra.; 12 N — $\frac{1}{6}$ ra.; $7\frac{1}{6}$ ra. — 12 N; 72 N — 8 ra. und damit erhält man die Gleichung:

$$7\tfrac{1}{6}\text{ ra.} - 12\text{ N} \quad \text{aequal.} \quad 36\text{ N} - 3\tfrac{1}{2}\text{ ra.};$$

in minimis:

$$10\tfrac{2}{3}\text{ ra.} \quad \text{aequal.} \quad 48\text{ N} \quad \text{etc.}$$

Man sieht, wie gewandt Scheubel die Einführung mehrer Unbekannten zu umgehen weiſs. Das zweite Beispiel, das ich herausgreife, ist die Aufgabe No. 8. Dieselbe lautet: „Eine Zahl ist so in 3 Teile geteilt, daſs der erste Teil zur ganzen Zahl sich wie 2 : 3, der zweite Teil zur ganzen Zahl sich wie 1 : 2 und der um 4 vermehrte dritte Teil zur ganzen Zahl sich wie 3 : 4 verhält. Gesucht die Zahl und ihre Teile.“ Scheubel führt die Lösung dieser Aufgabe auf 3 verschiedene Arten durch, je nachdem er die ganze Zahl oder einen der beiden ersten Teile als Unbekannte einführt. Doch interessiert uns hier nicht sowohl der Weg der Lösung als vielmehr das Resultat der Aufgabe, das Scheubel in folgende Worte kleidet: „*Facit: Impossibile, cum tertia pars nihil sit, propterea quòd duabus prioribus totum et plus etiam conueniat. Vel facit: Totus numerus* $4\frac{4}{11}$. *Partes uèro: prima* $2\frac{10}{11}$; *secunda* $2\frac{2}{11}$; *tertia* $-\frac{8}{11}$. *Id quod examinari potest in hunc modum etc.*“ Und nun zeigt Scheubel eingehend, wie diese Werte allen in der Aufgabe gestellten Bedingungen entsprechen. Man sieht also, Scheubel läſst hier, wie auch noch in einem andern Beispiele, unter Umständen eine Lösung, die einen negativen Wert enthält, als vollständig brauchbar zu. Es kommt eben im vorliegenden Falle alles auf die Auffassung des Begriffs „Teil“ an; würde es sich in einem analogen Beispiel statt um eine Zahl und ihre Teile, um irgend einen physischen Körper und seine Teile handeln, so würde Scheubel seiner Lösung ein „*non verus numerus*“ beigesetzt haben.

In der Behandlung der *aequatio secunda* d. h. der quadratischen Gleichung fällt zunächst auf, daſs Scheubel gegenüber Stifel scheinbar wieder

einen Schritt zurückgeht, indem er hiebei die 3 bekannten kanonischen Formen zu Grunde legt:

1) Pri. + ra. aequales N; 2) Ra. + N aequales pri.;
3) Pri. + N aequales ra.

Aber auf der einen Seite ist die Auffassung STIFEL's von der Lösung einer quadratischen Gleichung als einer Wurzelausziehung aus einem cossischen Ausdrucke[66]) nicht einwandsfrei, und vor allem leicht mifsverständlich, und auf der andern Seite ist bei näherem Zusehen die STIFEL'sche Zusammenfassung doch eine blofs äufserliche, ja sogar blofs scheinbare. Schon in der Durchführung der einzelnen Beispiele, noch mehr in den Beweisen, vor allem aber in der Sonderstellung der Gleichungen mit zwei Wurzeln blickt die alte Dreiteilung nicht blofs durch, sondern tritt offen zu Tage. So bestechend drum auch im ersten Augenblicke die STIFEL'sche Darstellung sein mag, und so hohe Anerkennung der darin liegende Fingerzeig auch verdient, so ist daneben SCHEUBEL's Darstellung doch auch noch berechtigt, so lange eben der durch jenen Fingerzeig gewiesene Schritt nicht auch wirklich vollzogen ist. Handelt es sich aber wie bei SCHEUBEL um ein Werk, das in erster Linie den Zweck verfolgt, den „tiro" in die Algebra einzuführen, dann ist SCHEUBEL's Methode unbedingt der STIFEL'schen vorzuziehen.

Ganz unverständlich ist es mir, wenn TREUTLEIN in seiner „deutschen Cofs", nachdem er die Bedeutung der Beweisführung bei STIFEL mit vollem Rechte sehr hervorgehoben hat, in Betreff SCHEUBEL's schreibt[67]): „Einen Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens (d. h. der zur Lösung quadratischer Gleichungen aufgestellten Regeln) läfst sich das von SALIGNAC Beigebrachte kaum nennen; denn es ist nur verständlich, wenn man an EUKLID's Sätze II, 4, 5, 6 denkt; SCHEUBEL verweist einfach auf letztere." Ja gewifs verweist SCHEUBEL einfach auf letztere, aber dieses Verweisen findet statt in einer Arbeit, die einer EUKLIDausgabe vorausgeschickt ist, und schlägt man deshalb ein paar Blätter um, so findet man am bezeichneten Orte, d. h. eben bei den Sätzen II, 4, 5, 6 die vollständig durchgeführten Beweise[68]). Es handelt sich sowohl bei STIFEL als auch bei SCHEUBEL um Beweise in geometrischem Kleide, wie wir sie ganz ähnlich, wohl aus griechischen

66) STIFEL schreibt z. B. bei der Lösung der Gleichung $x^2 = 84 - 6x$: „*Cum autem* 1 ℨ *sit aequalis* 84 — 8 ꝛc, *ideo requirenda est radix de hoc connexo* 84 — 8 ꝛc etc." Vergl. STIFEL, Arith. int. 1544, fol. 241ᵛ.

67) Vergl. a. a. O. p. 95.

68) Zu allem Überflusse setzt SCHEUBEL jener Verweisung nach die Worte bei: „*Eò itaque cum peruentum fuerit, horum demonstrationes ac similitudines quas cum rationibus illarum propositionum habent, indicabimus.*"

und welche ich deshalb
die Darstellung dieser
Fall $x^2 = ax + b$,
schen Darstellung zu
der Beweis STIFEL's nur
die Bezugnahme auf
der Unzuläng-
Dem angezogenen
propositione (II, 6)
secundi in aequa-
„*Atque haec qui-*
regulis Algebrae
habent, eas ...
Leider blieb
Ausführung, und
Manuskripte ver-
seiner Hand finden
tiones subtiliores"

nicht anders zu
bei seiner dritten
kann ich nicht mit
„Bei dem *Cano*
$x^2 + b = ax$,
auftreten können, ist
stets beide zulässig
für identisch mit
Gleichung jener
hat; handelt es
der eine oder
seine Ansicht die
Feld: „Von zwei
Für eine Krone
als von der Seide
beträgt 42 Kronen.
Stücke für 1 Krone?"

a. a. O. p. 149.

In einer ersten Lösung führt SCHEUBEL die betreffende Anzahl der Ellen des zweiten Stücks als Unbekannte ein und kommt so zu der Gleichung

58 ra. + 15 N aequales 21 pri. (*Est autem exemplum canonis secundi*),

dadurch erhält er für die Unbekannte als einzigen Wert 3. In einer zweiten Lösung führt nun SCHEUBEL die gesuchte Ellenzahl des ersten Stücks als Unbekannte ein und kommt so auf die Gleichung

216 ra. aequales 63 pri. + 10 N (*Est autem exemplum canonis tertii*).

Diese Gleichung ergiebt für die Unbekannte zwei Werte, von denen jedoch nur der eine brauchbar ist: „*manent* $\frac{2}{21}$, *non uerus: uel ueniunt* $3\frac{1}{3}$ *uerus numerus.*" Wie TREUTLEIN hierzu schreiben kann: „SCHEUBEL müfste eigentlich die beiden Lösungen $\frac{10}{3}$ und $\frac{2}{21}$ zulassen", kann ich ebenso wenig verstehen, wie den daraus gezogenen Schlufs. Vergleicht man hierzu weiterhin das, was STIFEL in seiner Ausgabe der RUDOLFF'schen Cofs von sich aus der „sechsten regel CHRISTOPHORI" vorausschickt[72]), so wird man finden, dafs in der That STIFEL und SCHEUBEL in unserer Frage vollständig übereinstimmen; ja viel eher könnte es scheinen, dafs in derselben SCHEUBEL über STIFEL hinausging, als dafs er hinter ihm zurückblieb. STIFEL verwirft z. B. die Lösung einer Aufgabe, welche als Teile der Zahl 10 die beiden Zahlen 15 und — 5 ergeben würde, während SCHEUBEL, wie wir gesehen haben, die Lösung einer Aufgabe, in welcher als Teile der Zahl $4\frac{4}{11}$ die Zahlen $2\frac{10}{11}$, $2\frac{2}{11}$, $-\frac{8}{11}$ auftreten, nicht unbedingt zurückweist. Doch halte ich diese Gegenüberstellung und damit auch den daraus gezogenen Schlufs nicht für berechtigt, denn in den angezogenen Fällen handelt es sich bei STIFEL um eine quadratische Gleichung, bei SCHEUBEL um eine lineare.

Über die *aequatio tertia* geht SCHEUBEL ziemlich rasch weg: „*Haec nullam requirit demonstrationem, cum ex praecedentibus duabus* (*quarum demonstrationes unde peti debeant, indicauimus*) *composita sit.*" Bemerken möchte ich dabei nur das eine, dafs SCHEUBEL am Schlusse dieses Abschnittes eine Aufgabe bringt, welche auf eine kubische Gleichung führt. SCHEUBEL fügt dieser nicht hierher gehörigen Aufgabe ohne jedes weitere Wort nur das Resultat bei.

Nach der Behandlung der Gleichungen geht SCHEUBEL nun über zur Darstellung der Algorithmen der „*numeri surdi*,"[73]) d. h. zum Rechnen mit irrationalen Zahlen. Hierbei verwendet SCHEUBEL als Quadratwurzelzeichen entweder die Silbe „ra." oder das Zeichen „$\sqrt{\ }$", welche beide jeweils dem

72) Vergl. Die Cofs CHRISTOFFS RUDOLFFS etc. durch MICHAEL STIFEL Gebessert und sehr gemehrt. Amsterdam 1615, p. 671.

73) „*Numeri igitur surdi sunt, quorum radices desideratae, numero certo expressae, inueniri nequeunt*" (p. 35).

Radicanden vorangestellt werden; analog bezeichnet er die Kubikwurzel durch „ra. cu." oder durch „$\sqrt[w]{}$" und die vierte Wurzel durch „ra. ra." oder „$\sqrt[w]{}$." Noch eine dritte Art von Wurzelzeichen entspringt daraus, daſs z. B. die Kubikwurzel als „*radix secundae quantitatis*" auch angedeutet werden kann durch „*radix se.*", doch macht SCHEUBEL von dieser Art der Bezeichnung keinen weiteren Gebrauch. Zunächst behandelt SCHEUBEL den „*Algorithmus de surdis quadratorum*", d. h. das Multiplizieren, Dividieren, Addieren und Subtrahieren von Quadratwurzeln. In unserer heutigen Zeichensprache lauten die hierbei zu Grunde gelegten Regeln:

$$1)\ \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}; \qquad 2)\ \sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$3)\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+\sqrt{4ab}} \quad 4)\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a+b-\sqrt{4ab}}$$ [74]).

Doch verwendet SCHEUBEL die beiden letzten Formeln nur in beschränktem Maſse, so giebt er als Resultat der Addition: „ra. 15 ad ra. 17" wohl die Zahlform „ra. col. 32 + $\sqrt{}$1020 an[75]), doch fügt er hinzu: „*Adduntur huiusmodi numerorum surdorum radices commodius per particulam illam Plus, uel per eius signum* +, *quod idem est, sic* ra. 17 + ra. 15." Sind aber diese zu addierenden Wurzeln „commensurabel[76])," so kann die Addition in einfacherer Weise vollzogen werden nach dem Schema

$$\sqrt{k\cdot a^2}+\sqrt{k\cdot b^2}=\sqrt{k(a+b)^2}.$$

Als Abschluſs der Darlegung einer jeden Operation verweist SCHEUBEL darauf, daſs die inverse Operation „*examen*" zu ihr ist.

In ganz analoger Weise wie das eben skizzierte Rechnen mit Quadratwurzeln behandelt SCHEUBEL weiterhin das Rechnen mit Wurzeln dritten und vierten Grades, nur begnügt er sich hier bei der Addition und Subtraktion incommensurabler Wurzeln ausschlieſslich mit dem einfachen Aggregate, d. h. er giebt die den obigen Formeln 3 und 4 entsprechenden Formeln nicht, dagegen zeigt er bei der Multiplikation und Division der Wurzeln vierten Grades in einem Anhange die Multiplikation und Division ungleichnamiger Wurzeln. Ebenso ist auch die nun folgende Darstellung des „*Algorithmus de Binomiis et Residuis*" dem Bisherigen vollständig entsprechend. Die Begriffe „Binomium" und „Residuum" oder „Apotome" legt SCHEUBEL mit Bezugnahme auf EUKLID X, 36 und 73 fest. Hervorzuheben

---

74) In Betreff der Formeln 3 und 4 verweist SCHEUBEL auf EUKLID II, 4, 7, an welchen Stellen er deren Berechtigung darlegt.

75) „*Radix collecti* 32 + $\sqrt{}$1020" d. h. $\sqrt{32+\sqrt{1020}}$.

76) „*Ac commensurabiles quidem sunt, qui alicuius communis numeri diuisione, ad quadratos reduci possunt*" (p. 37).

wäre etwa nur die mit Bezugnahme auf EUKLID VII, 17 aufgestellte Form der Division:

$$\frac{m \pm n}{p \pm q} = \frac{(m \pm n)(p \mp q)}{(p \pm q)(p \mp q)}.$$

Schliefslich behandelt SCHEUBEL noch in einem besonderen Abschnitt das Wurzelausziehen aus Binomen und Residuen, und giebt zu diesem Zwecke nach EUKLID X die bekannte Einteilung derselben in je sechs Ordnungen. Das Wurzelausziehen selbst wird nach einem *„canon generalis“* vollzogen, der in unserer heutigen Zeichensprache lauten würde:

Ist
$$\sqrt{a} > \sqrt{b},$$
so ist
$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{a} + \sqrt{\tfrac{a-b}{4}}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{a} - \sqrt{\tfrac{a-b}{4}}}.$$

Begnügt sich SCHEUBEL dabei auch zunächst mit der Probe, welche in einem nachherigen Quadrieren des erhaltenen Resultats besteht, so verweist er doch am Schlufs noch auf eine andere Methode, nach welcher auf algebraischem Wege eine solche Wurzel ausgezogen werden kann. In unsere heutige Zeichensprache übersetzt lautet diese leicht durchsichtige und auch schon von STIFEL gebotene Methode: Soll aus dem Ausdruck $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ die Quadratwurzel gezogen werden, und ist $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, so bestimme man die beiden Unbekannten x und y aus folgenden beiden Gleichungen:

$$x + y = \sqrt{a}, \text{ und } xy = \tfrac{1}{4} b, \text{ dann ist } \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}.$$

Am gegebenen Orte[77]) zieht SCHEUBEL nach dieser Methode die Wurzel aus je einem Binom zweiter und dritter Art, und je einem Residuum zweiter und sechster Art; hierzu wählt er Beispiele, welche er schon nach dem *„canon generalis“* behandelt hat. Da aber SCHEUBEL nirgends auf Gleichungen mit zwei Unbekannten eingeht, werden auch hier diese Beispiele mit einer Unbekannten gelöst, und zwar erreicht das SCHEUBEL wie STIFEL einfach durch folgende Proportion $x : \tfrac{1}{2}\sqrt{b} = \tfrac{1}{2}\sqrt{b} : (\sqrt{a} - x)$.

Habe ich damit SCHEUBEL's Behandlung der Irrationalgröfsen dargestellt, so mufs ich noch kurz auf das Urteil TREUTLEIN's über diesen Teil der SCHEUBEL'schen Algebra eingehen. Dieses Urteil lautet: „In der Behandlung der Irrationalgröfsen ist ihm offenbar RUDOLFF Vorbild, so dafs gegen STIFEL ein Rückschritt stattfindet“[78]). Auch dieses Urteil kann ich

77) p. 66/67.

78) Vergl. a. a. O. p. 20. Dem oben citierten Urteile folgt der Satz: „die Einzelheiten werden geeigneten Ortes zur Besprechung kommen“. In dem Abschnitt III, der vom Rechnen mit Irrationalen handelt, sucht man aber in Betreff unserer Frage vergeblich nach konkreten Belegen des allgemeinen Urteils.

in seinem zweiten Teile nicht unbedingt als berechtigt ansehen. Wohl ist RUDOLFF das Vorbild SCHEUBEL's, dagegen kann ich bei letzterem nirgends in der Behandlung des Irrationalen einen thatsächlichen Rückschritt gegenüber STIFEL finden. Selbstverständlich können wir nicht erwarten, dafs SCHEUBEL auf den 76 Seiten seiner Algebra eben so viel bietet als STIFEL auf den 638 Seiten seiner Arithmetica integra, und dann dürfen wir vor allem bei der Beurteilung des SCHEUBEL'schen Werkes dessen Zweck nicht aus dem Auge verlieren. Dieser Zweck bedingt es z. B., dafs SCHEUBEL der Hauptsache nach nicht über die Wurzeln vierten Grades hinausgeht, und dieser Zweck ist vor allem auch bei der Art und Weise der Anordnung und Darstellung des Stoffes ausschlaggebend gewesen.

Als Anhang giebt SCHEUBEL seiner Algebra auf 22 Seiten eine Sammlung von 28 Textaufgaben bei, deren Lösung meist durchgeführt wird. In Betreff dieses Anhangs möchte ich nur das folgende kurz erwähnen. Gleich das erste Beispiel knüpft an ein rechtwinkliges Dreieck an, dessen Seiten sich als Residuen darstellen; im zehnten Beispiel[79]) wird der goldene Schnitt algebraisch behandelt. Nach dem zwanzigsten Beispiele schiebt SCHEUBEL fünf Aufgaben ein, welche der bekannten griechischen Anthologie entnommen sind[80]). Obgleich SCHEUBEL nirgends zwei und mehr Unbekannte verwendet, giebt er doch auch Aufgaben, wie z. B. folgende[81]): Drei Zahlen zu suchen, von denen die um acht vermehrte erste Zahl gleich einem Drittel der Summe der zweiten und dritten werde. Analog soll: $II + 8 = \frac{3}{5}(I + III)$ und $III + 8 = I + II$ werden. Solche Aufgaben führt SCHEUBEL, wie wir auch schon oben gesehen haben[82]), sehr gewandt mit einer Unbekannten durch, doch begnügt er sich bei einigen der schwierigsten der hierhergehörigen Beispiele mit der Angabe des Resultats. Hervorheben möchte ich noch die Aufgabe Nr. 21: „Jemand macht eine Reise und will so viele Tage fortbleiben als er Goldstücke mit sich nahm. Nun gewinnt er aber zu seinen Goldstücken jeden Tag soviel hinzu, als er je am Morgen des betreffenden Tages besitzt und bringt auf diese Weise im ganzen $52\frac{1}{2}$ Goldstücke zurück. Wie viel nahm er mit?“ SCHEUBEL löst diese Aufgabe folgendermafsen: Hätte der Reisende drei Goldstücke mitgenommen, so hätte er $3 + 3 + 6 + 12 = 24$

---

79) „Eine Zahl so in 2 Teile zu teilen, dafs das Quadrat des gröfseren Teiles gleich dem Produkte aus der ganzen Zahl und dem kleineren Teile werde.“

80) Es sind dies diejenigen Beispiele, welche ZIRKEL unter den Nummern 2, 4, 6, 9 und 46 aufführt. Vergl. ZIRKEL, die arith. Epig. der griech. Anth. Gymnasialprogramm. Bonn 1853. SCHEUBEL giebt bei diesen Aufgaben auch den griechischen Text.

81) „No. 6“.

82) Siehe S. 456.

Goldstücke heimgebracht; hätte er aber vier Goldstücke mitgenommen, so wäre er mit $4 + 4 + 8 + 16 + 32 = 64$ Goldstücken heimgekehrt. Man bezeichne drum die mitgenommene Baarschaft des Reisenden mit $(3 + x)$, wobei also $x < 1$ ist, so hatte der Reisende am Morgen des vierten Tages $(3 + x) + (3 + x) + 2(3 + x) + 4(3 + x) = (24 + 8x)$ Goldstücke. Im ganzen vierten Tag würde er also gewinnen $(24 + 8x)$ Goldstücke, und wenn er in einem Tage $(24 + 8x)$ Goldstücke gewinnt, so gewinnt er in x Tagen $x \cdot (24 + 8x)$ Goldstücke. Damit erhält man die Gleichung $(24 + 8x) + x \cdot (24 + 8x) = 52\frac{1}{2}$, welche den Wert $x = \frac{3}{4}$ ergiebt. Der Reisende nahm also $3\frac{3}{4}$ Goldstücke mit. In dieser Lösung liegt ein vollständig berechtigtes Näherungsverfahren vor, aber Scheubel scheint von der Thatsache, dafs seine Lösung nur ein Näherungsverfahren darstellt, kein Bewufstsein gehabt zu haben. Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Goldstücke mit x, so würde der Aufgabe folgende Gleichung entsprechen: $x \cdot 2^x = 52\frac{1}{2}$, und damit wäre $x = 3,7915$.[83])

Wir haben oben gesehen[84]), wie Scheubel bei der Lehre von den Gleichungen das Wurzelausziehen als bekannt voraussetzt und sich deshalb damit begnügt, in Betreff dieser Operation auf das gemeine Rechnen zu verweisen. Scheubel ist dazu berechtigt, denn schon in seiner Arithmetik vom Jahre 1545 finden wir eine sehr eingehende Behandlung dieses Gegenstandes, auf welche ich als notwendige Ergänzung der nun abgeschlossenen Analyse von Scheubel's Algebra noch kurz eingehen möchte. Der Anordnung jenes Werkes zufolge kommt Scheubel darin an zwei verschiedenen Orten auf das Radizieren zu sprechen, nämlich im ersten und im fünften Traktate.[85]). Im ersten Traktate behandelt Scheubel speziell das Quadrat- und Kubikwurzelausziehen, während er im fünften Traktate das Wurzelausziehen ganz allgemein darstellt und bis zur 24. Wurzel auch praktisch verfolgt.

Nachdem Scheubel im ersten Traktate die Praxis des Quadratwurzelausziehens gezeigt hat, geht er dazu über, die Berechtigung des gelehrten Verfahrens darzulegen und benützt dazu einen Lehrsatz, der in unserer heutigen Zeichensprache lauten würde:

Sind a, b etc. je < 10, so ist:

$$(10a + b)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 10ab + b^2;$$

oder allgemein

---

83) Vergl. zu dieser Aufgabe auch: Cantor, Gesch. der Mathematik. II, p. 297/298.

84) Siehe S. 456.

85) Vergl. fol. E, 2^v & folgende und fol. a, 8^r & folgende.

$$(1000a + 100b + 10c + d)^2 = 1000000a^2 + 10000b^2 + 100c^2 + d^2$$
$$+ 2 \cdot 100000ab + 2 \cdot 1000(10a + b)c + 2 \cdot 10(100a + 10b + c)d.$$

In Betreff dieses Satzes beruft sich SCHEUBEL auf: „*arithmetices demonstratae* I, 32," doch erläutert und beweist er denselben auch für einen speziellen Fall durch eine geometrische Figur. Geht eine Wurzelausziehung nicht auf, so lehrt SCHEUBEL ein Verfahren, das sich folgendermaſsen darstellen läſst. Ist

$$a^2 < a^2 + b < (a+1)^2, \text{ so ist } \sqrt{a^2+b} \sim^{86)} a + \frac{b}{2a+1}.$$

Zur Rechtfertigung dieses Verfahrens führt SCHEUBEL mit Berufung auf „*demonstratae incerti autoris arithmetices* II, 33" den Satz an:

$$(a^2) + (2a + 1) = (a + 1)^2,$$

durch welchen auch in der That jenes Näherungsverfahren als solches gerechtfertigt ist, und ich kann nicht verstehen, warum TREUTLEIN dies nicht anerkannt hat[87]). In ganz analoger Weise behandelt weiterhin SCHEUBEL das Kubikwurzelausziehen. Der hier zu Grunde gelegte Satz (arithm. dem. I, 39) lautet

$$(100a + 10b + c)^3 = 1000000a^3 + 1000b^3 + c^3$$
$$+ 3 \cdot 10000ab(10a + b) + 3 \cdot 100ac(100a + 10b + c)$$
$$+ 3 \cdot 10bc(100a + 10b + c),$$

und das vorgetragene Näherungsverfahren läſst sich in die Form kleiden: Ist $a^3 < a^3 + b < (a + 1)^3$, so ist

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \sim a + \frac{b}{3a^2 + 3a + 1}.$$

Begründet wird dieses Näherungsverfahren durch den Satz (arith. dem. II, 34)

$$a^3 + \{(a+1)^2 + a^2 + (a+1)a\} = (a+1)^3.$$

Auch diese Begründung ist vollständig durchsichtig.

Im fünften Traktate lehrt SCHEUBEL die Praxis des Ausziehens einer beliebigen Wurzel und stellt nach einigen einleitenden Bemerkungen ein Schema der Binomialkoeffizienten bis zum 16. Grade auf, für dessen Bildung er folgende Vorschrift giebt: „Schreibe die natürliche Zahlenreihe vom Zweier ab zweimal so an, daſs beide Reihen im Zweier zusammenstoſsen und einen Winkel bilden. Addiere nun immer je zwei nebeneinander stehende Zahlen und schreibe die Summe unter die addierten Zahlen." Durch diese Vorschrift erhält man das

```
            2
         3     3
      4     6     4
   5    10    10     5
6    15    20    15     6
           etc.
```

86) Das Zeichen „$\sim$" möge bedeuten: „annähernd gleich".

87) Vergl. TREUTLEIN, das Rechnen im 16. Jahrhundert. A. a. O. p. 67.

nebenstehende Schema. Eine weitere Tabelle enthält die zehn ersten Potenzen der Zahlen 1—9. Durch diese beiden Beigaben ist nun SCHEUBEL in den Stand gesetzt, die allgemeine Regel für das Wurzelausziehen zu vollenden und in einer grofsen Zahl von Beispielen bis zum vierundzwanzigsten Grade hinauf durchzuführen. Geht die Wurzel nicht auf, so empfiehlt SCHEUBEL das folgende Verfahren: Ist

$$a^n < a^n + b < (a+1)^n,$$

so ist

$$\sqrt[n]{a^n + b} \sim a + \frac{b}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2} a^2 + \binom{n}{n-1} a + 1}.$$

Zwar kennt SCHEUBEL auch dasjenige Verfahren, das die folgenden Gleichung:

$$\sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt[n]{(a \cdot 10^{m \cdot n})}}{10^m}$$

zum Ausdrucke bringt, und es ist mir unerklärlich, dafs DROBISCH und TREUTLEIN die Bekanntschaft mit diesem Verfahren nicht auch SCHEUBEL zuschreiben[88]). Allerdings wenn SCHEUBEL dieses Verfahren auch kennt und in der Theorie billigt, so verwirft er dennoch seine Anwendung im praktischen Rechnen mit folgenden Worten: „Wenn ich dieses Bestreben auch nicht ganz verwerfe, wodurch jene näher an die Wahrheit zu gelangen versuchen, während es doch ausgemacht ist, die Sache liege so, dafs sie nicht erreicht werden kann, so wollte ich doch lieber da stehen bleiben, wo die Unmöglichkeit zu Tage tritt, als in leerer Neugierde weiterschreiten um ein Ziel zu erstreben, das bekanntermafsen nicht erreicht werden kann.“[89]) Ich habe diese Begründung deshalb so ausführlich gegeben, um zu zeigen, wie völlig haltlos ein Vorwurf ist, welcher von DROBISCH gegen SCHEUBEL erhoben und von TREUTLEIN nicht unbedingt zurückgewiesen wurde, nämlich der Vorwurf, SCHEUBEL habe in dem oben dargelegten Näherungsverfahren

88) Vergl. TREUTLEIN, das Rechnen etc. p. 70.

89) Hierbei handelt es sich zunächst um höhere Wurzeln. Das einfachste Beispiel, das hier SCHEUBEL behandelt, lautet $\sqrt[4]{8\,750\,864}$; mit 5stelligen Logarithmen berechnet ist diese Wurzel gleich 54,389, während SCHEUBEL's Methode einen Wert giebt, der nur in der letzten Stelle davon abweicht. Wollte man also durch Anhängen von Nullen „näher an die Wahrheit gelangen,“ so müfste man nicht weniger als 12 Nullen anhängen. Ein praktischer Versuch, aus der nun 19stelligen Zahl die vierte Wurzel auszuziehen, zeigt, dafs SCHEUBEL im Rechte ist, wenn er weiterhin bemerkt, dafs man da seine Zeit doch besser anwenden könne, und dabei ist das angezogene Beispiel noch das einfachste von denjenigen, die in Betracht kommen.

den Wert $a + \frac{b}{2a+1}$ für die wirkliche Wurzel aus $(a^2 + b)$ gehalten.[90]) Doch nicht nur aus dieser und noch einer ganzen Reihe anderer Stellen geht unzweideutig hervor, dafs SCHEUBEL den Näherungscharakter des von ihm gelehrten Verfahrens kannte, sondern bei der Darlegung jenes Verfahrens selbst im fünften Traktate schreibt SCHEUBEL ganz unzweideutig: „*id demonstrat propositae quantitatis radicem utcunque atque proximam*,“[91]) und hier endlich nennt SCHEUBEL auch die Quelle, welche er im ersten Traktate so oft citiert: „*Algorithmus demonstratus incerti autoris.*“[92]) Es handelt sich also hierbei augenscheinlich um dasjenige Werk, welches JOHANNES SCHÖNER im Jahre 1534 unter eben diesem Titel nach einem Manuskripte REGIOMONTANS bei PETREJUS in Nürnberg herausgab[93]), und als dessen Verfasser mit höchster Wahrscheinlichkeit JORDANUS NEMORARIUS nachgewiesen ist.[94])

Bei aller Verschiedenheit der STIFEL'schen und SCHEUBEL'schen Darstellung des Wurzelausziehens bieten beide doch manche auffallende Berührungspunkte dar, so dafs sich die Frage nicht umgehen läfst: wie ist dieses teilweise Übereinstimmen zu erklären? Die Antwort auf diese Frage mufs unbedingt dahin lauten: dadurch, dafs beide aus den gleichen Quellen schöpften. Schon die so nahe bei einander liegenden Datierungen beider Werke lassen eine tiefgehende Abhängigkeit des jüngeren vom älteren kaum annehmen, erschien doch das STIFEL'sche Werk im Jahre 1544 in Nürnberg, während das SCHEUBEL'sche Werk schon im Mai 1545 seine Leiziger Druckerei verliefs, und zwar als Erstlingswerk eines damals noch völlig unbekannten Tübinger Magisters, dessen Manuskript sicher nicht noch feucht schon einen Drucker fand. Noch mehr aber spricht eine eingehende Vergleichung beider Werke gegen die Annahme einer Abhängigkeit des einen vom andern. So weifs z. B. das STIFEL'sche Werk bei der Lehre vom Wurzelausziehen[95]) nichts von jener SCHEUBEL'schen Formel für die $n$te Wurzel aus $(a^n + b)$, und doch setzt diese Formel eine eingehende Kenntnis der Binomialkoeffizienten voraus, welche SCHEUBEL deshalb nicht wohl erst dem STIFEL'schen Werke entnehmen konnte. Ebenso tritt überall bei

---

90) Vergl. TREUTLEIN, das Rechnen etc. p. 67.

91) „Dies zeigt die Wurzel der vorgelegten Gröfse, soweit dies immer möglich ist, und zwar eine sehr nahe“. (Vergl. fol. d, 5r.)

92) Vergl. fol. d, 6v.

93) Leider konnte ich dieses Werk zur Vergleichung weder auf der Stuttgarter noch auf der Tübinger Bibliothek erhalten.

94) Vergl. CANTOR, Gesch. der Math. II. p. 58 und 563.

95) Dagegen legt STIFEL an einem andern Orte ein Verfahren zu Grunde, das von dem Gedanken ausgeht $\sqrt[2]{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}$. Vergl. Arith. integ. fol. 209v.

Scheubel ein Vertrautsein mit der Theorie und vor allem mit der Praxis des Ausziehens höherer Wurzeln zu Tage, das sich unmöglich von heute auf morgen erwerben läßt. Dazu nennt auch Scheubel dieses Ausziehen eine Sache: *etiammum non admodum trita neque usitata.*"[96]) So hätte Scheubel unmöglich schreiben können, wäre ihm das Stifel'sche Werk vorgelegen. Es tritt uns eben in diesen parallelen Leistungen Stifel's und Scheubel's eine Erscheinung entgegen, welche die Geschichte der Wissenschaften sehr oft zeigt.

Hiermit habe ich auch die spezielle Übersicht über die Leistungen Scheubel's in der Algebra beendigt; und versuchen wir nun auf Grund derselben ein Gesamtbild von Scheubel als Mathematiker speziell als Algebraiker zu entwerfen, so müssen wir uns vor allem hüten, nicht durch Anlegung eines modernen Maßstabes unhistorisch zu verfahren. Wenn wir z. B. bei Gemma Frisius 5 Jahre früher als bei Scheubel jenes Verfahren finden, das durch die Formel $\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a+1}$ gekennzeichnet wird, so sind wir von unserem heutigen Standpunkte aus nur zu leicht geneigt, in der Übertragung desselben Verfahrens auf die Wurzel $\sqrt[n]{a^n+b}$ etwas Selbstverständliches zu sehen. Zeigt uns aber die Geschichte auf der einen Seite jenes erste Verfahren schon ein halbes Jahrtausend früher bei Alkarchî, auf der andern Seite aber eben Niemand, der in der langen Zwischenzeit jenen „selbstverständlichen" Schritt that, so wird uns jener Schritt doch in einem etwas anderen Licht erscheinen. Und wenn ich auch nicht behaupten kann und will, daß Scheubel den ganzen Schritt allein von sich aus that, weil uns derselbe bei ihm zum ersten Male entgegentritt, so kann ihm doch das Verdienst nicht abgesprochen werden, an der Verallgemeinerung, welche jener Schritt bedeutet, erfolgreich mit gearbeitet zu haben. Und wie es sich hier bei einem beliebig herausgegriffenen Beispiele verhält, so verhält es sich auch überall da, wo wir in der vorliegenden Analyse der Scheubel'schen Werke etwas Ähnlichem begegneten[97]). Wir dürfen, wollen wir anders eine historisch gerechte Würdigung Scheubel's durchführen, denselben nicht aus seiner geschichtlichen Umgebung herausreißen, sondern müssen ihn betrachten als einen „deutschen Algebraiker des XVI. Jahrhunderts".

Noch hatte damals die Algebra kaum aufgehört eine Art Geheimlehre zu sein, die dem Eingeweihten es ermöglichte, nach festüberlieferten Regeln

96) Vergl. fol. d, 7^r.

97) Leider erlaubt es mir der mir hier zur Verfügung stehende Raum nicht, in ausgedehnterem Maße solchen Vergleichungen Scheubel's mit seinen Vorgängern nachzugehen.

Aufgaben aufzulösen, vor denen jeder Nichteingeweihte Halt machen mufste; noch war es möglich, dafs ein Meister wie Riese, dem das Sprichwort Unsterblichkeit verlieh, bei der Lösung quadratischer Gleichungen von einer verfehlten Formel ausgehen konnte. Hier war es schon ein hohes Verdienst, wenn ein Mann das gesamte da und dort in Deutschland zu hebende Wissen in Algebra in sich aufnahm, und die Zahl derer ist klein, welche in Deutschland damals auch nur dieses Verdienst in Anspruch nehmen konnten. Scheubel blieb aber hierbei nicht stehen, sondern er mehrte auch das überkommene Erbe an wichtigen Punkten. Während weiterhin die überwiegende Mehrzahl der Vertreter der Algebra im XVI. Jahrhundert in Deutschland aus der Praxis der Rechenschulen hervorgegangen war, und sich deshalb, wenn ich so sagen darf, mit einer zunftmäfsigen Ausübung ihrer Kunst begnügte, tritt uns dagegen in Scheubel ein Mathematiker entgegen, der, durch die strenge Schule Euklid's gegangen, auch in der Darstellung der Arithmetik und Algebra die Verpflichtung fühlte, nicht nur Regeln aufzustellen, sondern sie auch zu beweisen, sei es, dafs er zu diesem Zwecke da und dort her solche Beweise zusammentrug, sei es, dafs er selbst versuchte solche Beweise aufzustellen. In dieser grundsätzlichen Einführung und Durchführung des Beweises in den Gebieten der gemeinen Arithmetik und der deutschen Cofs liegt ein weiteres Hauptverdienst Scheubel's, ein Verdienst, an dem nur sehr wenige Zeit- und Volksgenossen Scheubel's einen Anteil haben, und keiner von ihnen hat daran einen so grofsen Anteil wie Scheubel. Welch hervorragende Bedeutung Scheubel auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts in Deutschland beizulegen ist, und zwar sowohl des wissenschaftlichen Hochschulunterrichts als auch des praktischen Unterichts in den Rechenschulen, habe ich oben gezeigt. Und dafs schliefslich auch in seinem Wirkungskreise als Hochschullehrer Scheubel nicht ohne Erfolg thätig war, das dürfen wir aus dem ebenfalls schon angezogenen Urteile Mästlin's schliefsen, jenes Mästlin's, der selbst wieder der Lehrer Kepler's war.

Blicken wir unter den deutschen Algebraikern des XVI. Jahrhunderts uns um, so tritt uns nur einer entgegen, der Scheubel an die Seite gestellt werden kann: Michael Stifel. Es war nicht in meiner Absicht, bei der Darstellung der Leistungen Scheubel's die Leistungen Stifel's als Mafsstab zu Grunde zu legen, aber die nach meiner Überzeugung unzutreffende Beurteilung Scheubel's durch Treutlein zwang mich mehrfach auf eine Gegenüberstellung beider Forscher einzugehen. Doch lag mir dabei nichts ferner und liegt mir nichts ferner, als Stifel's wohlverdienten Ruhm schmälern zu wollen. Nein, auch ich halte den Autodidakten Stifel für den genialeren von beiden, und nur äufsere Umstände liefsen Stifel nicht

zur vollen Entfaltung und vor allem zur strengen Konzentration seiner geistigen Kräfte auf dem Gebiete der Mathematik gelangen. Aber eine Erwägung der Frage, was hätte STIFEL an SCHEUBEL's Stelle geleistet, kann darum dennoch in keiner Weise SCHEUBEL's Verdiensten Abbruch thun. Nur was war, und nicht was hätte sein können, ist Objekt der Geschichte, und so zeigt uns dieselbe, dafs, wenn auch nicht als Algebraiker, so doch als Mathematiker im Ganzen STIFEL hinter SCHEUBEL zurücktreten mufs. Treffend bemerkt CANTOR[98]) über den „Geometer" STIFEL: „Von einer Ausführung dieser Absicht (nämlich eine Geometrie zu schreiben) ist nichts bekannt, wir haben indessen keinen Grund, das Unterbleiben besonders zu beklagen, wenn wir die einzige Stelle betrachten, an welcher STIFEL als eigentlicher Geometer sich kundgiebt." Doch dürfen wir auf der andern Seite STIFEL diesen Mangel nicht besonders hoch anrechnen, ist derselbe doch durch dessen Bildungsgang bedingt. Erst in reiferen Jahren führten mystische Zahlengrübeleien den früheren Mönch zur Algebra hin, und die Thatsache, wie er sich hier einarbeitete und gar bald nicht blofs das ganze Gebiet der damaligen Algebra vollkommen beherrschte, sondern auch zielbewufst in selbstthätiger Weise in die Um- und Weiterbildung dieser Algebra eingriff, wird ihm an und für sich schon stets einen hervorragenden Platz in der Geschichte der Mathematik des XVI. Jahrhunderts in Deutschland sichern. Möge es mir gelungen sein zu zeigen, dafs in eben dieser Geschichte der Mathematik des XVI. Jahrhunderts in Deutschland auch JOHANNES SCHEUBEL einen Platz verdient: nicht über, nicht unter, sondern neben MICHAEL STIFEL. Eingedenk einer Mahnung GOETHE's möchte ich aber meine Arbeit nicht mit einer Gegenüberstellung und Abwägung der Verdienste dieser beiden Männer abschliefsen, sondern mit dem Ausdruck der Freude darüber, dafs die deutsche Algebra des XVI. Jahrhunderts doch wenigstens solche Vertreter besafs wie MICHAEL STIFEL und JOHANNES SCHEUBEL.

---

98) Vergl. CANTOR, Gesch. d. Math. II, p. 403.

MATHEMATIK BEI DEN JUDEN

(1501—1550)

VON

MORITZ STEINSCHNEIDER

IN BERLIN.

Unter obiger Überschrift habe ich in der von G. Eneström in Stockholm herausgegebenen „Bibliotheca Mathematica", seit 1893, chronologisch geordnete Notizen über Gelehrte jüdischer Abkunft, insbesondere Autoren und Schriften, als Materialien zur Geschichte der Wissenschaft und Kultur zusammengestellt. Ich bin nunmehr, Ende des Jahres 1898, dort erst bis gegen Ende des XIV. Jahrhunderts gelangt, zugleich fast an dem Schlufs meines 83. Lebensjahres; also darf ich, bei dem beschränkten Raum, den mir der liberale Herr Redakteur gönnen kann, nur sehr zweifelhaft an die Fortführung jener Notizen bis zu Ende des Mittelalters denken, welche ich mir dort als Ziel gesteckt habe. Meine Aufzeichnungen reichen allerdings bis zum Jahre 1840, aber die Neuzeit, deren Anfang ich hier als ein Specimen gebe, unterscheidet sich vom Mittelalter derart, dafs die allgemeinen Bemerkungen, womit ich meine Zusammenstellung eröffnete, hier einigermafsen zu modifizieren wären; doch mufs ich mich darüber auf weniges beschränken.

Wir haben es hier mehr mit hebräischen Drucken zu thun, worüber bessere Auskünfte in einigen Katalogen (Bodleiana, Brit. Museum, Rosenthal in Amsterdam, Benjacob, Thesaurus, Wilna 1862 — vor Fürst's Bibliotheca Judaica mufs ich warnen) zu finden sind. In Bezug auf Handschriften, die noch immer beachtenswert sind, findet sich Näheres über die hier kurz bezeichneten Bibliotheken und Kataloge in meinen „Vorlesungen über die Kunde hebräischer Handschr." Leipzig 1897 (XIX. Beiheft zum Centralblatt für Bibliothekswesen).

Was den Inhalt der vorzuführenden Schriften und dessen Originalität betrifft, so erstreckt sich die Thätigkeit Einzelner noch immer auf alle Gebiete der Theorie und Anwendung; und diejenigen, die noch immer das Problem von der Ausgleichung des Sonnen- und Mondjahres auf Grundlage der unantastbaren traditionellen Normen im Aufstellen gröfserer Kalendercykeln zu lösen suchen und dabei jüngere Beobachtungen und fremde astronomische Tabellen benutzen, so wie die Bearbeiter kürzerer Kalenderperioden, bekunden doch in der Regel mehr oder weniger Bekanntschaft mit den derzeitigen astronomischen Theorien überhaupt und mit einzelnen nichtjüdischen Autoren und Schriften insbesondere, wofür sie als zeitgenössische Quelle herangezogen zu werden verdienen.

Eine mehr detaillirte Charakteristik einzelner Länder und Perioden steht mit der politischen Geschichte der Juden und der ihrer Litteratur in zu enger Verbindung, um in dieser vorzugsweise bibliographischen Vorarbeit auch nur skizziert zu werden.

Ich schliefse diese Vorbemerkungen mit einer Hinweisung auf die Differenz des Jahresanfangs im jüdischen und christlichen Kalender, so dafs das Jahr 5261 noch im Herbste 1500 beginnt, und in vielen Fällen auf genauere Feststellung des Datums zu verzichten ist.

1501 Ms. Schönblum (im J. 1867): *Ibronot,* s. unter 1412.

1503 Kalenderregeln beginnend mit dem J. 5264; Ms. Michael 542 (Neubauer 1171 III).

1504 Kalendarisches, im Gebetscyklus, Ritus Romagna, gedruckt (Näheres in Hebr. Bibliogr. VII, 120, XI, 17, 56, 105, XVII, 107, XIX, 31; vgl. XX, 121).

1504 Josef, Sohn des Samuel, des Leibarztes Papst Julius II., dessen eigenes Diplom v. J. 1504, im J. 1524 erneuert wurde, wird auch als Mathematiker bezeichnet; doch scheint er Nichts veröffentlicht zu haben (Quellen bei Vogelstein und Rieger, Geschichte der Juden in Rom II, 85).

1506 (5267) beginnen Tabellen in Ms. Mich. 469 (Neub. 902[8]).

1512—7 Tafeln? s. 1559.

1513 erschien die erste wenig bekannte Ausgabe von Augustinus Ricius, *De motu octavae spherae, opus mathematicâ atque philosophia plenum; ejusdem de astronomiae autoribus* (so) *epistola* (s. Roncompagni, Bullettino V, 1872 p. 469); diese erste Ausgabe ist nicht erwähnt in der jüngeren 4. Lutetiae 1521, welche meinem weitläufigen Artikel im Catal. libr. hebr. Bodl. col. 2143—45 zu Grunde liegt; wozu weiteres über den Verf. (einen Schüler des bekannten Abraham Sacut, den ich schon im Magazin f. d. Lit. d. Auslandes 1848 S. 230 als geborenen Juden erkannte), über das Thema und die Citate des Buches s. Zeitschr. DMG. VIII, 178, XXIV, 374, XXV, 420. Den Anhang (Epistola), welcher den jüdischen Ursprung der Astronomie beweisen sollte, ist der Herausgeber, als unwesentlich und (!) weil er abhanden gekommen ist, schuldig geblieben.

1518 erschien „Ain neu geordnet Rechenbüchlein mitt (sic) den zyffern: den angenden [für angehenden] schülern zu nutz u. s. w. durch Joan Boeschensteyn von Efslingen priester“ u. s. w. Augspurg 1518. 4°.

Panzer, Zusätze S. 150 n. 924c. Das Exemplar Heyse's (Bücherschatz n. 301), das die k. Bibliothek in Berlin mit der ganzen Sammlung erworben hat, liegt mir vor. Boeschenstein war ein Lehrer des Hebräischen

(s. die Quellen in meinem Katalog der hebr. Handschr. in München, 2. Aufl. 1895 n. 401, Zusätze zu meinem Handbuch u. s. w im Centralblatt für Bibliotheksw. 1896 S. 358), protestierte zwar gegen die Zumutung jüdischer Geburt (im J. 1472), welche jedoch nicht unwahrscheinlich ist, weshalb er hier nicht fehlen soll. Wie er dazu kam, ein Rechenbüchlein herauszugeben, läfst sich wohl aus seinen dürftigen Verhältnissen erklären; auch sein Hebräisch bleibt im Kreise des Elementaren.

Das Büchelchen (Titelbl. mit Holzschnitt, Sign. A—E ungleich) dürfte schon selten geworden und eine kurze Inhaltsangabe nicht überflüssig sein. Es beginnt: „Welcher lernen will anfängklichn̄ (sic) rechnen durch die zyffer ist not das (sic) er wisse un̄ fleissig erkenne die figurn̄ der zyffernn (sic)." Auf die 9 Ziffern folgt ein Beispiel der 6 Positionswerte; dann die 7 „Figuren", 1. „Numeratio Zelung", 4 u. 5. „Duplatio Zwispilung und Mediatio Halbierung", nach Einigen in 6. Multiplic. Merung, und 7. Divisio Taylung einbegriffen. Jede Rechnungsart bietet ein einfaches Beispiel und Probe, bei der Ausrechnung wird ein X für 4 Ziffern angewendet. Dann folgt das Rechnen in Brüchen („gebrochnen", „geprochnes", „zerbrochnes"), dann Regula de Try, oder magistralis, auch aurea (maysterliche, guldine ordnung), dann „Die regel der Gesellschafften" (sic) worin ein Memorialvers von 6 Zeilen: „Hinden und fornen (sic) gleich nammen (sic) richt" u. s. w.; Regula fusi, beginnend mit einem achtzeiligen Vers. Zuletzt einige Fragen, die letzte: „Es seind zwo Frauen die Hand eyer bey ainander fail" (s. unten zum J. 1537). Die letzte Seite enthält die Einteilung von müntz, gewicht, mafs (fueder 12 aymer), zeyt, elen (Ellen).

Bald nach 1526 erschien in Venedig bei Daniel Bomberg eine neue verbesserte Ausgabe des von Elia ha-Levi in Konstantinopel (1520) edirten Festgebetbuchs (*Machsor*) nach dem Ritus Romagna (Griechenland) mit Zusätzen von Abraham ben Jomtob Jeruschalmi (aus Jerusalem). Dieses Buch, wovon äufserst wenige vollständige Exemplare existieren dürften, enthält einen Abschnitt über Kalenderwesen f. 452 ff., mit einem stereotyp gewordenen Citate aus dem Talmud (Sabbat, K. 7) beginnend. Abraham hat die dazu gehörenden Tabellen nach den neuen Grundsätzen des Ulug Beg angelegt welche er an einem grofsen, von ihm selbst angefertigten, von Minute (*Dak*) zu Minute geteilten Instrumente, dessen Diagonale beinahe 24 Spannen lang, erprobt und bewährt gefunden hat. Der Name des Ulug Beg (dessen Tafeln — 1444, nach Sédillot, Prolégomènes, p. 34, falsch 1436 p. 36 — schon von Elia Baschiatschi angeführt werden) ist im Druck verstümmelt (Hebr. Bibliogr. X, 120). Ich bemerke noch: das Jahr 261 (= 1500) wird f. 458 erwähnt. Abraham citiert den Astronomen Isak Israeli (der 1310 lebte) und tadelt die Tafeln des Ver-

fassers der „Flügel" (Immanuel ben Jacob, 1365, s. Bibl. Mathem. 1898 S. 79).

Eine Anweisung zur Berechnung von Neumonden und Quatembern, mit dem Titel *Sefer limezo Moledot u Tekufot* in Seb. Münsterus „Calendarium Hebraeum ex Hebraeorum penetralibus" etc. 4. Basil. 1527 (Catal. Bodl. p. 549 u. 3545) hat p. 94 richtig das Jahr 5281 als das 17. des 278. Cyklus, also 1520, hingegen falsch 270 und „septuaginta" = Chr. 1511 (!) p. 95. Das Schriftchen ist wohl aus älteren sogen. „*Ibronot*" kompiliert, der Stil ist teilweise unhebräisch oder hart, wie schon der Titel wenigstens auf einen nichtjüdischen Redakteur, etwa Münster selbst? führt.

Der Arzt Abraham de Balmes (gest. in Venedig 1523) übersetzte, grofsenteils oder durchaus, im Auftrag christlicher Gelehrter, verschiedene Schriften der Araber aus hebräischen Übersetzungen ins Lateinische, wovon nur die philosophischen des Averroes gedruckt sind. Zu seinen ungedruckten Übersetzungen aus unbestimmter Zeit gehören 2 aus dem Gebiete der Astronomie, noch handschriftlich erhalten, worüber ich anderswo ausführlich gehandelt habe (s. die Anführungen in: Die hebr. Übersetzungen S. 539, 560 u. 972; Bibl. Mathemat. 1890 S. 107), die eine unter dem Titel *Isagogicon Astrologiae* Ptolemei ist die Isagoge des Geminus, die andere, dem Kardinal Dominico Grimani gewidmete, heifst in der lateinischen Übersetzung: „Alacen, *liber de mundo*", enthält aber das Buch der Astronomie von ibn al-Heitham, welchen erst unsere Zeit als identisch mit dem Optiker, vulgo „Alhazen", erkannte. Vorrede (oder Widmung) Abraham's und „Prohoemium" des Verf. in der lateinischen Übersetzung gab ich in meiner Abhandlung: „*Notice sur un ouvrage astron. inédit d'* ibn Heitham", Extrait du Bullettino etc. t. XIV 1881 etc. Rome 1883, und Appendice (aus Boll. 1883) 1884.

Schon in der 2. Hälfte des XV. Jahrhunderts begannen verschiedene Männer von der Sekte der Karäer (oder Karaiten, Bibelanhänger und Gegner der talmudischen Tradition), unter der Leitung einzelner ihrer religiösen Gegner („Rabbaniten") sich mit der Mathematik zu beschäftigen, und zwar hauptsächlich in Konstantinopel und der Nachbarschaft, wo die Karaiten gleichen Schutz mit den Rabbaniten fanden. Zu ihren Nachfolgern gehören einige Autoren, welche um 1522 ff. genannt werden, nämlich:

Josef Tischbi, Verfasser eines Kommentars über den Kalenderabschnitt in dem Buch der Gebote von Ahron ben Elia (Bibl. Mathem. 1898 S. 34), anonym in Leyden, Ms. Warner 52[15] (p. 240 meines Katal., dazu Hebr. Bibliogr. X, 98). Derselbe soll auch einen Kommentar zu den Tabellen des Elia Baschiatschi (XV. Jahrh.) verfafst haben; Abr. Firkowitzsch schreibt ihm auch sein Ms. 722 (jetzt in der Petersburger Bibliothek) zu, was

Gurland in seinem Verzeichnis mathematischer hebr. Handschr. in Petersburg verschweigt (Hebr. Bibliogr. l. c.).

Moses Ma'halli (? aus Ma'halla; s. Jewish Quart. Revue 1898 p. 137, n. 332[b]) erscheint in den Collectaneen des Josef Tischbi als Lehrer desselben, aber keine Schrift von Moses ist bekannt; seine Randnoten zu dem oben genannten Abschnitt des Ahron v. Elia werden von Josef Tischbi zitiert (Hebr. Bibliogr. XX, 98 gegen die Entstellungen Fürst's, Gesch. d. Kar. III, 26).

Samuel ben Salomo, mit dem, vom Propheten Samuel entlehnten Ehrennamen Ramati (im Sinne von „hoher"), daher auch schlechtweg: „Rabbi Ramati", wahrscheinlich in Akierman(?), wird in den Collectaneen des Josef Tischbi zum J. 1524 genannt, zum J. 1549 als „Greis" (Hebr. Bibliogr. XX, 122, gegen Fürst's unbegründete Angaben, l. c. II, 323).

Eine anonyme Abhandlung „über alle Partien" des jüdischen und christlichen Kalenders mit Tabellen (die Radix ist 1523) enthält Ms. Paris 1098[3]; leider giebt der Katalog niemals den Umfang des letzten Stückes eines Kodex an. Ich knüpfe hieran ganz kurz 2 oder 3 andere anonyme Schriften über denselben Gegenstand, wahrscheinlich beide aus Italien stammend und Bestandteile von Sammelhandschriften über diesen beliebten Gegenstand; aus d. J. 1525—7, Ms. Benzian 48 D., 1527 Ms. Berlin 224[6] (Verz. II, 1897 S. 75); in demselben Kod. (f. 45) v. J. 1533.

1526 starb Elia Misrachi (d. h. der Orientale), berühmter Rabbiner in Konstantinopel, dessen Arithmetik nach seinem Tode daselbst u. d. T. *Melechet ha-Mispar* nicht vor 1532 gedruckt und schon sehr selten ist. Ein Auszug mit lateinischer Übersetzung von Oswald Schreckenfuchs und Anmerkungen von Sebastian Münter erschien in Basel 1547. Näheres darüber findet man in meinem „*Brani dell' Aritmetica* d'Elia Misrachi *ecc. lettera IV. a* Don B. Boncompagni", 4° Roma 1866, p. 43—67; und eine Beurteilung vom mathematischen Standpunkt aus in Gustav Wertheim's „Die Arithmetik des Elia Misrachi", im Progr. der Realschule in Frankf. a. M. 1893; 2. verb. Aufl., Braunschweig 1896 (5 Bl. u. 68 S., s. meine Anzeige in Monatsschrift für Gesch. u. Wiss. d. Judenth. XL, 1896 S. 96). Wertheim bemerkt kulturgeschichtlich, daſs in den praktischen Aufgaben weder Spieler, noch Beute teilende Söldner, noch in der Schenke sitzende Leute, keine Zins nehmenden Gläubiger vorkommen. Quaritch's Katalog N. 319 (1878) n. 9380 verzeichnet ein Ms. der Arithmetik, kopiert von einem Schüler des Verf., Menachem b. Samuel (Bebr. Bibliogr. XVIII, 119). — Elia's Schrift über Euklid und Ptolemäus' Almagest beruhen noch auf einer unsicheren Quelle (die hebr. Übersetz. S. 508, 524).

1528 ist ein anonymes Kalenderwerk verfaſst, Ms. der Bodl. (Oppenh. 692 Qu. f. 113, bei Neubauer n. 817), geschrieben 1538 (?) von Israel di Baësa; 1529 ein anderes desgl. ms. Leyden Warner 66 (Katal. p. 283). — 1533 s. oben 1527.

Ungefähr in diese Zeit gehört wohl ein jüdischer zweifelhafter Mathematiker, dessen Spur ich bisher vergeblich aufgesucht habe. Der Chronist und Mathematiker David Gans (gest. 1613) berichtet in seiner Chronik (II 3^b unter J. 1906, s. meine Noten zu Baldi, in Boncompagni's Bullett. V, 477, verbess. Abdruck, Roma 1874 p. 45): „Der groſse Astronom, der berühmste aller Zeitgenossen, Petro Apiano, Lehrer des Israel Tafus (?) gesegn. And. erwähnt, daſs der Erzvater Abraham der erste in der Zahl- und Sternkunde bekannte Mann war.“ Petrus Apianus, Verf. der Cosmographie (1539) starb 1552 (Weidler, Hist. p. 350). In dem Münchener hebr. Ms. 394 f. 104 wird die Anordnung der 1080 Stundenteile (72 × 15, s. Bibl. Mathem. 1899 S. 9 A. 6) im Namen eines Israel mitgeteilt, und f. 102 ist das J. 1550 angegeben; dennoch habe ich im Katalog, 2. Aufl. S. 218, die Identität dieses Israel mit dem Schüler des Petrus abgelehnt.

Im J. 1536 erschienen in Konstantinopel u. d. T. *Eser Ieriot* (10 Vorhänge, oder Kolumnen?) astronomische Tabellen über 10 Jahre, hebräisch, wovon heute kein Exemplar mehr bekannt ist; die älteste Quelle nennt als Autor Jechiel ben Reuben (mein Catal. Bodl. p. 1281) der offenbar identisch mit dem Homonymen J. b. R. Aschkenasi („Deutscher“, d. h. Nordeuropäer), welcher die Konstantinopler Ed. des Jakob ben Ascher 1539/40 mit einem Index versah (Catal. Bodl. p. 1183 n. 6 fehlt der Name), und wohl auch „Jech. Aschkenasi“ Associé des Herausgebers der Gutachten des Isak b. Scheschet, Konst. 1546/7 (Catal. Bodl. p. 2933). Die Autorschaft ist also noch fraglich.

Im Jahre 1537 schrieb Abraham ben Jehuda, genannt Eberlin (= Abrahamlein) in Frankf. a. M. „Das Buch der Ziffern“ (*plural*, im Epigraph), am Anfang: „Zu erkennen zu geben und zu erklären das Buch der Zahl (*Mispar*), worin 9 Pforten (Abteilungen) sind; ich werde zuerst die *Kabbalot* (Überlieferungen) erklären, welche der Rechner kennen muſs, das sind die Schlüssel, wonach er alle Rechnungen wissen kann.“ Zuletzt kommen 27 „Rätsel“ (Aufgaben), deren letztes: 3 Weiber verkaufen Eier. Ich vermute, daſs hier eine Übersetzung oder Bearbeitung eines, vielleicht deutschen Rechenbuches vorliegt (vgl. oben 1518 Boeschenstein). Neubauer (n. 1271[10]), dessen Angaben ich aus Autopsie im J. 1847 ergänze, zweifelt, ob Abraham Verf. oder Kopist sei; in meinem Index zu Katal. Michael ist er nicht aufgeführt. Später fand ich eine auffallende Ähnlichkeit des

Rechenbüchleins mit Ms. MICHAEL 248 (NEUBAUER 2170[4]); im Titelregister fehlen die Titel, und nun ersehe ich die Identität mit Ms. München 394[4] mit dem Titel: „Buch der Ziffer" (Zifra), das ist die Null; die Aufgaben zuletzt hat der Kopist nicht vollendet. Die Multiplikationsfigur, welche die (spätere) NEPER'sche ist (Katal. Münch. S. VIII), führt vielleicht auf den Ursprung dieses für die Geschichte der Arithmetik nicht uninteressanten Büchleins, wozu die Kopisten Zusätze im Namen verschiedener Juden gesetzt haben.

Mit dem Jahre 1539 beginnt das Werk des JSACHAR IBN SUSAN, gedruckt 1564, unter welchem Jahre Näheres angegeben wird. 1539/40 sind in Italien geschrieben die Kalenderregeln in Ms. OPPENH. Add. Qu. 57 der Bodl. (NEUB. 2072[1]).

JOSEF DEL MEDIGO in seinem Buche *Elem* über mathematische Probleme (zuerst Amst. 1629 gedr., dann in Odessa 1864, S. 275, vgl. S. 352, *Maajan Chatum* Anf., ohne den Namen) zitiert PEDRO NUÑEZ, „den grofsen Mathematiker von Samen der Juden", der in Lisabon im J. 1541, am 1. Oktober das „Herz des Skorpions" beobachtet habe. Dieser PEDRO ist der bekannte PETRUS NONIUS oder NONNIUS, dessen: *„de Crepusculis"* mit „ALLACEN" (IBN AL HEITHAM) Ylissip. 1542, und dessen: *de Algebra, Arithmetica et geometria,* Antwerpen 1567 erschien — geb. 1492 in Alcaçar de Sal (die Nouv. Biogr. univ. Bd. 38 (1862) p. 362, enthält Nichts über seine Herkunft).

[Zum Jahre 1543 habe ich hier nur eine kurze Berichtigung zu notieren: Dem EDUARD PINEL wird aus Mifsverstand eine hebräische Grammatik und eine Schrift über den Kalender beigelegt; die Grammatik ist keine hebräische und die andere handelt: *„de calendis"*; s. Monatsschrift für Gesch. u. Wiss. d. Judenth. 1898 S. 522 Anm. 1.]

Vor 1545 (?) kopiert VIDAL DI ברום (wie auszusprechen?) das Werk des ISACHAR IBN SUSAN; s. f. 12 der 1. Ausg. Solonichi 1564.

Im J. 1546 schickt CHAJJIM CHABER, wie früher sein Vater, der Arzt ISAK (vgl. ZUNZ, zur Geschichte und Lit. S. 531, LANDSHUTH, Onomasticon, S. 117), von Damaskus aus „Synagogenkalender" (*Luach ha-Keneset*); hier ist vielleicht eines der ältesten Zeugnisse von der weiten ehemaligen Verbreitung dieser Einrichtung, welche in Italien schon in der Mitte des XV. Jahrh. unter der Benennung „Synagogenblatt" (*Nejar ha-Keneset*) vorkommt (s. mein *Jewish Literature* p. 189). In Ms. Berlin 224[9] (Mein Verzeichn. 2. Abth. S. 76, aus dem J. 1811) wird dafür „Tageblatt" (*Nejar ha-Jamim*) im Italienischen *„Carta di scuola"* (hier im Sinne von „Schule" für Synagoge) gebraucht. Wie es scheint, hat sich der Gebrauch

eines Kalenders in den Synagogen nicht nach Nordeuropa verbreitet. Über das Verhältnis desselben zum christlichen Kirchenkalender ist meines Wissens nirgends die Rede (s. meine Artikel: „Der jüdische Kalender" im Jahrbuch zur Belehrung u. s. w., Beilage zum Volks- und Hauskalender her. v. M. Braun, 43. u. 45. Jahrg., 1895 u. 1897).

Im J. 1547 erschien in Rom ein hebräischer anonymer Druck in 12°, dessen Titel selbst nicht sicher ist. Er ist bis jetzt nur aus Wolf's Bibl. Hebr. (Bd. II, 1721 p. 1306 n. 238, wonach kurz in meinem Catal. Bodl. p. 550 n. 3551) bekannt, der denselben wahrscheinlich gesehen oder gar besessen hat. Ein Exemplar ist mir nicht bekannt. Der angebliche Titel „*Jad Schearim*" dürfte „14 Pforten" bedeuten. Das Schriftchen behandelt den jüdischen und den christlichen Kalender in 11 Kapiteln, deren Inhaltsangabe bei Wolf nur unter K. 10 den christlichen erwähnt. Meine Konjektur betreffs des Titels gründet sich auf die 14 Kalenderformen, worüber der Römer Benjamin Anaw (dei Mansi) um 1260—69 eine in Italien viel benutzte Schrift verfaſst hat (s. Bibl. Mathem. 1897 S. 15 § 34; die dort S. 18 A. 6 zitierte Hebr. Bibliogr. XVIII, 99 ist nicht berücksichtigt in den beiden Geschichten der Juden in Rom von A. Berliner II, 54, Vogelstein und Rieger II, 122).

Über den Architekten und Geometer Simson (oder Simon) Ginzburg (oder Günzburg), der um 1548—70 Etwas über Geometrie geschrieben aber nicht ediert haben soll, habe ich noch immer nichts Sicheres ermitteln können (s. die Zitate in meinem Catal. Bodl. p. 2626 n. 7214, und auſser den dort zitierten Quellen: Sternberg, Geschichte der Juden in Polen, 1878 S. 145; Jech. M. Zunz, *Ir ha-Zedek,* Lemb. 1874, Anhang S. 21).

[Dem bekannten Philosophen und Theologen Obadja Sforno (gest. 1550 in Italien) hat man ein anonymes Kompendium des Euklid in dem hebr. Ms. 1001 der Pariser Bibliothek nur darum beigelegt, weil sein Werk, das auch gedruckt ist, vorangeht, s. Die hebr. Übersetz. S. 506.]

Moses Maimonides, in seinem berühmten religions-philosophischen Werke, betitelt: „Führer der Verirrten", T. I, Kap. 73, führt als Beispiel für Begriffe, die für unsere Vorstellung unmöglich und doch wissenschaftlich erwiesen sind, das Vorhandensein zweier Linien an, die stets sich einander nähern aber niemals einander schneiden, ohne die Beschaffenheit dieser Linien näher anzugeben, mit Berufung auf das „Buch der Kegelschnitte". Munk, in seiner französischen Übersetzung des „*Guide des égarés*" (Paris 1856, I, 416) weist auf Archimedes II Theor. 13 hin, wo von der hyperbolischen Kurve und der Asymptote die Rede ist. Schon in der Mitte

des XV. Jahrh. widmete SIMON MOTOT (die Aussprache dieses Namens ist zweifelhaft) der Erklärung dieses Problems eine kleine besondere hebräische Schrift, welche wahrscheinlich ohne Namen erwähnt ist in einer um ein Jahrhundert jüngeren des Italieners MOSES PROVINCIALE, beendet im Frühling 1549, gedruckt mit der hebräischen Übersetzung des „Führers“ (*Moré*) in Sabionetta (1553) auf 2 Bl. in Folio, mit dem Kolumnentitel „Erklärung der zwei Linien, welche der Lehrer (MAIMONIDES) im 1. Teil Kap. 73 Blatt 64^b erwähnt.“ Diese Abhandlung, nicht in allen Exemplaren zu finden, enthält 15 Theoreme mit eben so vielen mathematischen Figuren und soll schon 1550 in Mantua in einer italienischen Übersetzung in hebräischen Lettern erschienen sein, die ich nicht aus Autopsie kenne, und die heute nur noch in Italien erhalten sein dürfte. Diese italienische Übersetzung übersetzte ins Lateinische FR. BAROCIUS (BAROZZI) in seinem Buche: *„Geometr. problema 13 modis demonstratum, quod docet duas lineas in eodem plano designare, quae nunquam invicem coincidant etc.“* 4. Ven. 1586, führt sie aber mit folgenden Worten ein (p. 290): „R. MOYSIS NARBONENSIS“ [dieser Kommentator des „Führers“ lebte im XIV. Jahrh., sein Kommentar zum 1. Teil wurde erst 1791 gedruckt!] *„libellum in italica lingua scriptum, Mantuaeque impressum A. MDL cui titulus est: Opus novum geometricum ad demonstrandum quomodo super una plana superficie duae lineae possunt exire etc.“* BAROCIUS hält diese Übersetzung aus dem Hebräischen: *„quae rem non geometricis rationibus demonstrat“*, für ungenügend; er zählt 18 Propositionen. Über den nirgends genannten (jüdischen?) Übersetzer ins Italienische habe ich nichts ermitteln können. In Venedig erschien 1551 eine hebr. Ausgabe des Führers, aber die Erklärung des geometrischen Problems ist dort weder hebräisch noch italienisch zu finden. Ein Druck mit hebr. Lettern in Mantua 1550 hat typographische Bedenken, wie auch ein Druck der Übersetzung vor dem Original. Genaueres darüber wäre daher sehr wünschenswert. (Über die ganze Sache s. meinen Catal. Bodl. p. 771, 1983, 2959; Die hebr. Übersetz. S. 426; Monatsschr. f. Gesch. u. Wiss. d. Jud. 1898 S. 466.) Hiernach ist BONCOMPAGNI's Artikel „FR. BAROZZO“ (in seinem *„Bullettino“* 1884 p. 899) zu ergänzen.

Die anonyme Erklärung desselben Themas im Wiener Ms. 75 bedarf noch näherer Untersuchung. Anfang und Schlufs (in den Ergänzungen GOLDENTHAL's S. 79) sind sehr ähnlich denen der Abhandl. von SIMON MOTOT; letzterer zitiert aber APOLLONIUS nicht, wie ich in meinen Notizen finde. Über eine andere Abhandlung über dasselbe Thema von einem „SALOMO BEN ISAK“ in ms. ALMANZI 213^5 (jetzt ms. Brit. Mus. Add. 27, 107, bei G. MARGOLIOUTTI, *Descriptive list of the Hebrew ... Mss.*, n. 4893 p. 74) habe ich die von LUZZATTI erbetene Auskunft nicht erhalten (Hebr. Bibliogr. 1862

S. 129, wo A. 2 „Provinciale“ heifsen soll: „Motot“). In Benjacob's Thesaurus S. 284 n. 250 (nach Mitteilungen Almanzi's) heifst es „von Salomo“ und „R. Israel“; ich habe daher die Konjektur als eine solche dahingestellt, dafs jener Salomo der Familie Israel, oder Israeli, in Toledo angehöre, also 1349 gestorben sei (Biblioth. Mathemat. 1898 S. 10).

Das latein. Ms. München 5645 in Folio f. 117—23 (nach alter Numeration, jetzt 132—8), enthält „Zachariae *hebraei in Kalendarii Romani reformationem lucubrationes*“, die Unterschrift lautet: „Zacharias *levita hebraeus Genuensis*“; einige Zeilen daraus über die Einteilung der Stunde in 1080 Teile zitiert Boncompagni in den *Atti dell' Acad. pontif.*, XVI, 1863 p. 781. Ein Jude Sacharja ha-Levi ist nicht bekannt, hingegen lebte Serachja ha-Levi, Neffe des Historikers Josef Kohen, um 1550 in Genua; die Verwechslung dieser Namen habe ich auch sonst nachgewiesen (Hebr. Bibliogr. 1872 S. 43, vgl. Isid. Loeb, Joseph Haccohen, 1888 p. 15). Da der Name Serachja weniger bekannt ist als Zacharias, so kann auch der Autor selbst in einer lateinischen Schrift den bekannteren gewählt haben; wenn nicht ein lateinischer Übersetzer eines hebräischen Originals dafür verantwortlich sein sollte?

Im J. 1550 studierte ein polnischer Jude Mattatja ben Salomo Delacrot (oder wie der zweifelhafte Name auszusprechen ist) an der Universität zu Bologna; es ist nicht unmöglich, aber seltsam, dafs sein Sohn Salomo im J. 1552 eine Approbation unterzeichnete, worin er den Vater als verstorben bezeichnet, während ein anderer Sohn Josef noch 1615 lebte. Weniger auffällig und sicher ist es, dafs Mattatja sich mit der Erklärung kabbalistischer Schriften beschäftigte, in denen allerdings Zahlspielereien mit den bekanntlich auch als Ziffern geltenden hebräischen Buchstaben eine Rolle spielen, und zugleich sich in ernste astronomische Studien vertiefte, die ihn vielleicht zur Kosmographie führten. Er übersetzte nämlich in hebräische Prosa das Buch: *Image du monde*, welches die „weltwunderliche“ — wenn diese Bezeichnung eben so sprachlich als sachlich gerechtfertigt erscheint, — französische Kosmographie des Geometers Gossouin in Verse brachte und dem Omons, oder dem Gauthier von Metz (1245), beigelegt wird. Das hebräische Buch erschien erst 1733, ein jüdisch-deutscher Auszug aber schon 1733. Zwei andere anonyme Bearbeitungen desselben Werkes gehören nicht an diese Stelle; näheres über alle drei in „Die hebr. Übersetz.“ S. 950.

Mattatja las in Bologna unter Anleitung eines Lehrers das beliebte Buch *De sphaera mundi* von Joh. Sacrobosco im lateinischen Texte, den er in seinem hebr. Kommentar zur hebr. Übersetzung des Salomo Abigedor (1399), gedruckt 1720, heranzieht (Die hebr. Übersetz. S. 644).

Das Ms. 1097 der Pariser Nationalbibliothek enthält das 1. Kapitel (über die Sonne) eines astronomischen Werkes, welches 1460 verfaſst ist, dann einen hebr. Kommentar über das ganze Werk, verfaſst in Italien 1551 von einem Juden, der von einem Christen unterrichtet worden. Ich vermute, daſs das Ms. einen Kommentar unseres Mattatja über die *Theorica planetarum* des G. Peurbach enthalte, deren Abfassung in jenes Jahr fällt, während die anderen Angaben zu Mattatja passen (Die hebr. Übersetz. S. 640).



BEMERKUNGEN ZUR GESCHICHTE DER ALTGRIECHISCHEN MATHEMATIK

VON

AMBROS STURM
IN SEITENSTETTEN.

1. Zu Anaximander.

Verschiedene Deutungen hat die *ὑποτύπωσις γεωμετρίας* erfahren, welche Suidas dem Anaximander zuschreibt.[1]) Es ist wahrscheinlich, daſs man dabei nicht an eine geometrische, sondern an eine geographische Leistung des milesischen Philosophen zu denken habe, nämlich an seine bildliche Darstellung der Umrisse von Land und Meer.

Es ist einerseits zu bemerken, daſs kein anderer Schriftsteller eine geometrische Arbeit Anaximander's erwähnt, andererseits muſs es auffallen, wenn Suidas die erwähnte geographische That mit Stillschweigen überginge, da sie doch als die erste ihrer Art im Altertume bekannt und berühmt war.

Einen positiven Beweis für die Richtigkeit der aufgestellten Annahme bietet eine Vergleichung der auf Anaximander bezüglichen Stellen des Diogenes Laertius und Suidas:

Diog. Laert. II, 1:	Suidas s. v. Anaximandros:
Ἀναξίμανδρος Πραξιάδου Μιλήσιος. οὗτος ἔφασκεν, ... μέσην τε τὴν γῆν κεῖσθαι a), *κέντρου τάξιν ἐπέχουσαν οὖσαν σφαιροειδῆ . . . . Εὗρε δὲ καὶ γνώμονα*	*Ἀναξίμανδρος Πραξιάδου Μιλήσιος, φιλόσοφος, συγγενὴς καὶ μαθητὴς καὶ διάδοχος Θάλητος, πρῶτος δ' ἰσημερίαν* d) *εὗρε καὶ τροπὰς* c) *καὶ ὡρολογεῖα* e), *καὶ τὴν*

1) M. Cantor, Vorlesungen üb. Gesch. d. Math. I. 2. Aufl. Leipzig 1894, S. 135 f. — C. A. Bretschneider (D. Geometrie u. d. Geometer vor Euklides. Leipzig 1870, S. 62) hält sie in Übereinstimmung mit Röth (Gesch. d. abendländ. Philos. II, S. 132) für eine „bildliche Darstellung“, einen Abriſs der zeichnenden Geometrie. — Fr. Blass (Fleckeisen's Jahrb. d. kl. Phil. 1872 (18), S. 28) meint, von einer Schrift sei keine Rede, sondern nur, daſs Anaximander überhaupt die Grundlagen der Geometrie gelehrt habe, womit nicht viel mehr, als nichts, gesagt sei. — P. Tannery (*Géométrie grecque.* Paris 1887, p. 74 n.) sagt: *„L' ὅλης γεωμετρίας ὑποτύπωσιν ἔδειξεν doit sans doute se rapporter à la figuration de la Terre sur une mappe-monde, qui fut l'oeuvre du Milesien.“* — G. Friedlein (Zeitschr. f. math. u. nat. Unt. 1871 (2), S. 344 f.) übersetzt: „Anaximander zeigte überhaupt das Bildliche der Geometrie; d. h. was die Figuren der Geometrie bedeuten und wie man etwas geometrisch nachbilden kann.“ Derselbe (Beitr. z. Gesch. d. Math. II. Hof 1872. S. 15): „Er gab eine bildliche Darstellung der ganzen Geometrie heraus.“

b) *πρῶτος καὶ ἔστησεν ἐπὶ τῶν σκιοθήρων ... τροπάς τε* c) *καὶ ἰσημερίας* d) *σημαίνοντα, καὶ ὡροσκόπια* e) *κατεσκεύασε. καὶ γῆς καὶ θαλάσσης περίμετρον πρῶτος ἔγραψεν* f). *Ἀλλὰ καὶ σφαῖραν κατεσκεύασε, τῶν δὲ ἀρεσκόντων αὐτῷ πεποίηται κεφαλαιώδη τὴν ἔκθεσιν* ...

γῆν ἐν μεσαιτάτῳ κεῖσθαι a), *γνώμονά τ' εἰσήγαγε* b) *καὶ ὅλως γεωμετρίας ὑποτύπωσιν ἔδειξεν* f). *ἔγραψε περὶ φύσεως, γῆς περίοδον καὶ περὶ τῶν ἀπλανῶν καὶ σφαῖραν καὶ ἄλλα τινά.*

Aus dieser Nebeneinanderstellung der zum Teile wörtlich gleichlautenden Nachrichten dürfte hervorgehen, daſs wir unter *γεωμετρίας ὑποτύπωσις* die bildliche Darstellung der Umrisse von Land und Meer zu verstehen haben, jenen *πίναξ γεωγραφικός*, den Eratosthenes[2]) dem Anaximander zuschreibt.

Es könnte der Einwand erhoben werden, ob es gestattet sei, das Wort *γεωμετρία* in diesem ungewöhnlichen Sinne zu nehmen. Diesen Zweifel beseitigt aber eine Stelle Plutarch's, wo die Abbildung der Umrisse von Land und Meer geradezu als der innerste Kern der Geometrie, *ἑστία τῆς γεωμετρίας*, bezeichnet wird.

In dem Dialoge *de facie in orbe lunae* fragt nämlich ein gewisser als *γεωμέτρης* bezeichneter Apollonides um die Ansicht, welche Clearchus über das im Monde sich zeigende Antlitz ausgesprochen habe, und erhält folgende Auskunft[3]):

Παντὶ μᾶλλον ἀγνοεῖν ἢ σοὶ προσῆκόν ἐστι λόγον, ὥσπερ ἀφ' ἑστίας τῆς γεωμετρίας ὁρμώμενον· λέγει γὰρ ἀνὴρ εἰκόνας ἐσοπτρικὰς εἶναι καὶ εἴδωλα τῆς μεγάλης θαλάσσης ἐμφαινόμενα τῇ σελήνῃ τὸ καλούμενον πρόσωπον.

Jedem könnte es eher verziehen werden, als Dir, eine Ansicht nicht zu kennen, welche sozusagen vom Herde der Geometrie ausgeht. Der Mann sagt nämlich, daſs das sogenannte Gesicht (im Monde) nichts anderes sei, als Spiegelbilder und Ansichten des groſsen Meeres, welche im Monde sichtbar sind.

Es dürfte sonach Anaximander in der Geschichte der Mathematik ebensowenig eine Rolle spielen, als einer der übrigen ionischen Naturphilosophen, auſser Thales. Denn, wie Diels[4]) nachgewiesen hat, beruhen auch die Distanzzahlen, die Anaximander seinen Himmelsringen gegeben

---

2) Strabo I, 1. c. 7. Ed. Mein. p. 8.

3) *De facie in orbe lunae* 920 f. Mor. ed. Bernadakis vol. V. Lips. 1893. p. 404. (Ed. Didot p. 1127).

4) Arch. f. Gesch. d. Philos. 2, S. 228 ff.

hat, nicht auf geheimnisvoller Arithmetik, sondern auf einer mystisch-poetischen Anschauung, auf dem Kulte der Dreizahl und ihrer Vielfachen, und dem Bestreben, das Schema dem Auge gefällig zu gestalten.

2. Zu Demokrit.

PLUTARCH[5]) berichtet über eine Untersuchung DEMOKRIT's, welche manchmal als die erste Spur einer Beschäftigung griechischer Mathematiker mit den Kegelschnittslinien angesehen wird. Es scheint jedoch, dafs dieselbe ihren richtigen Platz in der Geschichte der Infinitesimalgeometrie habe.[6]) Der Gegenstand, um den es sich handelt, ist folgender: PLUTARCH bekämpft die Sätze der Stoiker, speziell des CHRYSIPPUS, welche nach seiner Ansicht gegen die *κοιναὶ ἔννοιαι* verstofsen, und erwähnt dabei gelegentlich Folgendes:

Ἔτι τοίνυν ὅρα τίνα τρόπον ἀπήντησε Δημοκρίτῳ, διαποροῦντι φυσικῶς καὶ ἐπιτυχῶς, εἰ κῶνος τέμνοιτο παρὰ τὴν βάσιν ἐπιπέδῳ, τί χρὴ διανοεῖσθαι τὰς τῶν τμημάτων ἐπιφανείας, ἴσας ἢ ἀνίσους γιγνομένας· ἄνισοι μὲν γὰρ οὖσαι τὸν κῶνον ἀνώμαλον παρέξουσι, πολλὰς ἀποχαράξεις λαμβάνοντα βαθμοειδεῖς καὶ τραχύτητας· ἴσων δ' οὐσῶν, ἴσα τμήματα ἔσται καὶ φανεῖται τὸ τοῦ κυλίνδρου πεπονθὼς ὁ κῶνος, ἐξ ἴσων συγκείμενος καὶ οὐκ ἀνίσων κύκλων, ὅπερ ἐστὶν ἀτοπώτατον. ἐνταῦθα δὴ τὸν Δημόκριτον ἀποφαίνων ἀγνοοῦντα „τὰς μὲν ἐπιφανείας“ φησί „μήτ' ἴσας εἶναι μήτ' ἀνίσους, ἄνισα δὲ τὰ σώματα κ. τ. λ.“

Sieh, auf welche Art er (CHRYSIPPUS) dem DEMOKRIT entgegnete, welcher naturgemäfs und treffend untersuchte: wenn ein Kegel durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten wird, was ist von den Flächen der Abschnitte zu sagen? werden sie gleich oder ungleich? Sind sie nämlich ungleich, so werden sie den Kegel uneben machen dadurch, dafs er viele stufenförmige Einschnitte und Unebenheiten erhält. Sind sie aber gleich, so werden die Abschnitte gleich sein und der Kegel wird mit der charakteristischen Eigenschaft des Cylinders behaftet erscheinen, weil er aus gleichen und nicht aus ungleichen Kreisen besteht, was ganz ungereimt ist. Hier nun sagt er (CHRYSIPPUS), DEMOKRIT als unwissend hinstellend, die Flächen seien weder gleich noch ungleich, ungleich aber seien die Körper, u. s. w.

---

5) *De communibus notitiis* 1079 e. Mor. ed. BERNADAKIS, vol. VI. Lips. 1895, p. 342 f. (Ed. DIDOT p. 1321).

6) CANTOR, l. c., S. 180. — TANNERY, l. c., p. 123. — ALLMANN, *Greek Geometry*,

Man kann nicht umhin, die Einfachheit und Klarheit des Beispieles anzuerkennen, an welchem DEMOKRIT die Schwierigkeiten, die dem Begriffe der Stetigkeit anhaften, darstellt. Zugleich übertrifft es an Exaktheit weit die sogenannten Sophismen ZENO's. Ferner entnehmen wir dem Berichte PLUTARCH's, daſs DEMOKRIT diese Schwierigkeiten nicht löste, ja vermutlich für unlösbar erklärte, da ihn CHRYSIPPUS deswegen als unwissend verspottet[7]. Es gewinnt vielmehr den Anschein, daſs er durch die aufgestellte Alternative die unbegrenzte Teilbarkeit der Raumgröſsen als ungereimt erweisen wollte, um so seine Atomenlehre fester zu begründen. Daſs er sich überhaupt mit dieser Aufgabe beschäftigte, beweist der Titel einer seiner Schriften: *περὶ ἀλόγων γραμμέων καὶ ναστῶν* (über irrationale Linien und das Volle), in welcher es sich wahrscheinlich um die Beseitigung der Schwierigkeiten handelte, die der Lehre von den Atomen (das Volle, ναστόν) vom mathematischen Standpunkte erwuchsen. Denn sowohl die unendlich dünnen Platten, in welche der Kegel zerschnitten wird, als auch die Atome stellen jenes Mittelding zwischen dem *ὄν* und *μὴ ὄν* dar, welches LEIBNIZ Differential genannt hat.

Noch eine weitere Schrift DEMOKRIT's dürfte sich mit einschlägigen Fragen beschäftigt haben, deren Titel: *περὶ διαφορῆς γνώμονος ἢ περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρας* (über das Hin- und Herbewegen des Gnomon oder über die Berührung eines Kreises und einer Kugel) zu besagen scheint, daſs, falls ein Schenkel des Gnomon mit dem Durchmesser einer Kugel zusammenfällt, der andere Schenkel in verschiedenen Lagen stets Radius eines die Kugel berührenden Kreises ist.

Dublin 1889, p. 81. — ZEUTHEN, Gesch. d. Math., Kopenhagen 1896, S. 68f — C. BLASS, *De* PLATONE *mathematico,* Bonnae 1861, p. 8 sq.

7) Bekanntlich griffen auch die späteren griechischen Mathematiker derartige Probleme nicht direkt an, sondern umgingen die Schwierigkeit durch eine indirekte Methode (Exhaustion). Sie vermieden die Annahme einer unendlichen Teilbarkeit und gebrauchten das sogenannte Axiom des ARCHIMEDES: Ist $A < B$, so gibt es stets ein Vielfaches von A, welches gröſser ist als B. ARCHIMEDES bezeugt, daſs schon EUDOXUS sich dieses Axioms zur Berechnung des Volumens der Pyramide und des Kegels bediente. (ARCHIMEDIS op. ed. HEIBERG, Lips. 1880, vol. II, p. 297; vol. I, p. 11.)

DER LOCULUS ARCHIMEDIUS

ODER

DAS SYNTEMACHION DES ARCHIMEDES.

ZUM ERSTEN MAL NACH ZWEI ARABISCHEN MANUSKRIPTEN DER KÖNIGLICHEN BIBLIOTHEK IN BERLIN HERAUSGEGEBEN UND ÜBERSETZT

VON

HEINRICH SUTER

IN ZÜRICH.

Einleitung.

Über den sog. *Loculus Archimedius,* oder das älteste uns erhaltene Zusammensetzspiel, das, wie eine Reihe anderer interessanter oder schwieriger Probleme, dem ARCHIMEDES zugeschrieben wird, hat man bis jetzt nur zwei lateinische Quellen gekannt. HEIBERG führt in seinen *Quaestiones Archimedeae*[1]) die Stellen des *Marius Victorinus* und des *Atilius Fortunatianus* über diesen Gegenstand an; diejenige des Erstern heifst: *„ut ille loculus Archimedius e quattuordecim crustis eburneis nunc quadratis nunc triangulis nunc ex utraque specie varie figuratis velut quibusdam membris artis struendae causa compositus proditur; nam ut in illo praefinito ac determinato crustarum numero multiplici earundem variatarum specie nunc navis nunc gladius nunc arbuscula et si qua alia figurantur etc."* Ganz ähnlich lautet die Stelle des zweiten Autors.

Griechische und arabische Stellen über dieses Archimedische Problem hat man bis jetzt nicht aufgefunden, die Abhandlung selbst aber existiert noch arabisch in zwei Codices der kgl. Bibliothek zu Berlin, bezeichnet mit Mf. 258 und Mq. 559, im Codex 960 der Bodleianischen Bibliothek zu Oxford[2]) und in einem solchen der Bibliothek des India Office zu London.[3]) Die beiden Berliner Codices habe ich in der Biblioth. mathem. Jahrg. 1898, p. 73—78 beschrieben, worauf ich den Leser hiemit verweise; im erstgenannten Codex ist unsere Schrift die 28. (fol. 368^b—370^a), im zweiten Codex die 10. Abhandlung (fol. 224^b—225^b). In den Noten zum arabischen Text bedeutet A das erste, B das zweite Manuskript. Da der Text gar keine Schwierigkeiten bietet, so habe ich auf eine Kollation mit den Mss. zu Oxford und London verzichtet.

---

1) Kopenhagen, 1879, p. 43 f.

2) Der erste Band des *Catal. cod. mss. orient. bibl. Bodl. a Joh. Uri confectus*, Oxon. 1787, enthält keine Notiz über dieses Ms., erst im zweiten Bande, von NICOLL und PUSEY herausgegeben, findet sich dasselbe p. 603 unter den *„Addenda et Corrigenda"* erwähnt, es schliefst sich, 2½ Seiten stark, unmittelbar an die 1. Abhandlung des Codex 960 an, die die Sphära des Autolycus enthält; diese Angaben verdanke ich Herrn Bibliothekar A. COWLEY in Oxford.

3) *A Catalogue of the arabic manuscr. in the library of the India Office, by* O. LOTH, London 1877, p. 298, No. 1043, X.

Dieses älteste Zusammensetzspiel, das wir kennen, trägt im arabischen Text den Titel „die Figur *sitemâschion*", oder (am Schlusse) „*sitemâschion*", woraus bis jetzt nichts gemacht werden konnte; ich zweifle nicht daran, dafs gelesen werden sollte „*sintemâschion*", und dafs damit das griechische Wort „*syntemachion*" gemeint ist[4]); *temachion* heifst „kleines abgehauenes Stück, Schnitzel", also *syntemachion* = Zusammensetzung von Schnitzeln. Allerdings ist *syntemachion* eine eigentümliche Bildung, eine Analogie dazu bietet aber vielleicht das Wort „*synoikia*", d. h. ein Haus, wo viele Familien zur Miete zusammenwohnen, oder auch ein Komplex von aneinander gebauten, oder nahe zusammenstehenden Häusern.

Über das Alter der arabischen Übersetzung wissen wir leider nichts: die Abschrift in Cod. A datiert aus dem Jahre 1651, diejenige in B ist c. 60 Jahre älter, beide sind sehr wahrscheinlich von einem und demselben ältern Manuskripte abgeschrieben.

Übersetzung.

Im Namen Gottes des Barmherzigen und Gnädigen! [oh] mein Herr, verleihe [mir] Erfolg, und mache es [mir] nicht schwer!

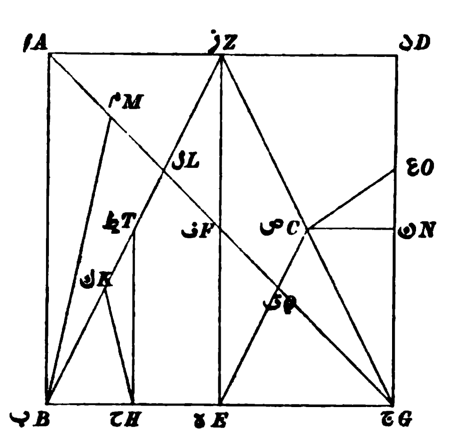
Das Buch des Archimedes über die Teilung der Figur „*sitemâschion*"[5]) in vierzehn zu ihr in (rationalem) Verhältnis stehende Figuren. Wir zeichnen ein Quadrat,[6]) es sei dies $ABGD$, halbieren BG in E, errichten EZ senkrecht auf BG, ziehen die Diagonalen AG, BZ und ZG, halbieren ebenfalls BE in H, und errichten HT senkrecht auf BE; dann legen wir das Lineal an den Punkt H und visieren nach dem Punkt A und ziehen HK, halbieren AL in M und ziehen BM, so ist das Rechteck AE in sieben Teile geteilt. Hierauf halbieren wir GD in N, ebenso ZG in C, ziehen EC, legen das Lineal an die Punkte B und C an und ziehen CO, ziehen noch CN, so ist auch das Rechteck ZG in sieben Teile, aber auf andere Weise als das erste, geteilt, mithin das ganze Quadrat in vierzehn Teile. Wir beweisen nun, dafs jeder der

4) Das griech. χ wird gewöhnlich arab. durch „sch" wiedergegeben, ich erinnere an „Arschimîdes" für „Archimedes".

5) Ahlwardt liest „sitomâschion", der Vokal nach t ist willkürlich, da das Wort im arab. Text nicht vokalisiert ist.

6) Der Text spricht allerdings nur von einem Parallelogramm, in welchem $AD = DB$ sein soll, also von einem Rhombus, allein der Verlauf der Darstellung zeigt, dafs die Figur ein Quadrat sein soll; immerhin gilt die ganze Ableitung für jedes beliebige Parallelogramm.

vierzehn Teile zum ganzen Quadrat in rationalem[7]) Verhältnis stehe. Weil ZG die Diagonale des Rechtecks ZG ist, so ist Dr. DZG die Hälfte dieses Rechtecks, also ein Viertel des Quadrates; aber Dr. GNC ist ein Viertel von Dr. DZG, weil, wenn wir EC verlängern, es in den Punkt D trifft, und dann also Dr. GDC die Hälfte des Dr. DZG und gleich den beiden Dr. GNC und DNC zusammen ist; also ist Dr. $GNC = \frac{1}{16}$ des Quadrates. Wenn wir nun ferner annehmen, die Linie OC sei nach dem Punkte B gerichtet, wie sie in der That auch gezeichnet wurde, so ist die Linie NC parallel zur Seite BG des Quadrates, resp. des Dr. OBG, also hat man die Proportion: $BG : NC = GO : NO$; es ist aber BG das Vierfache von NC, also auch GO das Vierfache von NO, deshalb ist nun GN das Dreifache von NO und das Dr. GNC das Dreifache von ONC; da aber, wie wir gezeigt haben, Dr. $GNC = \frac{1}{16}$ des Quadrates ist, so ist Dr. $ONC = \frac{1}{48}$ des Quadrates. Weil ferner Dr. $GDZ = \frac{1}{4}$ des Quadrates ist und deshalb $GNC = \frac{1}{16}$ desselben und Dr. $NCO = \frac{1}{48}$ desselben, so bleibt für das Viereck $DOCZ = \frac{1}{6}$ der Quadratfläche übrig. Nach der Voraussetzung[8]) geht ferner die Linie NC (verlängert) durch den Punkt F, und es wäre CF parallel zu GE, also hat man die Proportion: $EG : CF = EQ : CQ = GQ : FQ$; weil nun[9]) $EQ = 2\,CQ$ und $GQ = 2\,FQ$, so ist Dr. EQG das Doppelte jedes der beiden Dr. GCQ und EFQ; es ist aber klar, dafs Dr. $EGZ = 2$ Dr. EFG ist, weil $ZE = 2\,FE$ ist; das Dr. EGZ ist aber $= \frac{1}{4}$ des Quadrates, also Dr. $EFG = \frac{1}{8}$ desselben, dieses (Dr. EFG) ist aber das Dreifache jedes der beiden Dr. EFQ und GCQ, also ist jedes dieser beiden Dr. $= \frac{1}{24}$ des Quadrates AG, und das Dr. EGQ ist das doppelte jedes der beiden Dr. EFQ und GCQ, also ist es $= \frac{1}{12}$ des Quadrates. Weil ferner $ZF = EF$ ist, so ist Dr. $ZFG =$ Dr. EFG; wenn wir nun Dr. $GCQ =$ Dr. EFQ wegnehmen, so bleibt Viereck $FQCZ =$ Dr. EGQ, also ist auch Viereck



7) Hier ist das „rational" im Text wirklich ausgedrückt, während es am Anfang und am Schlusse fehlt, weshalb ich das Wort dort eingeklammert habe.

8) Besser wäre „Konstruction".

9) Hierfür sollte stehen: „Weil nun $EG = 2\,CF$, so ist auch EQ etc."

$FQCZ = \frac{1}{12}$ des Quadrates AG. Wir haben nun das Rechteck ZG in sieben Teile geteilt und gehen nun zur Teilung des andern Rechtecks über. Weil BZ und EC zwei parallele Diagonalen sind, und $ZF = EF$ ist, so ist Dr. $ZLF = EFQ$, mithin Dr. $ZLF = \frac{1}{24}$ des Quadrates AG. Weil $BH = HE$ ist, so ist Dr. BEZ das Vierfache des Dr. BHT, denn jedes derselben ist rechtwinklig[10]); da aber Dr. $BEZ = \frac{1}{4}$ des Quadrates $ABGD$ ist, so ist Dr. $BHT = \frac{1}{16}$ desselben. Nach unserer Voraussetzung (Konstruktion) geht ferner die Linie HK (verlängert) durch den Punkt A, also hat man die Proportion: $AB : HT = BK : KT$; es ist aber $AB = 2HT$, also auch $BK = 2KT$, mithin $BT = 3KT$, also ist Dr. BHT das Dreifache des Dr. KHT; weil aber Dr. $BHT = \frac{1}{16}$ des ganzen Quadrates ist, so ist Dr. $KHT = \frac{1}{48}$ desselben. Ferner ist Dr. BKH das Doppelte des Dr. KHT, also $= \frac{1}{24}$ des Quadrates. Da weiter $BL = 2ZL$[11]) und $AL = 2LF$[11]) ist, so ist Dr. ABL das Doppelte des Dr. ALZ und Dr. ALZ das Doppelte des Dr. ZLF; weil aber Dr. ZLF $(= EFQ) = \frac{1}{24}$ des ganzen Quadrates ist, so ist Dr. $ALZ = \frac{1}{12}$ desselben, also Dr. $ABL = \frac{1}{6}$; es ist aber Dr. $ABM =$ Dr. BML, also jedes dieser beiden Dr. $= \frac{1}{12}$ des Quadrates. Es bleibt noch übrig das Fünfeck $LFEHT =$ der Hälfte eines Sechstels mehr der Hälfte eines Achtels des ganzen Quadrates (also $= \frac{7}{48}$ desselben). Wir haben also auch das Rechteck[12]) AE in sieben Teile geteilt, mithin ist die ganze Figur $ABGD$ in vierzehn Teile geteilt, welche zu ihr in (rationalem) Verhältnis stehen, und das ist, was wir (beweisen) wollten. — Beendigt wurde das Buch[13]) des Archimedes über die Figur *sîṭemâschion* am Montag den 6. Rabîʿ I. 1061 (März 1651).

Arabischer Text.

بسم الله الرحمن الرحيم رب يسر ولا تعسر

كتاب ارشميدس فى قسمة شكل سماه بسطماشيون باربعة عشر شكلا مناسبة له نخط شكلا ذا[14]) اربعة اضلاع متوازية عليه (sic) ابجد ويكون اد مثل اب ونقطع خط بج بنصفين على نقطة ه ونقيم على خط بج

10) Diese Begründung ist unvollständig.
11) Fehlt die Begründung durch eine Proportion wie vorher.
12) A und B haben „Quadrat".
13) D. h. die Abschrift desselben.
14) A ر.

خط هز على زوايا[15] قايمة ونخرج اقطار اج بز زج ونقطع به بنصفين على
نقطة ح ونخرج حط على زوايا[16] قايمة ونضع مسطرة على نقطة ح ونحاذى(?)
بها نقطة ا ثم نرسم خط حك ونقطع ال بنصفين على نقطة م ونصل بم
فيكون قد قسمنا اه المتوازى الاضلاع بسبعة اشكال ثم نقطع جد بنصفين
على ن وخط زج بنصفين على نقطة ص ونصل هص ونضع[17] مسطرة على
نقطتى[18] ب ص ونرسم صع ونصل صن فيكون ايضا قد قسمنا جز المتوازى
الاضلاع بسبعة اشكال اخر ويكون جميع[19] المنوازى الاضلاع الذى عليه[20]
اج مقسوما باربعة عشر قسما ونبين ان لكل[21] شكل من هذه الاربعة عشر
شكلا نسبة ينطق بها الى جميع الشكل المتوازى الاضلاع فلان قطر زج[22]
المتوازى الاضلاع هو زج يكون مثلث دزج نصف جميعه ولذلد يكون
ربع المتوازى الاضلاع الاعظم ولكن مثلث جنص هو ربع مثلث دزج لانا
ان اخرجنا هص على استقامته وقع على نقطة د فيكون مثلث جدص نصف
مثلث جدز ومثل مثلثى جنص دنص[23] فمثلث جنص جزء من ستة
عشر جزءا من الشكل المتوازى الاضلاع الاعظم وايضا ان نحن توهمنا خط
صع ممتدا الى نقطة ب لانه كذلك وضع يكون خط نص قد اخرج موازيا
لاحد اضلاع مثلث بجع وهو ضلع بج فيكون نسبة بج الى نص كنسبة
جع الى نع ولكن خط بج اربعة امثال خط نص فخط جع اربعة امثال
خط نع ويكون لذلك خط جن ثلثة امثال خط نع ومثلث جنص ثلثة
امثال مثلث صنع ولكن مثلث جنص قد تبين انه جزء من ستة عشر
جزءا من ابجد المتوازى الاضلاع فيكون لذلك مثلث نصع جزءا من
ثمانية واربعين من المتوازى الاضلاع الذى عليه ابجد ولان مثلث جدز
ربع جميع المتوازى الاضلاع ومن ذلك جنص جزء من ستة عشر منه
ومثلث نصع جزء من ثمانية واربعين منه فبقى[24] زصعد دو[25] اربعة

15) A زاويا. 16) B زاوية. 17) A نقطع. 18) A نقصى. 19) Hier ist in A und B wahrscheinlich الشكل ausgefallen. 20) Fehlt in B. 21) A und B كل. 22) B اج. 23) A und B جدص 24) A und B وبقى. 25) A و.

LES «EXCERPTA EX M.SS. R. DES-CARTES».

PAR

PAUL TANNERY
A PANTIN,
DIRECTEUR DE LA MANUFACTURE DES TABACS.

1. Les fragments mathématiques, imprimés pour la première fois, sous le titre ci-avant, à la fin du volume R. DESCARTES *Opuscula posthuma, physica et mathematica* (Amstelodami, Ex Typographia P. et J. BLAEU. Prostant apud JANSSONIO-WAESBERGIOS, BOOM, et GOETHALS. M.DCCI), n'ont guère, malgré le nom de leur auteur, attiré jusqu'à présent l'attention des mathématiciens ni de leurs historiens. Cette indifférence s'explique par la difficulté qu'il y a en réalité à se débrouiller au milieu d'un texte, d'une part, composé de notes qui n'avaient jamais été destinées à l'impression, et, de l'autre, passablement défectueux, tant par les fautes typographiques dont il fourmille, que par celles qu'on doit imputer au copiste qui a transcrit l'autographe [1]).

Amené à étudier ces fragments pour en donner une nouvelle édition dans les *Œuvres de* DESCARTES actuellement en cours de publication, j'estime qu'ils peuvent donner matière à une analyse offrant quelque intérêt. Sans apporter, bien entendu, des révélations inespérées, cette étude peut fournir des détails historiques curieux, et jeter un peu de lumière sur les dessous ignorés de la mathématique de DESCARTES.

2. Avant tout, il importe de préciser autant que possible, le véritable caractère de ces fragments.

Les premiers éditeurs, dans leur *Praefatio*, ne donnent aucun renseignement sur la façon dont ces *Excerpta* auraient été tirés des Manuscrits de DESCARTES. Ils émettent, sans insister, l'idée que l'on pourrait y voir soit une partie, soit un échantillon d'un ouvrage plus ou moins considérable, comme l'*Algèbre* ou comme l'*Introduction à la Géométrie* mentionnées par BAILLET (dans sa *Vie de Monsieur* DESCARTES). Ils ajoutent enfin, ce dont on ne pourrait guère se douter, que les premières pages ont été corrigées *à Viro quodam harum rerum peritissimo,* lequel y aurait même ajouté deux figures.

Il faut écarter absolument l'hypothèse émise. A la vérité, il y a eu

1) Il y a notamment, sans compter diverses omissions, d'assez fréquentes transpositions, provenant sans doute de l'intercalation, à une mauvaise place, d'additions marginales.

une *Algèbre* de DESCARTES. Il en parle ainsi dans sa Correspondance (lettre à MERSENNE, écrite vers le 25 janvier 1638; éd. CLERSELIER, t. II, p. 370—371): «Je ne ferois nulle difficulté de luy envoyer (à Mydorge) ma vieille Algebre, sinon que c'est un écrit qui ne me semble pas mériter d'estre vû; et pource qu'il n'y a personne que ie sçache qui en ait de copie, ie seray bien aise *qu'il ne sorte plus* d'entre mes mains.» D'après l'*Inventaire des papiers de* DESCARTES, *fait à Stockholm, le 14 février 1650*[2]), on retrouva à la mort du philosophe, dans ses coffres, un petit registre in-8, qui fut coté D et «où il sembloit avoir écrit pour son usage une introduction contenant les fondements de son algebre, en 155 pages». C'était un travail dont il avait donné jadis une copie à ISAAC BEECMAN[3]), de même qu'il lui avait offert son traité *de Musica*; ce devait être avant 1620, c'est à dire avant l'époque où DESCARTES conçut le plan de sa méthode et commença à l'appliquer aux mathématiques. La découverte de ce manuscrit perdu n'aurait probablement qu'un médiocre intérêt pour l'histoire des idées de l'auteur de la *Géométrie*[4]).

Quant à l'*Introduction*, envoyée par DESCARTES à MERSENNE, partie le 27 mai, partie le 13 juillet 1638, c'était l'œuvre d'un «gentilhomme de très-bon lieu» (GODEFROY DE HAESTRECHT?); on en a retrouvé une copie dans les papiers de LEIBNIZ, et elle a été publiée par M. HENRI ADAM, dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques* en 1896, sous le titre: *Calcul de Mons.* DESCARTES. Celui-ci a affirmé à diverses reprises n'avoir pas pris part à la rédaction et ne l'avoir pas corrigée; mais il a dû fournir les exemples, notamment le *lieu plan de* FERMAT et le problème de la Sphère tangente à quatre sphères données. Peut-être l'exemplaire manuscrit (en six cahiers) retrouvé dans les papiers de DESCARTES (cote P) donnait-il une suite qu'il serait plus intéressant de retrouver que «la vieille Algèbre».

Mais l'*Inventaire* précité mentionne, sous la cote B, un registre relié «dans lequel il y a peu de choses escriptes et en divers endroits. Au premier feuillet deux pages sont escriptes sous ce titre *De numeris irrationalibus.* Le premier feuillet porte en teste: *Ex quantitate linearum quæ in dato cirçulo inscriptæ sunt, quantitatem circumferentiæ cui datæ lineæ subtenduntur cognoscere.* Suivent onze feuillets contenant diverses propositions et demonstrations.» L'*Inventaire* continue l'analyse détaillée du

2) Publié par M. CH. ADAM dans la *Revue internationale de l'Enseignement*, du 15 Novembre 1894.

3) Lettre à BEECMAN du 17 Octobre 1630 (CLERS. II, p. 60).

4) Il semble clair que MYDORGE connaissait l'existence de cette *Algèbre* pour l'avoir vue entre les mains de DESCARTES avant 1629.

manuscrit qui contenait des matières de toutes sortes, et notamment un début d'ouvrage, *Thaumantis Regia,* ébauché avant 1629.

Or les *Excerpta* débutent précisément par le titre ci-dessus *Ex quantitate linearum etc.*[5]), et les 17 pages petit in-4⁰, qu'ils occupent dans l'édition de 1701, semblent bien correspondu au plus aux 13 feuillets mathématiques formant le début du registre B. Il est donc probable que le copiste de la pièce envoyée aux Blaeu n'a nullement dépouillé les divers manuscrits de Descartes pour y choisir ce qu'il y avait de plus intéressant au point de vue mathématique[6]). Il a eu entre les mains le registre B, il a copié le commencement, s'est arrêté au premier fragment non mathématique, et n'a même pas cherché plus loin pour grossir les prétendus *Excerpta*, car on n'y retrouve point ce qu'indique encore l'inventaire pour le même registre «Deux feuillets . . sur le problème de trouver un nombre dont les parties aliquotes sont doubles. — Une page *de parabolis compositis* — Trois *de partibus aliquotis numerorum.* — Trois de questions de nombres.»

3. Ce point éclairci, il faudrait déterminer la date approximative des fragments très différents qui composent les *Excerpta.* A cet égard, il faut mettre à part le premier et le dernier qui doivent être antérieurs aux intermédiaires, et sont d'ailleurs les plus considérables; l'un traite du calcul des lignes trigonométriques, l'autre, relatif aux *ovales* dites de Descartes, est évidemment antérieur à la *Géométrie;* j'estime même qu'il remonte avant 1629, et à l'époque où Descartes, déjà en possession de la loi de la réfraction, étudiait mathématiquement la question de la forme des lunettes avant de passer à l'application. Quant au premier fragment, il me semble aussi avoir été provoqué par cette même question de la réfraction, pour le calcul des sinus. Descartes aura commencé à développer ses idées à deux pages différentes de son registre; plus tard il aura rempli l'intervalle par des notes auxquelles on peut assigner une date postérieure, et dont la dernière est même des derniers temps de sa vie.

Voici en effet la série de ces notes:

a. Enoncé du théorème de Fermat sur la possibilité de décomposer tout nombre en n polygones de n côtés[7]). Cette proposition, envoyée à Mersenne Sainte-Croix vers Septembre 1636 (*Œuvres de* Fermat,

---

5) Avec cette seule différence qu'on lit *arcûs* au lieu de *circumferentiae.* C'est là probablement une des corrections du *Vir peritissimus.*

6) Ainsi il n'a rien tiré des 16 feuillets (cote M) des *Progymnasta de Solidorum elementis* publiés pour Foucher de Careil en 1860. Voir les *Vorlesungen* de Cantor, II, p. 625—626.

7) Cf. Cantor, *Vorlesungen,* II, p. 707.

II, p. 65), fut communiquée à DESCARTES, sans nom d'auteur et de la part de SAINTE-CROIX, en juillet 1638. Elle frappa singulièrement le philosophe, qui avoua à MERSENNE en juger la démonstration trop difficile pour oser entreprendre de la chercher. Son inscription sur le registre B remonte probablement à cette date.

b. Démonstration algébrique de la proposition connue des anciens, que si t est un triangle, $8t + 1$ est un carré. Cette note a dû être inscrite en même temps que la précédente, comme résultat des premières réflexions de DESCARTES sur la question, avant qu'il l'eût abandonnée. Remarquons qu'il avait dû étudier plus ou moins, dans sa jeunesse, DIOPHANTE d'après la traduction de XYLANDER; mais il ne connaît pas celle de BACHET, et depuis 1620, il ne s'est pas occupé des questions numériques Elles sont presque neuves pour lui.

c. Règles pour calculer la somme des parties aliquotes d'un nombre d'après sa composition. — Le 9 janvier 1639, DESCARTES écrit à FRENICLE qu'il n'y avait pas un an qu'il ignorait ce qu'étaient les parties aliquotes. De fait, la première lettre où il montre qu'il les connaît, est celle du 31 Mars 1638, à MERSENNE, où, pour son début, il retrouve la règle de THABIT-BEN-CORRAH pour la formation des nombres amiables (CLERS. III, p. 408). Mais, comme nous l'avons indiqué plus haut, DESCARTES avait consigné dans son registre B, à d'autres places, des recherches sur les parties aliquotes qui ne figurent pas dans les *Excerpta*. La présente note, résumant les fondements essentiels de ces recherches, peut donc être postérieure aux précédentes, mais elle doit être de la même année.

d. Solution d'une question élémentaire d'analyse indéterminée. Trouver un cube dont la somme avec un carré fasse un carré. DESCARTES [illegible] deux solutions numériques:

$$24^3 + 10^2 = 118^2. \quad 3^3 + 3^2 = 6^2,$$

et ajoute:

«N. B. Inveni solutionem facillimam $x^3 + xx \propto aaxx$; ergo $x + 1$ [illegible] et $x \propto aa - 1$. Hinc infiniti inveniuntur.»

La solution générale aurait pu être donnée d'après DIOPHANTE [illegible] qu'on peut prendre arbitrairement le cube, qu'il suffit de décomposer [illegible] deux facteurs de même parité. Ces facteurs sont la somme et la différence des racines des carrés cherchés.

Aucune indication n'existe dans la correspondence de DESCARTES [illegible] un problème de ce genre.

e. Note sur l'extraction de la racine cubique de $a + \sqrt{}$ [illegible] dater de l'époque de l'affaire STAMPIOËN-WAESSENAER, c'est à dire [illegible] de 1639. (Cf. CANTOR, *Vorlesungen*, II, p. 727.)

f. Construction pour la quadrature du cercle (voir Cantor, *Vorlesungen*, II, p. 778), remarquable en ce qu'elle donne le principe de la méthode dite des isopérimètres pour le calcul du rapport de la circonférence au diamètre; et en ce que, d'un autre côté, c'est, je crois, le seul exemple connu pour proposer d'atteindre une longueur limite par des constructions graphiques qui permettent, en théorie, de pousser l'approximation indéfiniment. — Cette note, qui se relie à la matière du premier fragment, en est peut-être contemporaine; rien n'indique en effet, qu'en 1639 ou 1640, Descartes se soit occupé de questions de ce genre, sauf quelques railleries à l'adresse de Longomontanus.

g. Tangentes de la cycloïde et de la quadratrice. — Cette note est tout simplement une *copie* de passages de l'écrit de Fermat: *Doctrinam tangentium etc.* (*Œuvres de* F., I, p. 158—167), que Descartes reçut de Mersenne en Octobre 1640. Les extraits sont textuels; cependant Descartes a introduit ses notations et supprimé des calculs intermédiaires. Il a de plus indiqué les constructions sur les figures; celle de la quadratrice semble indiquer que la rectification de l'arc de cercle se ferait au moyen de la cycloïde. Il est remarquable que Descartes n'a pas reconnu l'erreur que contient, pour la tangente à la quadratrice, le texte qui lui a été envoyé et qui est conforme à une surcharge sur l'autographe de Fermat. (Cf. *Œuvres de* F., I, p. 165, note.)

h. Calcul des résultantes de l'élimination des irrationelles pour les équations

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{d}, \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{d}+\sqrt{e}.$$

Provoqué par un billet de Fermat de 1648 (*Œuvres de* F., II, p. 282). Cf. Clers. III, 472 et p. 498.

4. Par rapport à toutes ces notes, et même par rapport au dernier fragment, la grande antériorité du premier résulte de ce fait qu'on n'y trouve pas encore les notations caractéristiques de Descartes. Ce fragment débute par un tableau des valeurs irrationelles des cordes des arcs dérivant des côtés du carré, du triangle équilateral, du décagone et du pentédécagone régulier. Descartes insiste sur les lois de formation de ces irrationelles. Il s'étend ensuite longuement sur la relation entre les côtés d'un triangle, et l'angle opposé à l'un d'eux (comme si elle n'eut pas été connue). Il la met sous une forme qui correspondrait à celle-ci:

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \text{ Corde } (\pi - 2A).$$

Il propose de définir la valeur de l'angle par le rapport $\frac{bc}{b^2+c^2-a^2}$, pris en valeur absolue, en ajoutant d'ailleurs $+0$ (comme indice de l'angle droit), si $b^2+c^2<a^2$, et si par conséquent l'angle est obtus. Cette curieuse no-

tation montre qu'il était encore loin de la conception des quantités négatives.

Le texte de tout ce fragment, comme aussi celui du dernier, est d'un latin assez incorrect, qui contraste avec le style châtié des lettres et des ouvrages de DESCARTES dans cette langue. Ce ne sont donc pas là des rédactions définitives, mais de ces premières ébauches que l'on fait pour mettre ses idées en ordre avant de les avoir arrêtées. Ce caractère est encore beaucoup plus accusé, par le désordre de la composition, dans le dernier fragment, celui des ovales, auquel nous allons enfin arriver. Quant aux notes intermédiaires, elles ont, bien plus nettement, le caractère de memento pour des résultats définitivement acquis.

5. On sait que dans sa *Géométrie,* DESCARTES indique, pour quatre courbes, dont la première et la quatrième sont réellement ovales, dont la seconde et la troisième sont plutôt cordiformes, des constructions qui peuvent immédiatement se traduire, en coordonées bipolaires u, v, par les équations suivantes où l'on suppose $k < 1$:

$$\left.\begin{array}{ll} 1^0 & u + kv = a + kb \\ 2^0 & u - kv = a - kb \end{array}\right\} \text{Distance des foyers: } a + b$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3^0 & u - kv = a - kb \\ 4^0 & u + kv = a + kb \end{array}\right\} \text{Distance des foyers: } a - b.$$

Il a appliqué à la première de ces courbes sa méthode des tangentes (sans d'ailleurs jamais former l'équation du 4e degré en coordonnées rectilignes), et il en a déduit les propriétés optiques de corps de révolution ayant ces ovales pour méridienne et qui seraient formés de verre.

Dans cette façon de poser le problème au point de vue pratique, DESCARTES apportait certaines restrictions à la conception générale des lignes *aplanétiques,* que l'on peut définir par l'équation linéaire quelconque entre coordonnées bipolaires. Ces restrictions n'apparaissent nullement dans les *Excerpta:* il essaie de fait toutes les combinaisons possibles et les classe méthodiquement. Malheureusement les développements qu'il donne à cet égard sont trés succincts et semblent même tronqués.

Dans son célèbre *Aperçu historique* (2^0 éd., p. 162), MICHEL CHASLES, après avoir fait observer que l'équation du quatrième degré en coordonnées rectilignes correspond à l'ensemble de deux *ovales conjuguées*, ajoute que cette remarque eût dû, ce semble, être faite dans la *Géométrie* de DESCARTES. C'est méconnaître les habitudes du temps; l'on chercherait d'ailleurs vainement, dans la *Géométrie*, la remarque, encore plus essentielle, que la même équation du second degré représente les deux branches dont, à l'exemple des anciens, DESCARTES nommait toujours l'une et l'autre hyper-

bole. Mais, à vrai dire, avec sa façon de traiter le problème en coordonnées bipolaires, en considérant toujours les rayons vecteurs comme positifs et en se donnant chaque fois deux foyers et un sommet, DESCARTES n'était nullement sur la voie pouvant conduire à reconnaitre le rapport entre deux ovales conjuguées.

Il n'a pas, d'autre part, considéré les cas limites, comme par exemple celui où, l'un des foyers coïncidant avec le sommet, les deux ovales conjuguées se rejoignent en ce point et forment un *limaçon de* PASCAL (CHASLES, *ib.*). La singulière expression des *Excerpta* (p. 16): «In quinto capite, linea est *spiralis,* et primo quidem versus A curvatur, deinde versus B ... imo clauditur»[8]), s'applique à la forme en cœur, dans laquelle, au reste, la tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe focal.

Mais en revanche, et ce point est important à constater, DESCARTES avait reconnu l'existence du troisième foyer, que CHASLES a cru être le premier à découvrir[9]). Il est même aisé de constater que DESCARTES a dissimulé volontairement cette existence; car, au fond, sa première et sa quatrième ovale sont une même courbe, rapportée l'une à un foyer intérieur et au foyer extérieur, l'autre aux deux foyers intérieurs; de même pour la seconde et la troisième ovale.

A la vérité, les *Excerpta* ne donnent pas, sur cette question, des résultats définitifs. On y trouve d'abord un exemple numérique, dans lequel le foyer extérieur et un foyer intérieur sont à la même distance du sommet pris pour origine; puis le même cas est traité algébriquement. Le cas général est ensuite abordé par une exposition algébrique synthétique, mais les formules sont erronées et le calcul interrompu sans aboutir. Cependant un peu plus loin, p. 17, DESCARTES dit: *redeundum ad alteram* (*curvam*) *jam inventam, quae tres habet focos.*

Ce qui doit d'ailleurs faire admettre que DESCARTES a dû tirer la chose au clair, c'est que, p. 13, il cherche, au moyen de coëfficients indéterminés, s'il n'y a pas deux autres foyers que ceux qui ont été pris à l'origine. Il a même cru aboutir, mais le calcul est encore interrompu sans conclusion[10]).

6. Ce que je viens de dire montre que ce fragment des ovales est une suite d'essais de premier jet, avec leurs erreurs et leurs maladresses ordi-

---

8) A et B sont les deux foyers, entre lesquels, pour le cas considéré, se trouve le sommet.

9) *Aperçu historique,* 2e éd. p. 352.

10) Peut être DESCARTES a-t-il été amené à cette recherche par le cas du cercle ($mu + nv = 0$), où le nombre des couples de foyers est indéfini.

naires, et sans que les résultats définitifs aient été notés. Le début est un autre exemple analogue; mais il est intéressant à étudier, d'autant qu'avec la recherche illusoire des quatre foyers, c'est le seul endroit où les *Excerpta* procèdent réellement par analyse. Partout ailleurs, l'exposition est synthétique.

Dans ce début, DESCARTES égale arbitrairement à $2(a - y)$ la somme des deux rayons vecteurs; la distance des foyers est $2b$; a est l'intervalle entre leur milieu et le sommet, à partir duquel se compte, sur l'axe, l'abscisse x du point courant. DESCARTES exprime les lignes de la figure en x et y et commence à chercher la tangente par sa méthode; puis il s'interrompt brusquement.

J'ai dit que le procédé était analytique; il est clair en effet que la courbe ne serait déterminée que par une équation entre x et y. Si DESCARTES avait eu une méthode inverse de celle de ses tangentes, il fût parvenu à exprimer la condition que la normale divisât l'axe dans un rapport voulu. Mais avec les seules ressources dont il disposait, il ne pouvait certainement pas plus aboutir que si, en coordonnées ordinaires x et y, il eût cherché la tangente sans se donner l'équation.

Dans la suite, il posera d'emblée, par exemple, $a - y$, et $b + ey$. pour ses deux rayons vecteurs; mais alors y est une variable qui suffit seule à déterminer un point de la courbe; DESCARTES peut donc la lier à l'abscisse x par une relation déterminée, appliquer sa méthode, et montrer que la condition proposée est satisfaite.

Mais comment est-il arrivé précisément à donner à ses rayons vecteurs les expressions ci-dessus? Est-ce l'effet d'un heureux hasard? a-t-il été guidé par quelque remarque dans l'essai précédent?

On ne peut ici former que des conjectures; elles peuvent être cependant appuyées sur des faits, que je vais exposer après avoir dit tout d'abord ce que j'imagine.

Je croirais volontiers que DESCARTES, bien avant de constituer sa méthode analytique des tangentes, avait directement résolu le problème qu'il s'était posé, de trouver les lignes courbes ramenant par réfraction à un foyer le faisceau de rayons issus d'un autre foyer. Ce qu'il consigne sur son registre B, ce sont les essais d'une exposition analytique pour une solution qu'il a obtenue tout autrement.

La position même du problème l'a naturellement conduit au système des coordonnées bipolaires, qu'on lui doit beaucoup plus incontestablement que celui des coordonnées dites cartésiennes; il a reconnu tout aussitôt que l'ellipse et l'hyperbole devaient être des variétés des courbes qu'il cherchait,

puisque ces coniques donnent une solution pour la réflexion à angles égaux et pour la réfraction, en supposant à l'infini un des foyers lumineux.

La simplicité de la construction de la tangente des coniques rapportées à des coordonnées bipolaires le conduisait à chercher une généralisation de cette construction: il fallait faire intervenir le rapport des vitesses de variation des rayons vecteurs. Lorsque ce rapport est constant, la question est relativement aisée à résoudre par l'intuition géométrique; mais Descartes a pu, tout aussi bien, reconnaître de la même façon, pour la condition à laquelle devait satisfaire la normale à la courbe qu'il cherchait, la nécessité de la constance du dit rapport.

C'est admettre implicitement qu'il avait constitué des procédés géométriques (sinon une méthode) pour déterminer les tangentes aux courbes tracées par des mouvements combinés. Au lieu de dire les *tangentes*, je devrais plutôt dire les *normales*, car toutes les indications que nous allons trouver à ce sujet nous font supposer des considérations beaucoup plus analogues à la théorie des centres instantanés de rotation qu'à celle de la méthode dite de Roberval. Or ce fait, que Descartes s'attache en principe à déterminer directement, non pas la tangente, mais la normale, semble précisément indiquer que l'origine de ses recherches a porté sur la normale, parce que c'était elle qu'il avait à considérer dans les réfractions.

J'ai à peine besoin de faire remarquer que sa méthode analytique aurait été très simplifiée si, au lieu de couper par un cercle à éléments arbitraires la courbe à laquelle il est proposé de mener une tangente, il l'eût coupée par une droite passant par les mêmes points d'intersection, c'est-à dire s'il eût cherché directement, par son analyse, la tangente et non la normale. Mais ce qu'il importe d'établir, c'est qu'il possédait d'autres procédés que cette méthode analytique.

Tout d'abord, il l'affirme expressément dans une lettre à Mersenne, le 11 juin 1640 (Clers., II, p. 228): »d'où ils deuoient connoistre que i'auois d'autres moyens pour y paruenir (à la tangente de la conchoïde), mais que ie n'auois pas voulu leur dire tout, ny m'expliquer plus clairement pour la tangente, comme ils auroient aisement reconnu de mon stile, s'ils auoient eu de l'esprit.«

Il est en effet bien aisé à voir que la construction de la tangente à la conchoïde (dans la *Géométrie*) repose beaucoup plutôt sur une considération analogue à celle du centre instantané de rotation que sur une formule déduite des calculs de la méthode analytique; il est également bien invraisemblable que Descartes ait pu donner, poste pour poste, son élégante construction de la tangente à la cycloïde, s'il n'avait pas été dès

longtemps en possession de considérations de ce genre (voir sa remarquable lettre à MERSENNE du 23 août 1638, CLERS., III, p. 350)[11]).

Mais, dans les idées du temps, ces considérations étaient d'autant moins admises en Géométrie que les notions essentielles sur lesquelles elles reposent n'étaient nullement dégagées. C'est ainsi que ROBERVAL ne regardait point comme géométrique sa propre méthode, et qu'il eut, à son grand détriment, si longtemps scrupule à la faire connaître. De même DESCARTES ne crut pas son but atteint dans »le seul problème qu'il ait désiré savoir en Géométrie», tant qu'il n'aurait point constitué une méthode analytique générale. De même encore, il garda le secret de ses procédés, sauf quelques indications trop insuffisantes pour permettre une restitution de l'ensemble.

Quant à la notion de vitesses de deux mouvements servant à décrire une courbe, elle apparait enpressément dans la lettre à FLORIMOND DE BEAUNE du 20 février 1639 (CLERS., III, p. 411). Dans cette lettre, DESCARTES ne recule nullement devant le problème inverse des tangentes, et la relation qu'il établit entre les vitesses en question traduit directement l'équation différentielle de la courbe proposée. Dans le cas particulier, cette relation est empruntée à la définition des logarithmes de NAPIER[12]); mais il n'est nullement croyable qu'à cette occasion, DESCARTES ait appliqué des principes avec lesquels il n'aurait pas été familier depuis longtemps.

En résumé, il possédait, probablement d'assez bonne heure et avant l'invention de la méthode analytique des tangentes, tous les éléments nécessaires pour la formation d'une méthode géométrique fondée sur la considération du mouvement. L'importance qu'il attache d'ailleurs, dans sa *Géométrie*, au tracé des courbes par des mouvements continus, me semble indiquer qu'il avait cherché dans cette voie l'extension de cette méthode aux divers cas imaginables. Mais il n'a probablement laissé aucune note à ce sujet, et il serait illusoire d'espérer des révélations inattendues, même si l'on retrouvait les papiers inventoriés à Stockholm.

Je n'ajouterai à ces observations qu'une dernière remarque au sujet du calcul des sous-normales dans les *Excerpta*. Les développements sont si succincts qu'on est tenté de croire que DESCARTES possédait, pour

---

11) C'est cette lettre qui a posé la principe essentiel, que les normales aux trajectoires des divers points d'une figure se coupent en un même point, pour chaque déplacement élémentaire.

12) Quoique DESCARTES ne prononce pas le mot de logarithme, l'emprunt est évident; pour expliquer son silence, il suffit de remarquer qu'à cette époque, les lignes trigonométriques ne valaient encore que comme *nombres tabulaires* et n'étaient pas reçues en *Géométrie* comme fonctions de l'arc.

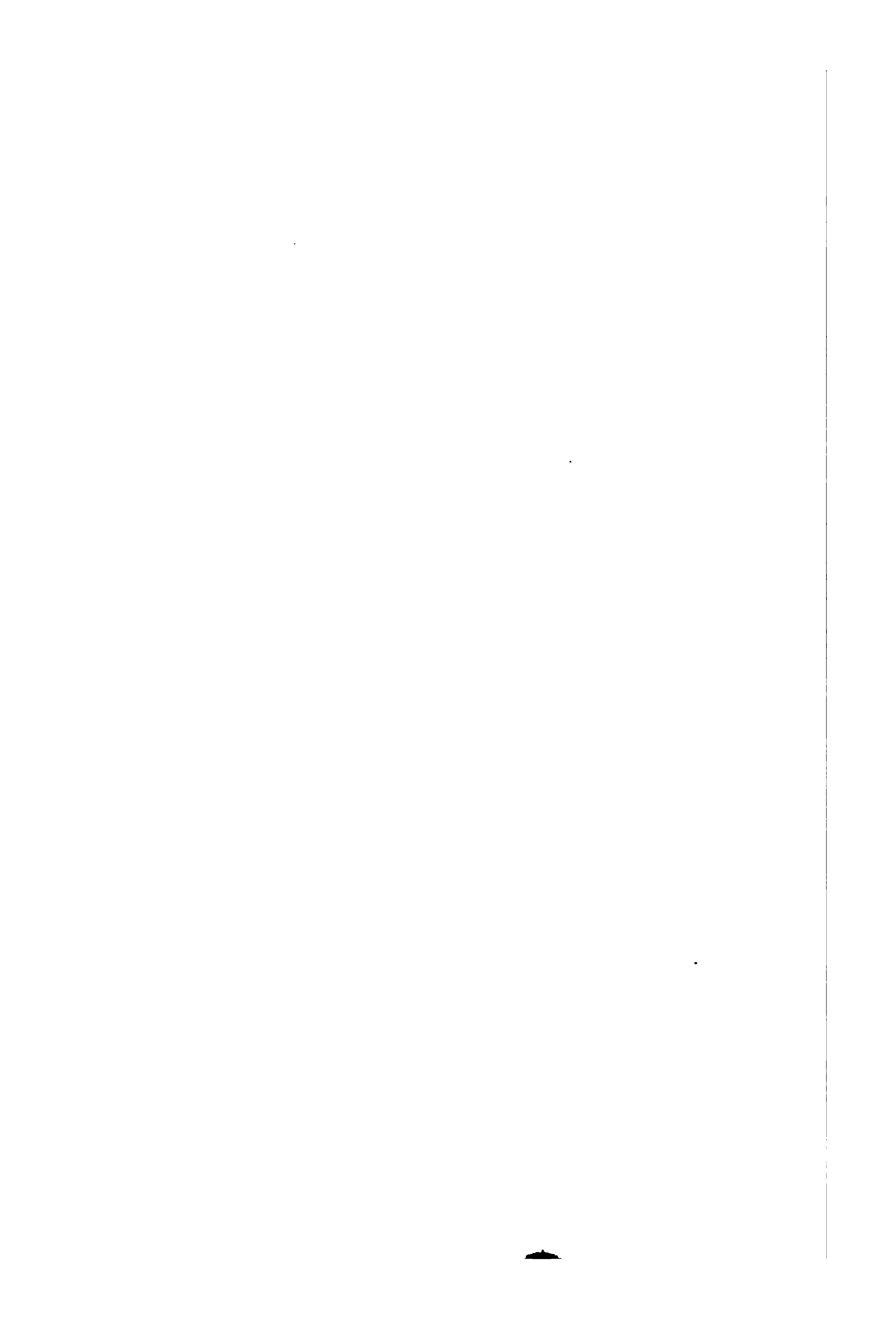
l'application de sa méthode des tangentes, des moyens d'abréviation tout à fait analogues à ceux que nous fournit le calcul des dérivées. En revanche, il semble recommencer chaque fois, pour chaque cas examiné, au lieu de comprendre tous les cas sous une formule générale, où il n'aurait qu'à faire varier les signes + et —. Ceci est d'accord avec les autres exemples qu'on peut donner que Descartes ne s'est nullement attaché à la systématisation rigoureuse de la convention relative à l'emploi des quantités négatives en géométrie. Cette systématisation s'est introduite peu à peu comme la conséquence de son oeuvre, mais les auteurs véritables en sont restés anonymes.

EINIGE ADDITIONSMASCHINEN.

VON

DR. PHIL. **FRIEDRICH AUGUST UNGER**

REALSCHULOBERLEHRER IN LEIPZIG.



Vor mehr als zwei Jahrhunderten hat man angefangen, neben den beiden bis dahin üblichen Rechnungsweisen, mit Rechenpfennigen und mit Ziffern, noch eine dritte Rechnungsmethode zu erfinden, nämlich die, Rechnungsresultate durch eine Maschine zu gewinnen. Das Ziel wurde erreicht. Man stellt die gegebenen Zahlen in eine Maschine ein und bringt durch Kurbeldrehung oder ähnliche mechanische Thätigkeit das Resultat hervor; damit hat man sich von der mühsamen Kopfarbeit erlöst und sie einem Räderwerke übertragen, das vor dem Menschen noch den Vorzug der Unfehlbarkeit besitzt.

Zwei der gröfsten Mathematiker ihres Jahrhunderts, PASCAL und LEIBNIZ, haben sich mit dieser Aufgabe ernstlich beschäftigt, und letztrer hat das Problem der Rechenmaschine in einer Weise gelöst, die noch heute nachgeahmt wird. Seine Maschine, von der noch ein Modell[1]) vorhanden ist, und die bis auf die neueste Zeit[2]) niemals in Gang gebracht werden konnte, hatte keinen theoretischen Fehler, sondern das alleinige Hindernis lag in der mangelhaften Ausführung durch den Mechaniker. Die tiefere Stufe, auf der die Mechanik vor zwei Jahrhunderten noch stand, mufs als Erklärung und Entschuldigung hierfür angesehen werden.

Man kann die Rechenmaschinen in drei Gruppen bringen, nämlich: Multiplikationsmaschinen, Differenzmaschinen und Additionsmaschinen; zur ersten Gruppe dürfen die logarithmischen Apparate gezählt werden.

Anfangs hatte ich die Absicht, einen Überblick über das ganze Ma-

---

1) In der Königl. Bibliothek zu Hannover. Eine Zeit lang war dasselbe Exemplar in Göttingen.

2) Jetzt geht die Maschine. Dem durch Gründung der ersten deutschen Rechenmaschinenfabrik (1878) berühmten Ingenieur A. BURKHARDT in Glashütte ist es gelungen, dieses kostbare mechanische Wunderwerk in Gang zu bringen. Dadurch hat er nicht nur ein glänzendes Zeugnis für seine persönliche Leistungsfähigkeit abgelegt, sondern auch ein neues unverwelkliches Blatt in den Ruhmeskranz der durch Feinmechanik weltbekannten sächsischen Stadt Glashütte eingeflochten.

terial der Rechenmaschinen[3]) zu geben; weil aber die Anzahl derselben sehr grofs und der zugemessene Raum sehr klein ist, so hätten die Notizen darüber sehr kurz gehalten werden müssen; dadurch wäre aber der Nutzen für den Leser äufserst gering geworden. Deshalb beschränke ich mich darauf, hier nur einige Additionsmaschinen[4]) zu beschreiben und zwar einige neuere, eine für einzifferige Zahlen, eine für zweizifferige und vier für grofse Summanden. Drei von den Maschinen sind deutsche, drei aber amerikanische Erzeugnisse.

1. Behers Additionsmaschine.

Diese Maschine ist ein Apparat, der dazu dient, grofse Kolonnen einzifferiger Zahlen zu addieren; 499 ist die gröfste Summe, die erreicht werden kann; es gehören indessen schon viele Summanden dazu, ehe die Summe einer Kolonne so grofs wird.

Will man mit der Maschine arbeiten, so müssen vorher die Summanden gehörig untereinander gesetzt werden. Darnach addiert man mit der Maschine jede Kolonne gesondert. Schliefslich vereinigt man die Kolonnensummen in gewöhnlicher Weise zur Totalsumme.

Wie leicht ersichtlich, tritt eine Zeitersparnis kaum ein; der Nutzen liegt vielmehr in der Schonung des Gehirns.

Die beiden Hauptteile der Maschine sind eine horizontal liegende und um ihren Mittelpunkt drehbare Ziffernscheibe und eine Klaviatur. Die Ziffernscheibe trägt auf der Oberseite an der Peripherie einen Zahlenkranz der ersten 99 Zahlen und Null; alle sind zweistellig geschrieben, also so: 00 01 02 ... 11 12 ... 99. Die zweistellige Schreibweise ist nötig wegen Bildung der Summen (siehe unten). Auf der Unterseite der Scheibe sitzt unter jeder Zahl ein senkrechter Stift. Gedreht wird die Scheibe durch eine Triebfeder, die man durch einen Hemmungsmechanismus wirken lassen und arretieren kann. Links an der Scheibe befindet sich eine Skala mit den 5 Ziffern 0 1 2 3 4, die bei der Bildung der Summe als Hunderter

---

3) Die ganze Sammlung von Rechenmaschinen erscheint binnen kurzem am geeigneten Orte.

4) Ausgeschlossen bleiben die Rechenbretter und Zahlschnüre der Alten, sowie die in den Elementarschulen gebrauchten Zählapparate, die mit Unrecht Maschinen genannt werden. Eine vollständige Zusammenstellung der Apparate von der letzten Art giebt Max Hübner, Verwalter des Städt. Schulmuseums zu Breslau, in dem „Führer durch die Ausstellung in der Turnhalle am Lessingsplatz", herausgegeben anläfslich der „Deutschen Lehrerversammlung in Breslau vom 30. Mai bis zum 2. Juni 1898".

dienen und zwar vor einer der zweistelligen Zahlen der Ziffernscheibe. Zu Anfange der Rechnung stellt man Skala und Scheibe auf Null; nach je einem Umgange der Scheibe wird die Skala durch eine Übertragung von der Scheibe um je eine Ziffer weiter gerückt. Die Ablesungsstelle der Summe ist ein Schlitz in einem Blechstreifen. Der Blechstreifen ist an der linken Seite angebracht und verdeckt Skala und ein Stück der Peripherie der Scheibe. Der Schlitz ist nur so breit, dafs eine Ziffer der Skala und eine (zweistellige) Zahl der Scheibe auf einmal sichtbar werden; zusammen bilden diese die Summe.

Die Klaviatur ist nach Art eines Klaviers konstruiert und besteht aus fünf Untertasten mit den ungeraden Ziffern und vier alternierenden Obertasten mit den geraden Ziffern, also so angeordnet: $1\;{}^{2}\;3\;{}^{4}\;5\;{}^{6}\;7\;{}^{8}\;9$. Die Tasten bilden das eine Ende eines Winkelhebels, an dem andern Ende befindet sich ein Stift, der zwischen die Stifte der Ziffernscheibe eingreift. Drückt man eine Taste nieder, so wird die Hemmung ausgelöst und die Triebfeder treibt die Scheibe vorwärts; ein besondrer Mechanismus bewirkt im Verein mit dem Stifte am hintern Ende des Winkelhebels, dafs sich die Ziffernscheibe um nicht mehr aber auch um nicht weniger Stifte (resp. Zahlen) vorwärts dreht, als die Zahl der niedergedrückten Taste anzeigt. — Das Rechnen mit der Maschine ist demnach dem Klavierspiel ähnlich, die Ziffern sind die Noten.

Die Maschine ist von Oswald Beher, Lehrer in Grofsguhrau Kreis Falkenberg in Oberschlesien, erfunden. 1892 wurde sie patentiert, DRP No. 50885, englisches Patent No. 13538. Die ersten Modelle[5]) machte der Mechaniker Pinzger in Breslau. Am 15. Sept. 1892 übernahm die Firma Frister & Rossmann in Berlin die Ausführung der Maschine. Gegenwärtig ruht ihre Fabrikation.

2. Illgens Rechenscheibe.

Der Apparat ist aus Zink hergestellt. Er besteht aus einer um ihren Mittelpunkt drehbaren Kreisscheibe von ca. 17 cm Durchmesser, die knapp an der Peripherie 100 Löcher (Durchbohrungen) in gleichen Abständen von-

---

5) Ein Modell befindet sich in dem Städt. Schulmuseum zu Breslau Dem Verwalter desselben, Herrn Max Hübner, verdanke ich die Möglichkeit dieses Berichts, da er die grofse Freundlichkeit hatte, mir eine Beschreibung des dortigen Modells anzufertigen, der ich hier gefolgt bin. Ich nehme Veranlassung, ihm auch an dieser Stelle verbindlichst Dank zu sagen, umsomehr, als es trotz mehrfacher andrer Versuche nicht gelang, etwas Weiteres über die Maschine zu erfahren.

einander hat; ein Loch ist mit einem Pfeil versehen, der beim Rechnen die Summe anzeigt. Die Scheibe liegt innerhalb eines unbeweglichen Kreisringes; auf diesem stehen knapp an dem innern Rande in natürlicher Reihenfolge die Zahlen 0 1 2 ... 99 und zwar genau mit den Löchern der Scheibe in radialer Richtung, sodafs jedes Loch vor einer Zahl steht, wie man die Scheibe auch stellen mag. —

Die Scheibe greift auf der Hinterseite in ein Rad mit 50 Zähnen und dreht dieses um je einen Zahn vorwärts, sobald sie selbst einen vollen Umgang gemacht hat. Auf der Vorderseite dieses Rades stehen kreisförmig angeordnet die Zahlen 0 1 2 ... 49, von denen aber nur eine auf einmal (und zwar in fortlaufender Reihenfolge) in einem Schauloche sichtbar ist, während die übrigen verdeckt sind. Diese sichtbare Ziffer zeigt die Hunderter der Summe an; die dazu gehörigen Zehner und Einer liest man auf dem Ringe ab und zwar an der Stelle, wohin der Pfeil der Scheibe zeigt.

Die Handhabung der Maschine geschieht folgendermafsen. Man stellt vor Beginn der Addition die Scheibe so, dafs das Loch mit dem Pfeile auf die Zahl 0 des Ringes weist und dafs das Hunderterrad auch 0 im Schauloche zeigt. Sind beispielsweise die drei Zahlen 46, 32 und 57 zu addieren, so steckt man einen Metallstift in das Loch auf der Scheibe unter der Zahl Null (mit Pfeil versehen) und dreht mit Hilfe dieses Stifts die Scheibe nach rechts, bis das Loch mit dem Pfeile vor der Zahl 46 des Ringes steht. Hierauf zieht man den Stift heraus, läfst die Scheibe in ihrer Stellung und steckt den Stift in das Loch, das jetzt unter der Ringzahl Null steht; nun dreht man die Scheibe nach rechts, bis man mit dem Stifte vor der Zahl 32 steht. Dadurch ist der Pfeil um 32 Löcher resp. Zahlen vorwärts gerückt und zeigt jetzt auf die Ringzahl 78. Hierauf zieht man den Stift heraus und steckt ihn in das Loch, das nun unter der Ringzahl 0 steht und dreht dieses Loch bis vor die Ringzahl 57. Dadurch rückt der Pfeil (der auf 78 stand) um weitere 57 Löcher vorwärts. Er überschreitet dabei den Anfangspunkt Null und rückt bis 35. Beim Überschreiten des Anfangspunktes verschwindet die Null des Hunderterrades im Schauloche und eine 1 wird dafür sichtbar. Der Pfeil zeigt also auf 35, im Schauloche steht 1, d. h. die Summe ist gleich 135.

Auf gleiche Weise wird die Handhabung fortgesetzt, bis die Posten alle sind. Man kann mit dem Apparate zweistellige Zahlen im ganzen addieren. Die gröfste Summe ist 4999. — Haben die Summanden mehr als zwei Stellen, so mufs man sie von rechts nach links in Gruppen von je zwei Ziffern abteilen (wie dies bei der Ziehung der Quadratwurzel geschieht) und jede senkrechte Doppelkolonne für sich addieren, und zuletzt die entstandenen Partialsummen gehörig vereinigen.

Der patentierte Apparat ist 1888 von Paul Illgen, einem früheren Lehrer, erfunden. Der Erfinder lebt jetzt in Eutritzsch bei Leipzig und beschäftigt sich gegenwärtig nur mit der Erledigung rechnerischer Arbeiten. Die Verkaufsstelle für den Apparat ist der „Verlag des Leipziger Stadt- und Dorfanzeigers“, wo er für 6 Mark zu haben ist.

3. Der Comptometer von Felt.

a. Die Einrichtung.

Die Maschine ist gefällig und kompakt, wiegt $8^1/_2$ Pfund und ist $14^1/_2$ Zoll lang, $7^1/_2$ Zoll breit und 5 Zoll hoch.



Sie besteht aus einer Reihe von Zahlenrädern, von denen jedes einen gewissen Stellenwert repräsentiert und die 10 Ziffern 0 1 2 ... 9 trägt, so eingerichtet, dafs immer nur eine Ziffer zu einer bestimmten Zeit auf einem Rade sichtbar wird. Das Sichtbarwerden geschieht auf der Vorderseite in Schaulöchern, deren Gesamtheit das „Register“ genannt wird. Dieses ist der Ort, wo die Resultate erscheinen.

Jedes dieser Zahlenräder wird durch eine Kolonne von Tasten nach Mafsgabe ihrer darauf vermerkten Einheiten in Bewegung gesetzt, wodurch jede arithmetische Aufgabe (genau betrachtet, ists immer nur ein Addieren, wie unten dargethan werden wird) ohne sonderliche geistige Anstrengung gelöst werden kann.

In der kleinsten Sorte von Maschinen befinden sich acht[6]) Kolonnen von Tasten, doch giebt es auch solche mit 10 und solche mit 12 Kolonnen. Die erste Kolonne zur Rechten ist die Einerkolonne, die zweite die Zehnerkolonne etc. Auf jeder Taste stehen 2 Ziffern (deren Betrag zusammen überall neun ausmacht), eine grofs gedruckte und eine klein gedruckte, die grofse ist schwarz, die kleine rot. Beim Addieren und Multiplizieren wer-

6) Neuerdings baut man auch Maschinen mit 7 Kolonnen, statt der achten Kolonne stehen neben den Einertasten drei Buchstaben für die Brüche $^1/_4$, $^1/_2$, $^1/_4$. Die beigegebene Figur zeigt eine solche Maschine.

den die Tasten nach Maſsgabe der groſsen schwarzen Zahlen niedergedrückt, beim Subtrahieren und Dividieren aber die Tasten nach Maſsgabe der kleinen roten Zahlen.

b. Das Rechnen mit der Maschine.

Vor der Addition und Multiplikation ist das „Register" auf 0 zu stellen. Addieren geschieht auf der Maschine durch das Anschlagen derjenigen Tasten, welche die einzelnen Summanden repräsentieren. Jeder Summand wird erst ganz getastet, ehe ein neuer drankommt. Nachdem alle Posten auf der Maschine getastet sind, ist auch (ohne weitere Manipulation) im Register die Gesamtsumme erschienen. —

Das Multiplizieren ist ein wiederholtes Addieren. Soll z. B. 456 mit 32 multipliziert werden, so drückt man die 6-Taste in der Einerkolonne zweimal, die 5-Taste in der Zehnerkolonne zweimal und auch die 4-Taste in der Hundertkolonne zweimal. Hierauf denkt man sich, es sei 4560 mal 3 statt 456 mal 30 zu multiplizieren und tastet 6 in der Zehnerkolonne dreimal, 5 in der Hundertkolonne dreimal und 4 in der Tausendkolonne dreimal. Im Register steht dann das Produkt. — Beim Subtrahieren muſs der Minuend stets im Register angesetzt werden. Beispiel: 345 — 73. Der Minuend 345 wird im Register (in den 3 letzten Schaulöchern) eingestellt, die übrigen Schaulöcher bekommen 0. Dann wird der vor der Hunderterkolonne angebrachte Schieber vorgeschoben und der um 1 verminderte Subtrahend getastet, aber in roten Tastenziffern (also hier 72 rot). Auf dem Register ist das Resultat erschienen. — Zur Erklärung des Vorgangs sei Folgendes bemerkt. Wenn man den um 1 verminderten Subtrahend in roten Ziffern sucht, so geben die auf denselben Tasten stehenden schwarzen Ziffern stets das dekadische Komplement zum gegebenen Subtrahenden an. Auf den Tasten, auf denen man rot 72 findet, steht schwarz 27, das ist das dekadische Komplement zu 73. Wenn man also 72 rot tastet, so addiert man in Wirklichkeit 27 (also das dekadische Komplement des gegebenen Subtrahenden); um nun das richtige Facit der gestellten Aufgabe zu erhalten, muſs nach dieser Addition die ganze dekadische Einheit (im vorliegenden Beispiele die Zahl 100) abgezogen werden, was durch den vorgeschobenen Schieber geschieht, indem derselbe bewirkt, daſs die Zehnerübertragung nicht vorwärts (wie bei der Addition), sondern rückwärts wirkt, also auf der Hundertstelle im Register 1 subtrahiert, statt addiert. —

Das Dividieren. Beispiel: 44698 : 68. Der Dividend wird im Register angesetzt. Hierauf sucht man in roten Tastenziffern den um 1 verminderten Divisor, nämlich 67; auf denselben Tasten steht aber schwarz

32. Um die Anfangsstelle für das Anschlagen der Tasten zu finden, denkt man sich den gegebenen Divisor 68 in gewöhnlicher Weise unter den ersten Partialdividenden gesetzt, also hier 68 unter 446, das ist in der Tausender- und Hunderterkolonne; an dieser Stelle beginnt das Greifen der Tasten. Man tastet nun den roten Divisor (67) oder was dasselbe ist, die schwarze 32 in der Tausender- und Hunderterkolonne so oft, als der Divisor 68 in 446 enthalten ist, nämlich sechsmal. Dadurch hat man nichts subtrahiert, sondern sechsmal 3200 addiert, und im Register steht jetzt auch wirklich 44698 + 19200 nämlich **6**3898. Die vordere 6 davon ist die erste Quotientenziffer und 3898 ist der Restdividend. Hierauf denkt man sich 68 unter 389 gerückt, und tastet in der Hunderter- und Zehnerkolonne die rote 67 resp. die schwarze 32 fünfmal, wodurch also fünfmal 320 zu der vorigen Registerzahl addiert wird. Das Register zeigt den Betrag der Summe 63898 + 1600, nämlich **65**498. Davon sind die beiden vordersten Ziffern die beiden ersten Quotientenziffern. 498 ist der nächste Restdividend. Man tastet nun in der Zehner- und Einerkolonne die rote 67 resp. die schwarze 32 siebenmal, wodurch siebenmal 32 zur vorigen Registerzahl addiert wird. Das Register zeigt jetzt 65498 + 224 nämlich **65**722, davon ist 657 der Quotient und 22 der Rest der gestellten Divisionsaufgabe.

Wenn man nicht die Gröſse der einzelnen Quotientenziffern im Kopfe bestimmt, so muſs zu ihrer Ermittelung das Tasten des um 1 verminderten Divisors (in roten Ziffern) sovielemal geschehen, bis die sich ergebende Quotientenziffer mit der Anzahl des Tastens übereinstimmt und auſserdem die verbleibenden Ziffern des Teildividenden kleiner sind als der gegebene Divisor.

Das obige Divisionsexempel hat sich auf dem Wege der Addition folgendermaſsen vollzogen:

$$
\begin{array}{rl}
44698 : 68 & \\
+\ \underline{19200} & \text{d. i. 6mal 3200} \\
63898 & \\
+\ \underline{\ 1600} & \text{d. i. 5mal 320} \\
65498 & \\
+\ \underline{\ \ 224} & \text{d. i. 7mal 32} \\
\underbrace{657}_{\text{Quotient}}\underbrace{22}_{\text{Rest}} &
\end{array}
$$

Es liegt hier die komplementäre Division vor. 44698 : (100 — 32). Die Vielfachen von 32 sind zu addieren, was geschehen ist; die Vielfachen der dekadischen Einheiten (60000, 5000, 700) wären zu subtrahieren, was aber unterlassen ist, weil die geltenden Ziffern derselben den Quotient bilden.

Die Maschine ist von Dorr E. Felt erfunden und wird unter seiner persönlichen Aufsicht hergestellt von der Firma
Felt et Tarrant Mfg. Co. 52, 54 und 56 Illinois Street, Chicago, U. S. A.

Die Patente darauf sind am 19. Juli und 11. Okt. 1887 erworben. Die Ausführung geschieht in drei Gröfsen, nämlich mit acht Kolonnen, zehn Kolonnen und zwölf Kolonnen zu den Preisen 525 ℳ, 700 ℳ, 850 ℳ Die Verkaufsstelle (zu Originalpreisen) für Deutschland ist die Schreibwarenhandlung von F. G. Mylius in Leipzig. Daselbst steht ein Exemplar zur Ansicht, das mir der Inhaber der Firma bereitwilligst und freundlichst zeigte und erklärte. Jeder Maschine wird ein Instruktionsbuch beigegeben.

4. Burroughs Registering accountant oder selbstschreibende Additionsmaschine.



Die Maschine ist 28 cm breit, 38 cm lang und 32 cm hoch. Sie ruht in einem staubsichern Kasten, der aus einem Metallrahmen und festen Glas-

wänden besteht, sodafs das Funktionieren der arbeitenden Teile beobachtet werden kann. Auf der Oberseite, dem Griffbrette, befinden sich 81 Tasten, angeordnet in 9 Kolonnen à 9 Stück. Jede trägt eine der 9 Ziffern. In jeder Kolonne befinden sich Tasten mit den Ziffern 1, 2 ... 9. Die erste Kolonne rechts ist die Einerkolonne, dann folgt die Zehnerkolonne etc. An der Hinterwand befindet sich aufsen eine automatisch bewegliche Papierrolle, auf welche die Posten in richtiger Untereinandersetzung sowie die Totalsumme durch die Maschine gedruckt werden. An der rechten Seite ist eine Kurbel; beim Arbeiten wird dieselbe angezogen bis an einen festen Widerstand und dann losgelassen; sie geht von selbst durch Federkraft in ihre ursprüngliche Lage zurück.

Durch das Niederdrücken der einen Posten darstellenden Tasten und darauffolgendes Anziehen der Kurbel wird der Betrag auf die Papierrolle, die an der Hinterwand angebracht ist, gedruckt, zugleich aber wird dieser Betrag auch auf den Sammlungs- oder Additionsmechanismus gebracht. Hierauf kann ein zweiter Posten auf eben diese Weise der Maschine übergeben werden, darnach ein dritter etc.; dies wird fortgesetzt, bis alle Posten aufgegeben sind. Will man dann die Summe erscheinen lassen, so macht man zunächst eine Kurbelbewegung leer (d. h. ohne irgendwelche Taste gegriffen zu haben), drückt dann die links unten angebrachte vernickelte Taste (das ist die „Additionstaste") nieder und macht eine neue Kurbelbewegung, womit das Additionswerk beendet ist. Auf dem Papierstreifen zeigt sich nun die ganze Arbeit der Maschine: sie hat alle ihr aufgegebenen Posten einzeln gedruckt, genau untereinandergesetzt, einen Zwischenraum zwischen dem letzten Posten und der Summe gelassen, der für den Additionsstrich gelten kann, und die Summe darunter gedruckt — und überdies fehlerfrei gerechnet. Ein Streifen sieht so aus, wie folgendes Beispiel[7]) zeigt:

```
 34578
  8200
   945
720640
    89
  3207

767659
```

Rechts unten ist noch eine vernickelte Taste ohne Ziffer angebracht, das ist die „Repetiertaste". Sie dient dazu, um mehrere nacheinander

7) Die neuesten Maschinen drucken vor die beiden letzten Stellen in jeder Zahl ein Dezimalkomma, z. B. 345,78.

vorkommende gleichgrofse Posten auf kürzere Weise als gewöhnlich der Maschine zu übergeben. Zu diesem Zwecke tastet man den Posten, drückt die Repetiertaste nieder und klemmt sie fest, darnach zieht man die Kurbel sovielemal an, wie der Posten aufgegeben werden soll. Dann löst man die Repetiertaste aus und bringt die Zahlentasten mit Hilfe der Additionstaste wieder in die Höhe, worauf man in gewöhnlicher Weise weiterarbeiten kann.

Die Null erscheint auf der Klaviatur nicht; diese Ziffer wird automatisch von der Maschine ohne irgendwelches Zuthun des Bedienenden gedruckt, wo sie erforderlich ist.

Bevor man das Addieren anfängt, mufs die Maschine „klar gestellt", d. h. auf ihren Nullpunkt gebracht werden. Zu diesem Zwecke macht man eine volle Kurbelbewegung leer (d. i. einen Hergang und einen Hingang). Dann drückt man die Additionstaste nieder, hält sie in dieser Lage fest und macht abermals eine volle Kurbelbewegung. Dadurch wird die Maschine klar von allen Posten, die etwa vorher gegriffen waren.

Die Maschine ist in erster Linie für die Addition konstruiert; doch kann sie auch zur Multiplikation benutzt werden und zwar mit Hilfe der Repetiertaste. Soll beispielsweise 547 mit 23 multipliziert werden, so drückt man die Repetiertaste nieder und klemmt sie fest. Hierauf tastet man 547 in gewöhnlicher Weise und macht 3 (nach Mafsgabe der Einer von 23) volle Kurbelbewegungen. Dann drückt man die Additionstaste, um die Zahlentasten in die Höhe zu bringen. Darnach tastet man die Zahl 547 eine Kolonne weiter links als vorher (also eigentlich 5470) und zieht die Kurbel zweimal (nach Mafsgabe der Zehner von 23) an. Hierauf bringt man mit Hilfe der Additionstaste die Zahlentasten in die Höhe, zieht die Kurbel einmal leer und addiert schliefslich das Ganze wie gewöhnlich.

Um den Additionsmechanismus zu einigem Verständnis zu bringen, sei folgendes angeführt. Unter jeder Tastenkolonne des Griffbretts befindet sich im Innern der Maschine ein Rad auf eigner Achse mit 10 Zähnen. Angenommen, es seien 3 und 4 zu addieren. Durch Niederdrücken der Einertaste 3 und nachfolgende Kurbelbewegung wird das Einerrad aus der Nulllage um 3 Zähne weiter gedreht. Der Druck auf die Einertaste 4 nebst Kurbelbewegung bewirken, dafs das Einerrad um 4 Zähne weiter, also bis zum Zahn 7 bewegt wird. Ist nun 5 hinzuzufügen, so haben Tastendruck und Kurbelbewegung zur Folge, dafs das Einerrad sich über die Zähne 8 und 9 in die Ruhelage und weiter um die Zähne 1 und 2 fortbewegt. Beim Passieren der Ruhelage 0 greift jedoch eine am Einerrade befindliche Nase in das Zehnerrad und bewegt dieses aus der Nulllage um einen Zahn vorwärts, also auf 1. Die Stellung beider Räder (Einerrad auf 2 und Zehnerrad auf 1) giebt nun den Betrag der Summe der 3 Zahlen 3 + 4 + 5

an. — In gleicher Weise vollziehen sich die Additionen und Zehnerübertragungen in den übrigen Kolonnen.

Das zum Drucke notwendige Farbband arbeitet automatisch und wird auch automatisch umgeschaltet, wenn es in einer Richtung abgelaufen ist; man braucht also nicht auf das Band zu achten.

Die Verbindung zwischen Handkurbel und dem innern Mechanismus wird durch Federn bewirkt, welche genau auf die erforderliche gleichmäfsige Kraft reguliert sind. Diese Federn, zusammen mit dem Regulator (im Innern), schützen die arbeitenden Teile derart, dafs, gleichgiltig ob die Kurbel schnell oder langsam gehandhabt wird, die Maschine immer mit derselben Schnelligkeit arbeitet; auf diese Weise kann selbst böswillige Nachlässigkeit des Arbeitenden der Maschine nicht schaden.

In wenigen Minuten ist die Handhabung erlernt. Eine Schnelligkeit von 1500 Posten in der Stunde wird von jedem nach kurzer Zeit erreicht; ein sehr geübter Arbeiter kann über 2000 Posten pro Stunde addieren.

Die Maschine reicht mit ihrer Leistungsfähigkeit bis zur höchsten Summe 999 999 999; sie schont Gehirn und Nerven der Beamten, arbeitet drei- bis viermal schneller als der Mensch, druckt in gefälligen, gleichmäfsigen, gut leserlichen Typen und ist — unfehlbar.

Dadurch, dafs sie alle Posten einzeln druckt, kann mit Hilfe des Druckstreifens jederzeit der Beweis für die Vollständigkeit und Richtigkeit der aufgegebenen Posten erbracht werden.

Die soeben erwähnte Möglichkeit der Kontrole, verbunden mit der leichten und schnellen Handhabung, sowie die fehlerfreie Summation bilden zusammengenommen alle Erfordernisse, die man billigerweise an eine Additionsmaschine stellen kann.

Erfunden wurde diese Maschine zu Anfang der achtziger Jahre von Burrough, der vor wenigen Monaten verstorben ist. Die ersten Exemplare waren noch unvollkommen. Gebrauchsfähige Maschinen sind erst seit etwa sechs Jahren auf den Markt gekommen und zwar bereits in der jetzigen Ausführung. Verbesserungen sind seitdem nur in ganz nebensächlichen Dingen eingetreten. Die Patente darauf sind am 21. Aug. 1888, 15. Jan. 1889 und 4. Febr. 1890 erworben.

Bis vor kurzem wurde die Maschine nur von der Arithmometer Co. in St. Louis U. S. A. hergestellt; seit 1898 giebt es aber zu ihrer Herstellung auch eine Fabrik in Nottingham (England), um von dort aus den Bedarf in Europa zu decken.

Für diejenigen Leser, die das Verlangen haben, eine solche Maschine zu sehen, seien folgende Fundstellen angeführt.

In Deutschland haben zur Zeit (Juni 1899) in Gebrauch:

Kaiserliche Reichspostämter 120 Maschinen,
Kaiserl. Stat. Amt Berlin zehn,
Reichs-Versicherungs-Amt Berlin eine,
Bank des Berl. Kassenvereins zwei,
Städt. Sparkasse Köln a. Rh. zwei,
Preufs. Rent.-Versicher.-Anst. Berlin eine,
Artillerie-Werkstatt Dresden eine,
Rh.-Westf. Masch.- und Kleineisen-Industrie-Berufsgenossenschaft Düsseldorf eine,
Ernst Schiess, Werkzeugmasch.-Fabrik Düsseldorf eine,
Falk & Schütt, Lederfabr., Wilster (Holst.) eine,
Wagner & Korn, Flaschenfabrik, Louisenthal a. Saar eine,
Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft, Berlin eine,
Städt. Sparkasse in Leipzig eine,
Königl. Bayerische Postämter zehn,
Königl. Württemb. Post drei.

In Österreich:

Österr. Post-Sparkasse Wien 6 Maschinen.
Kaiser Ferdinand-Nordbahn Wien eine,
F. Winkler's Stadt-Apotheke Innsbruck eine.

In England und Amerika ist die Maschine in vielen Banken zu finden und daselbst zur geschätzten Gehilfin geworden. Zur Addition von Postanweisungen und Checks ist ihr Nutzen erstaunlich grofs, und Beamte, die sie einmal benutzt haben, mögen sie nicht mehr entbehren.

Es giebt nur eine Gröfse, die eben beschriebene; ihr Preis ist 1250 ℳ Den Alleinverkauf für fast ganz Europa hat die Firma Glogowski[8]) & Co. in Berlin W. Friedrichsstr. 83; Filialen hat die Firma in Leipzig, Frankfurt a/M., Mannheim, Hamburg, Budapest.

Referiert ist über diese Maschine in einigen Tageszeitungen: dreimal in der „Deutschen Verkehrs-Zeitung in Berlin", zuerst 1897 Seite 453, dann den 15. April 1898 No. 15 und den 6. Januar 1899 No. 1; desgleichen in der „Österreichischen Eisenbahn-Zeitung" Wien, den 1. Jänner 1899 No. 1.

---

8) Wegen starker Nachfrage steht in der Leipziger Filiale kein vorrätiges Exemplar, sodafs man es hätte in Augenschein nehmen können. — Durch besondere Gefälligkeit wurde mir aber die Erlaubnis zu teil, die Maschine auf der Hauptpost aufserhalb der Dienstzeit zu sehen.

Wer keine Gelegenheit hat, ein Exemplar in natura zu sehen, kann sich am besten über die Maschine orientieren aus dem Prospekte: „Burrough's selbstschreibende Additionsmaschine“ und der „Gebrauchsanweisung für Burrough's selbstschreibende Additionsmaschine“ der Firma Glogowski & Co.



5. Die Registrir-Kassen.



The National Cash Register Company[9]) in Dayton, Ohio, fabriziert gegenwärtig etwa 90 verschiedene Sorten von Registrirkassen, die durch eine Modell- oder Dessin-Nummer (No. 1, No. 2 etc.) voneinander unterschieden werden. Im ganzen befinden sich schon ca. 160000 Maschinen im Publikum, der monatliche Absatz beträgt gegenwärtig rund 2000.

Man kann die Registrirkassen in zwei Gruppen bringen: solche, die addieren, und solche, die nicht addieren.

1. Die nicht addierenden Kassen haben eine Anzahl Tasten, die in zwei Horizontalreihen angeordnet sind und Zahlen tragen, etwa 1, 2, 3 ... 9 ₰, 10, 20, 30 ... 90 ₰, ebenso Tasten für Markbeträge. Die Zahlen können der Fabrik bei Bestellung der Maschine vorgeschrieben werden. Dadurch ist es möglich, jedwedes Bedürfnis zu befriedigen.

---

9) Die Leipziger Filiale der Firma hat mich bereitwilligst und freundlichst über die Einzelheiten ihrer Kassen unterrichtet und mir auch den innern Bau gezeigt.

Jede Taste bewegt ein Rad und zwar bei jedem Drucke um einen Zahn vorwärts. Auf der Peripherie jedes Rades stehen aufser der Null die ersten 29 Produkte der Tastenzahl, von denen aber nur eins auf einmal in einem Schauloche sichtbar wird. Es stehen beispielsweise auf dem Rade, das von der 6-Pfennig-Taste getrieben wird, die Zahlen 0, 6, 18, 24 ... bis 174. Statt 180 erscheint 0. Das erste Rad hat aber am Nullzahne eine Nase und greift durch diese in ein zweites Rad und dreht es um einen Zahn vorwärts. Auf diesem Sekundärrade stehen aufser der Null die ersten 29 Produkte der Zahl 180; also die Zahlen 0 180 360 540 ... bis 5220. Auf dieselbe Weise treibt jede andre Taste zwei hintereinander stehende Räder. Und es kann, wenn beim Anfange alles auf Null stand, der Maschine durch jede Taste das (900—1)fache ihrer aufgedruckten Tastenzahl übergeben werden; mehr freilich nicht, wenn nicht noch eine dritte Rädergruppe angebracht wird. Würde man eine Taste mehr als 900—1mal drücken, so würde das 900fache Produkt der Tastenzahl aus der Maschine verschwinden und nur der Überschufs angezeigt werden.

Um die Totalsumme derjenigen Beträge zu erhalten, die im Laufe eines Tages durch die Kasse registrirt worden sind, mufs man in allen Schaulöchern (die sich im Innern der Maschine befinden) die Zahlen ablesen und in der gewöhnlichen Weise addieren.

Vollkommene Additionsmaschinen sind solche Registrirkassen noch nicht, da ihnen das wichtigste Moment, die Zehnerübertragung, fehlt. Eine derartige Kasse ist nichts weiter als eine Produktentabelle ausgewählter Faktoren, mit der Möglichkeit, durch einen Tastenapparat in Verbindung mit einem Räderwerk die Produkte in fortlaufender Reihenfolge in Schaulöchern sichtbar zu machen.

Schon diese Apparate wurden von den Kaufleuten mit Freuden begrüfst, da sie die Bildung der Totalsumme aller Einnahmen eines Tages wesentlich abkürzen.

2. Von den addierenden Maschinen sollen die beiden vollkommensten erwähnt werden.

a. Die Registrirkasse mit Druckstreifen, aber ohne Checkdruck. Die Klaviatur besteht aus 2 Horizontalreihen von Tasten, denen die Zahlen 1, 2, 3 ... 9 für die Einerpfennig, 10, 20, 30 ... 90 für die Zehnerpfennig, 1, 2, 3 ... 9 für die Einermark, 10, 20, 30 ... 90 für die Zehnermark etc. aufgedruckt sind. — Vor dem Addieren mufs alles auf Null gestellt sein. Sei beispielsweise der erste Posten 7,85 *M.*, so drückt man 3 Tasten: die 7 *M.*-Taste, die 80 Pfennig-Taste und die 5 Pfennig-Taste. Auf der Oberseite der Maschine erscheint jetzt 7,85 *M.* in den Schaulöchern des Summenplatzes. Soll dazu 36,47 *M.* addiert werden, so drückt man

4 Tasten: die 30 ℳ-Taste, 6 ℳ-Taste, 40 Pf.-Taste und 7 Pf.-Taste. In den Schaulöchern des Summenplatzes erscheint jetzt 44,32 ℳ — Am Deckel der Maschine ist noch eine andre Gruppe von Schaulöchern angebracht, wo jeder Posten in grofsen Ziffern erscheint, sobald er getastet worden ist, sodafs man dadurch eine Kontrole hat, ob man richtig gegriffen habe oder nicht.

Beim Arbeiten mit der Maschine wird ein auf der rechten Seite befindlicher Papierstreifen (ähnlich dem beim Morsetelegraph) automatisch in Bewegung gesetzt, darauf werden die einzelnen aufgegebenen Posten in richtiger Untereinandersetzung gedruckt. Dieser Streifen kann jederzeit zur Kontrole darüber dienen, was der Maschine aufgegeben wurde.

b. Die Registrirkasse mit Druckstreifen und Checkdruck. Die Tasten sind hierbei in Kolonnen zu je 9 Stück angebracht. Die gröfste Maschine hat 8 Kolonnen. Wenn man bei ihr die beiden letzten Kolonnen für die Pfennig, die übrigen für die Mark gelten läfst, so addiert sie bis zum Höchstbetrage 999 999,99 ℳ — Wenn man addieren will, so stellt man zunächst alles auf Null, tastet hierauf den ersten Posten und dreht eine rechter Hand angebrachte Kurbel einmal herum. Dadurch geschieht viererlei: erstens wird der Posten in die Schaulöcher des Summenplatzes auf der Oberseite gebracht (oder wenn dort schon etwas steht, dazu addiert), zweitens wird dieser Posten auf dem Deckel (auf dem Kontrolplatze) in grofsen Ziffern vorn und hinten sichtbar, drittens wird der Posten auf eine automatisch bewegte Papierrolle (links an der Maschine befindlich) gedruckt, viertens wird ein Check bedruckt, abgeschnitten und herausgeworfen. Auf den Check druckt die Maschine: die fortlaufende Nummer, das Datum, den Geldbetrag und auch noch eine andre beliebige Notiz, die man in den Druckapparat eingeschoben hat.

Nach der Kurbelbewegung kann der Maschine ein zweiter Posten übergeben werden. Es vollzieht sich alles ebenso wie vorher, nur dafs auf dem Summenplatze die Summe der zwei ersten Posten erscheint.

Aufser den Additionstasten (den Zahlentasten) sind noch andre Tasten, solche mit Buchstaben A, B, C etc. angebracht. Drückt man einen dieser Buchstaben und tastet dann einen Posten, so wird vor diesen Posten der betreffende Buchstabe gedruckt auf dem Druckstreifen und auch auf dem Check. Weist man jedem Verkäufer eines Geschäfts einen besondern Buchstaben zu, so läfst sich dadurch seine Thätigkeit kontrollieren.

Es läfst sich aber auch beim Gebrauche der Buchstaben der Additionsmechanismus ausschalten, dann bleibt nur der Druckapparat in Thätigkeit und man registrirt dann gewöhnlich mit A die Ausgaben, mit B die Bezahlung von Rechnungen, mit C die Verkäufe auf Credit. Bei den neuesten

Maschinen wird beim Gebrauche eines der Buchstaben A, B oder C der Additionsmechanismus automatisch ausgeschaltet, während er beim Gebrauche der übrigen Buchstaben in Wirksamkeit bleibt.

Die Registrirkassen (a) mit Druckstreifen aber ohne Checkdruck werden nach ihrer Gröſse zu den Preisen von 400—900 ℳ geliefert, die Kassen (b) mit Druckstreifen und Checkdruck kosten 650 bis 1400 ℳ

Die **erste** ziemlich einfache Registrirkasse wurde 1878 gebaut. Sie ist bereits eine totaladdierende Kasse und hat Tasten für die ersten 19 Produkte der Zahl 5 und eine für 1 $, angeordnet in 2 Horizontalreihen, wie folgt:

5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
10	20	30	40	50	60	70	80	90	1 $

Man kann demnach der Maschine jede beliebige Anzahl von Dollars (durch ebensovielmaliges Anschlagen der Dollartaste) aufgeben, Centsbeträge aber nur diejenigen, die durch 5 teilbar sind. Der Höchstbetrag ist 499 $ 95 cts.

Sie ist jedoch auch benutzbar für andre Münzen, sowie für Maſse und Gewicht, wenn nur die Währungszahl 100 ist.

Die Summe wird auf zwei vertikalstehenden, an der rechten Seite angebrachten Metallscheiben durch Zeiger kenntlich gemacht; auf der obern Scheibe liest man die Cents, auf der untern die Dollars ab. Die Centsscheibe nimmt Beträge bis 495 cts. auf, ehe eine Übertragung von ihr auf die Dollarscheibe stattfindet. Sie wird sowohl von den Centstasten als auch von der Dollartaste getrieben; die letztere bewegt sie bei jedem Drucke um $^1/_5$ eines vollen Umgangs. Die Dollarscheibe zeigt also nur Dollarbeträge von 5 zu 5 an, sie wird einzig und allein durch die Übertragung von der Centsscheibe getrieben.

In der Folgezeit sind die Kassen unausgesetzt vervollkommnet und vergröſsert worden. Ursprünglich waren sie nicht durch Patente geschützt, erst auf die Verbesserungen und Neuerungen der letzten Jahre (seit 1895) sind Patente genommen worden.

In Berlin, Leipzig, Köln und Wien sind Filialen der Daytoner Firma. In der Leipziger steht noch ein Exemplar der ersten Konstruktion (1878) neben den neuesten Fabrikaten, sodaſs man das Einst und Jetzt vergleichen und den gewaltigen Fortschritt wahrnehmen kann.

In allen gröſsern kaufmännischen Detailgeschäften findet man jetzt Registrirmaschinen, oft in mehr als einem Exemplare.

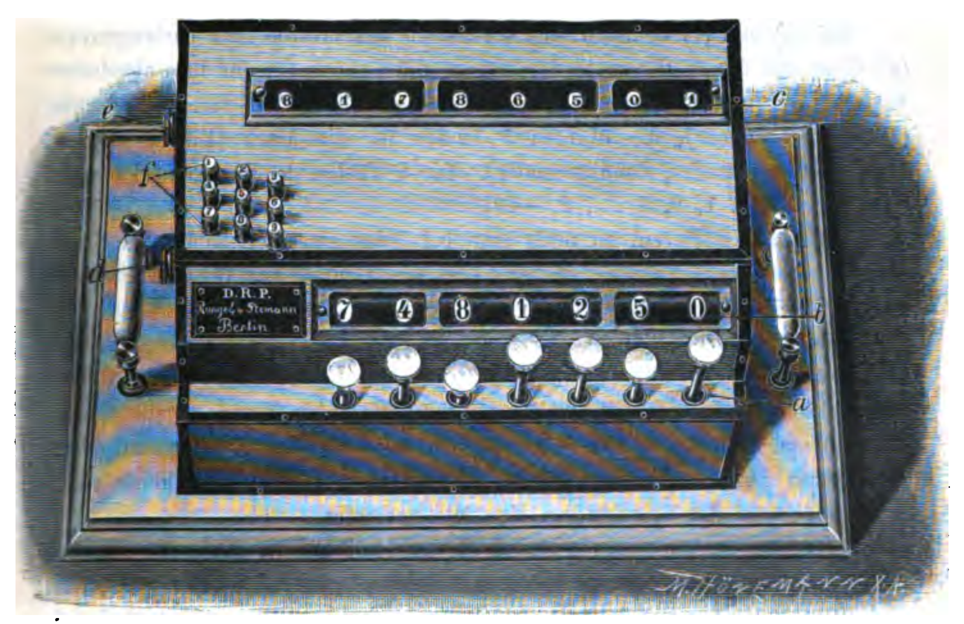
Auch eine deutsche Firma: Grimme, Natalis & Co. in Braunschweig, baut Registrirkassen; doch konnte ich über diese Fabrikate trotz Bemühung nichts erfahren. Ihre äuſsere Gestalt ist den amerikanischen Kassen zum Verwechseln ähnlich.

Die erste Maschine von 1878 hat ein ganz andres Getriebe als die jetzigen Maschinen; in ihr treiben alle Tasten nur ein einziges Zahnrad, auf dem die Summe durch einen Zeiger angezeigt wird. Die nichttotaladdierenden Maschinen[10]) mit zwei hintereinanderstehenden Rädern für jede Taste werden seit 1882 auf den Markt gebracht. Im Jahre 1884 löste die gegenwärtige Gesellschaft die ursprüngliche in ihrem Besitzstande ab.

Die totaladdierende Maschine jetziger Gestalt, doch ohne Kurbel und ohne Druckapparate, hat Thomas Carney aus Dayton 1890 erfunden. Den Totaladdierer mit Kurbel und Druckapparat für Detailstreifen und Check erfand 1892 Hugo Cook.

Alle Maschinen werden einzig und allein von der eingangs genannten Gesellschaft in Dayton hergestellt.

6. Die Additionsmaschine von Runge.



a = Tasten (Einer, Zehner, Hunderter u. s. w.). *b* = Kontrollanzeigung. *c* = Resultatanzeigung. *d* = Knopf zum Einstellen der Kontrollanzeigung auf 0. *e* = Knopf zum Einstellen der Resultatanzeigung auf 0. *f* = Knöpfe (zur Bestimmung der Zahlen von 1—9).

Nach 15jährigen Versuchen und Bemühungen ist es Runge in Berlin (1899) gelungen, eine Maschine zu konstruieren, auf der man gröſsere

10) Die folgenden Nachrichten sind entnommen einer brieflichen Mitteilung der National Cash Register Company an den Verfasser.

Posten auf einmal addieren kann. Die Firma Runge und von Stemann in Berlin hat ein Modell hergestellt, von dem hier eine Beschreibung[11]) folgt.

Der Apparat ruht auf einer Eichenplatte in einem Gehäuse aus Metall und Glas. Auf der Deckplatte sind 4 Hauptteile sichtbar. Die Gruppe der Schaulöcher (c) ist der Resultatplatz, wo die Summe erscheint. Die Schaulöchergruppe (b) ist der Kontrolplatz, wo jeder der Maschine aufgegebene Posten sichtbar wird, nachdem man ihn getastet hat; dadurch hat man eine Kontrole, ob man richtig gegriffen habe oder nicht.

In den Schaulöchern werden die Zahlen in gewöhnlicher Weise gelesen; die beiden letzten Ziffern (rechts) gelten für die Pfennig, die übrigen für die Mark. Zwischen den Hundertern (*M.*) und Tausendern ist ein breiterer Zwischenraum gelassen der leichteren Orientierung halber. Die Gröfse der Summe ist unbeschränkt in den Millionen, der gröfste Posten jedoch ist 99999,99 *M.*

Bei (a) und (f) befinden sich die beiden Klaviaturen, die Tastengruppe (a) dient für die Stellenwerte der Ziffern, die Gruppe (f) für ihre absoluten Werte. Die beiden letzten Tasten in Gruppe (f) gelten für die Pfennig (Einer und Zehner), die übrigen 5 Tasten für die Mark (Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender). Die 9 Tasten der Gruppe (f) tragen eine der Ziffern 1, 2, 3 ... 9. —

Will man addieren, so mufs man bei jeder einzelnen Ziffer des Summanden stets zwei Tasten drücken, eine aus Gruppe (a) für den Stellenwert und eine aus Gruppe (f) für den absoluten Wert.

Die Maschine hat zwar eine geringere Anzahl von Tasten als die unter No. 3, 4 und 5 aufgeführten amerikanischen Maschinen; doch ist ihre Handhabung schwerfälliger, weil für jede Ziffer stets zwei Tasten gegriffen werden müssen. Eine augenblickliche Kontrole für das richtige Aufgeben der Posten hat man zwar auch; doch geht man wegen des Fehlens eines Druckapparates der dauernden Kontrole verlustig.

Das erste funktionierende Modell[12]) war 1896 auf der Berliner Gewerbeausstellung zu sehen. Durch Deutsches Reichspatent No. 87776 geschützt, liefs Runge in der Folgezeit in seiner mechanischen Privatwerkstatt durch zwei Mechaniker nach dem Modell die Maschine herstellen und brachte noch mancherlei Verbesserungen an. Gegenwärtig wird die Maschine in 2 Gröfsen fabriziert und zwar mit 7 und mit 9 Tasten. Die beigefügte Abbildung zeigt die kleinere Maschine mit 7 Tasten.

---

11) Als Quelle diente: Illustrierte Zeitung Leipzig No. 2907 vom 16. März 1899.

12) Laut brieflicher Mitteilung von dem Erfinder an den Verfasser.

Schlufsbemerkung. Überblickt man das hier gebotene Material von Additionsmaschinen, so ergiebt sich, dafs die ersten beiden Apparate (von Beher und von Illgen) erfunden worden sind unter Zugrundelegung des Additionsgeschäfts in seinem schulmäfsigen Betriebe, der kolonnenweise zu addieren vorschreibt. Beher bleibt bei einzifferigen Kolonnen stehen, während Illgen zweistellige Kolonnen auf einmal bewältigt.

Das Illgen'sche Prinzip ist zwar der Erweiterung fähig, doch würde schon die Konstruktion für dreizifferige Kolonnen zu einem Apparate mit unhandlichen Dimensionen führen.

Die vier übrigen Maschinen entfernen sich von der akademischen Additionsart und stellen sich ganz und allein in den Dienst kaufmännischen Bedürfnisses, das zu einem bereits vorhandenen Betrage einen neu hinzutretenden Posten in seiner Totalität zu addieren verlangt.

Da in kaufmännischen Geschäften die Posten nicht gleichzeitig sondern nacheinander auftreten, so ist in den Zwischenpausen Zeit, die Addition jedes einzelnen Postens zu der Summe der vorhergehenden zu bewirken; und wenn abends der letzte Kunde hinausgeht, ist auch die ganze Tageseinnahme addiert.

Dafs die beiden Maschinen mit Druckapparat wegen der Möglichkeit dauernder Kontrole den Vorzug verdienen vor den Maschinen ohne Druckapparat, ist kaum erst nötig zu erwähnen.

Eine Bemerkung darf aber nicht unterdrückt werden, nämlich die, dafs die amerikanischen Erfindungen den deutschen überlegen sind. Wenn man auch diesen Umstand aus Schonung des nationalen Bewufstseins mit Schweigen übergehen wollte, so würde doch die Sache deutlich genug für sich selbst reden.

Noch im Laufe dieses Jahres wird eine Dresdner Firma, die Rechenmaschinenfabrik von Woldemar Heinitz, welche die sogenannte Küttner'sche Rechenmaschine fabriziert, dem Publikum auch eine Additionsmaschine anbieten, die (nach einer brieflichen Mitteilung und Einsendung einer Photographie der Firma an den Verfasser) dasselbe leisten wird wie die vollkommensten amerikanischen Maschinen. Ich freue mich, diesen Hinweis jetzt schon machen zu können, ganz besonders deshalb, weil es sich um eine deutsche Erfindung handelt.

ZUR GESCHICHTE DER DEUTSCHEN ALGEBRA.

VON

DR. E. WAPPLER
IN ZWICKAU.

Der *cod. Dresd. C 80* enthält auf Bl. 368—378′ eine deutsche Algebra[1]) aus dem Jahre 1481.[2]) Die letzte Aufgabe dieser Algebra lautet (Bl. 378′): Es sint drey Gesellenn, dye haben gesetzt *v* (70) Guldenn vntr in 3 vnnd habenn gewonnen 20 Guldenn. Den ersten traff mit Heupgut vnd mit Gewyn 15 Guldenn, den andern 25 Gulden vnd den dritten 50, vnd der erste scheyt 4 Manat, der ander 2 Manat, der dritte 2 Manat. Wy vil ist des Haupgutz gewesenn von eynem yeglichen besunder? Dazu gehört folgende Auflösung (Bl. 378′): Nen (!), daz dy erste Haupgut sey 1^c, dem andern 1 numerus, das sey 20, vnd dem dritte 50 mynner 1^c. Nun multiplicir 4 Manat mol 1^c, macht 4^c, vnd 2 Mant mol 20 macht $\frac{40}{n}\left(\overset{n}{40}\right)$, vnd 2 Mant mol 50 mynner 1^c macht 100 mynner 2^c. Nu summer zusamen, gemacht $\frac{n}{140}\left(\overset{n}{140}\right) 2^c$. Nun sprich: $\overset{n}{140}\ 2^c$ gibit mir 20 Gulden Gewynt, was gibt mir 4^c? (4^c) mol 20 ist 80^c, tail in $\overset{n}{140}\ 2^c$, kompt $\frac{80^c}{140}\ 2^c \left(\frac{80^c}{140\ 2^c}\right)$. Gewinckt thu zusamen mit dem Heupgut, das was 1^c. Multiplicir in Kreutz, komptz $\overset{c}{220}\frac{\mathfrak{z}}{2}\left(\overset{\mathfrak{z}}{2}\right)$, vnd das sol man taylenn in die vnten Figuren, vnd sol 15 komen. Dorumb multiplicir 15 mol $\frac{n}{140}\left(\overset{n}{140}\right) 2^c$, macht 2100 30^c, das ist gleich $\overset{c}{220}\left(\overset{\mathfrak{z}}{2}\right)$. Nym 30 ($30^c$) dorvon beyden Tailen, pleibz $\overset{c}{140}\ \frac{\mathfrak{z}}{2}\left(\overset{c}{190}\ \overset{\mathfrak{z}}{2}\right)$, dem anderen Tail $\overset{n}{2100}$. Nun machs als die vierdt spricht, kumt radix vonn $3306\frac{1}{4}$, zw ab $47\frac{1}{2}$, das war 10. Also vil ist des Heupgutz dem erstenn, dem andern 20 und dem dritten 40. Diese Auflösung unterscheidet sich von der der vorher-

---

1) Näheres über diese Algebra in unserem Programm: Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert. Zwickau 1887, S. 3—5 und bei Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig 1892. Bd. 2, S. 220—222.

2) Die Nachschrift lautet: *factum 81 altera (!) post exaltacionis crucis* (verfertigt am Ostersonnabend 1481). Wir teilen diese Nachschrift erst jetzt mit, weil uns früher ihre Entzifferung nicht gelungen ist.

gehenden Aufgaben dadurch, dass die Unbekannte mit c (Abkürzung für cosa) statt mit 9 (Abkürzung für Ding) bezeichnet ist. Hieraus und aus dem Umstande, dass die mitgeteilte Aufgabe die Überschrift: *Regula de la Cossa* hat, folgern wir, dass der Verfasser der deutschen Algebra mit italienischen Schriften bekannt war.

Johann Widmann von Eger, dem einst die Dresdner Handschrift C 80 gehörte, hat die Aufgabe: Es sint drey Gesellenn, dye haben gesetzt 70 Guldenn u. s. w. ins Lateinische übersetzt und auf seine Art gelöst. Auf dem linken und unteren Rande des Blattes 356′ und auf dem oberen Rande des Blattes 357 liest man: *A, B, C* 700 (70) fl lucrati (!), *A* ad 4 menses, *B* ad 2, *C* ad duos menses, et cum his lucrantur 20 fl. *A* cedit cum capitali et lucro 15 fl, *B* 25 fl, et *C* recipit pro capitali et lucro 10 (50) fl. Queritur, quantum fuit capitale et lucrum seorsum cuiuslibet. Fac sic. Cum capitale omnium sit 700 (70), pone, quod capitale solius *A* sit 1 φ, capitale vero *B* sit 1 ø ad placitum, minor tamen 70 fl, puta 20. Capitale ergo ipsius *C*, cum dederim primo 1 φ, secundo 20 ø, necessario erit 50 — 1 φ. Modo iuxta regulam de tempore operando multiplicando capitale cuiuslibet per suum tempus, scilicet 1 φ per 4, et proveniunt 4 φ, deinde 20 per 2, et proveniunt 20 (40), item 50 — 1 φ per 2, et proveniunt 100 — 2 φ. Hec tria producta simul aggrega, et proveniunt 140 + 2 φ. Vlterius iuxta regulam operando dico: 140 + 2 φ dant 20, quantum dant 4 φ? Et proveniet talis ordo: $\frac{140 + 2\,\varphi}{4\,\varphi}$ 20. Duco secundum in tertium, et diuido per primum, et exibit fractio talis: $\frac{800}{140 + 2\,\varphi}\left(\frac{80\,\varphi}{140 + 2\,\varphi}\right)$, que necessario representant lucrum *A*. Addam ergo sibi *C* (!) capitale ipsius *A*, quod dixi esse 1 φ, multiplicando contradictorie more fractionum: $\frac{1\,\varphi}{1} \times \frac{80\,\varphi}{140 + 2\,\varphi}$ et erit aggregatum $\frac{220\,\varphi + 2\,ʒ}{140\,ø + 2\,\varphi}$. Hec fractio ex ypothesi valet 15, quia dixi capitale et lucrum *A* simul sumpta esse 15. Quia ambo continentur in hac fractione, multiplico ergo denominatorem per 15, et provenient 2100 + 30 φ equales suo numeratori, scilicet 220 φ + 2 ʒ. Jam habeo duas quantitates equales. Auferam (ab) utraque (parte) 30 φ, et remanent 2100 ø equales 190 φ + 2 ʒ. Nunc ergo iuxta quartam regulam diuidam omnia per ʒ, et provenient 1050 ø + 95 φ (!), mediabo φ, et sunt $\frac{95}{2}$, hoc duco in se, et proveniunt $\frac{9025}{4}$, a cuius medietate (!), scilicet $\frac{115}{2}$, subtraham medietatem φ, scilicet $\frac{95}{2}$, et remanent $\frac{20}{2}$ siue 10 integra,

valor φ siue capitale primi, quo (a) 15 subtracto 5 eiusdem primi lucrum fuit, ergo capitale primi 10 fl et 5 lucrum suum. Si voluero, operabor per omnia ut supra. Posito tamen, quod capitale *A* fuit 10 fl, iam inventi, et capitale *B* 1 φ et capitale *C* 60 — 1 φ, et provenit finaliter capitale *B*, scilicet 20 fl, similiter et lucrum 5. Scitis ergo capitalibus et lucris *A, B*, facile invenitur capitale et lucrum tertij. Est enim capitale suum 20 (40) fl et lucrum 10, quod fuit propositum.

Ausser dieser Aufgabe hat WIDMANN noch viele andere Aufgaben der lateinischen Algebra, welche von Bl. 350—365′ sich erstreckt, hinzugefügt[3]). Früher waren wir der Ansicht, dass nur einige dieser Aufgaben von WIDMANN herrühren. Darauf hatte uns der Umstand gebracht, dass die Aufgaben zu verschiedener Zeit und mit verschiedener Tinte beigeschrieben sind.. Jetzt glauben wir jedoch mit Bestimmtheit annehmen zu können, dass WIDMANN sämmtliche Aufgaben eingetragen hat. Hierin bestärkt uns besonders die merkwürdige Übereinstimmung, welche zwischen den Schriftzügen der fraglichen Aufgaben und denen der WIDMANN'schen Vorlesungsanzeigen stattfindet[4]). Ganz charakteristisch sind hier und dort *g* und *v* (ʒ und ϒ).

Unter den Aufgaben, die neben, über und unter dem Texte der lateinischen Algebra geschrieben sind, finden sich auch die RIESE'schen Nummern 38—53[5]). RIESE, zu dessen Cofs die lateinische Algebra die Grundlage gebildet hat, sagt nach Erledigung der ersten 37 Aufgaben: Nach disenn itzt erclertenn Exempelnn habe ich im berůerten alten Buech gefunden am Rande andere Exempel, auch auf die erste Regel gehorende, eyner anderenn Handschriefft, wer der Mathematicus gewesen, ist mir verporgenn, die weyl ich seynen Namen nicht weysz, wil dir doch erzelenn und erclerenn die Exempel, welche er gesetzt hat. Der ADAM RIESE unbekannte Mathematiker war ohne Zweifel JOHANN WIDMANN von Eger. Da es für Freunde der Geschichte der Mathematik von Interesse sein dürfte, WIDMANN's Leistungen in der Algebra kennen zu lernen, so lassen wir im folgenden noch eine Anzahl Aufgaben abdrucken, die WIDMANN der lateinischen Algebra hinzugefügt hat.

Si vixissem tantum, quantum vixi et iterum tantum, id est si vixissem duplum ad etatem meam, et mediam partem tanti et terciam partem tanti et quartam partem tanti et sextam partem tanti et septimam (!) partem

Bl. 352′.

3) Abgedruckt ist die lateinische Algebra in unserem Programm S. 11—30.

4) Abgedruckt sind die WIDMANN'schen Vorlesungsanzeigen in unserem Programm S. 9 und 10.

5) Vergl. BERLET, Die Cofs von ADAM RIESE (Programm der Realschule in Annaberg für 1860). S. 20—22.

tanti et $\frac{1}{8}$ vnius anni, tunc vixissem ad 20 annos. Queritur, quantum vixi. Fac sic. Pono, quod vixerim igitur 1 φ, quam duplabo, veniunt 2 φ, cui producto addendo $\frac{1}{2}$ (φ), $\frac{1}{3}$ (φ), $\frac{1}{4}$ (φ), $\frac{1}{6}$ (φ), $\frac{1}{16}$ (φ), $\frac{1}{8}$ vnius anni veniet quantitas talis 53 $\left(\frac{53}{16}\ \varphi\right) + \frac{1}{8}$, hoc ex ypothesi iam equiualet 20. Ex utraque parte idem genus stare non debet, deponam ubique $\frac{1}{8}$ ø, et manebunt ex 1 parte $\frac{159}{8}$ ø, ex altera parte $\frac{53}{16}$ φ. Diuide ø per φ, et proveniunt 6, valor φ.

Bl. 353'. Item duo sunt, puta A et B. Dicit A ad B: da mihi tantum, quantum habeo et residui medietatem, et habebo tantum ultra te, quantum habui infra te. Fac sic. Pone, quod A habeat 1 φ et B 1 ø ad placitum, exempli gratia sit 1 ø, qui ex(c)edit 1 φ in 1 — 1 φ. Jam depone (1 φ) de 1 φ (1 ø), et manet 1 — 1 φ et ex alia parte 2 φ et ulterius residui B medietatem, scilicet $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ φ, iungam cum 2 φ, quod est tantum ultra A (B), quantum B (!) fuit prius infra. Sup(p)lebo defectum, et veniet ex vna parte $\frac{5}{2}$ φ et ex alia parte $\frac{3}{2}$ ø, ergo agendo regulariter venient $\frac{3}{5}$, valor φ siue minor ø.

Bl. 354. Item tres habent soluere 200 fl, quorum primus exponit triplum ad secundum, secundus quadruplum ad tercium. Queritur, quantum quilibet exponat. Pone tercium exponere 1 φ, ergo oportet ex ypothesi, quod secundus exponat 4 φ et primus 12 (φ). Hec producta simul aggrega, et sunt 17 φ equales 200 ø. Iam iuxta primam regulam operando patet 11 valor φ et $\frac{13}{17}$, iam ultimus habet tot, quia positum est ipsum habere 1 φ, secundus habet 47 $+ \frac{1}{17}$, qui positus est, ut 4 φ (habeat), primus habet 141 $+ \frac{8}{17}$, (qui) positus est, ut 12 (12 φ habeat).

Bl. 354' Item pater et filius ibant Romam patre ambulante 6 milliaria, sed filio 9, quia inuenis. Pater modo precessit filium 100 milliaribus. Queritur modo, quoto die filius patrem consequitur. Fac sic. Pone eos conuenire in 1 φ, sed quia filius omni die vadit 9 milliaria, quare 1 φ per 9 multiplica, et erunt 9 φ, sed pater omni die vadit 6, quare 1 φ per 6 multiplica, et erunt 6 φ. Deinde subtrahe 6 φ a 9 φ, et manent 3 φ equales 100. Modo iuxta primam regulam operando patet, quod filius patrem consequitur 33 diebus transactis et $\frac{1}{3}$ tricesimi quarti diei.

Bl. 353. A et B volunt facere permutationem mercium. A dat 100 ℔ de

mercibus suis pro 8 fl in prompta pecunia et in permutatione pro 11, *B* vero dat 100 ℔ mercium suarum 4 fl carius in permutatione quam in prompta pecunia. Fac sic. Pone, quod *B* vendat 100 ℔ de suis in prompta pecunia pro 1 φ, quare in permutatione dat 100 ℔ pro 1 $\varphi + 4$. Disponam has quantitates cum duabus prioribus ad regulam de tri, et veniet talis ordo:

$$\begin{matrix} 8 & 11 \\ 1\,\varphi & 1\,\varphi + 4 \end{matrix}$$

Multiplicando, ut solet, has quantitates contradictorie, et proveniunt ex vna parte 11 φ et ex altera parte 8 φ + 32 ø. Hec ex uerbo regule de tri sunt equalia. Subtraham utrumque (ex utraque) 8 φ, et manent ex vna parte 3 φ equales 32 ø. Diuide (ø per φ), et proveniunt $10\frac{2}{3}$, valor φ, et pro tot fl dat 100 ℔ in prompta pecunia, in permutacione pro $14 + \frac{2}{3}$, quod fuit propositum[6]).

Quidam conuenit quendam ad laborandum per 40 dies continuos tali pacto, quod omni die, quo laboraret, daret ei 7 ₰, et quolibet die, quo non laboraret, restituet 5 ₰. Modo tempore completo nil mercedis obtinuit. Queritur, quot diebus laborauit, et quot vacauit. Fac sic. Pone eum laborasse ad 1 φ, quare vacauit ad 40 — 1 φ. Ex casu quolibet die, quo laborauit, meruit 7 ₰, quare 1 φ per 7 multiplica, et erunt 7 φ, et 40 dies ocij — 1 φ per 5 multiplica, et erunt 200 — 5 φ, que ex ypothesi equiualent. Restaura ubique 5 φ addendo, et stabunt 12 φ ex vna parte equales ex altera parte 200 ø, quare iuxta primi capituli preceptum operare, et patet valor φ, scilicet laborauit 16 diebus $\frac{2}{3}$, vacauit ad 23 dies et $\frac{1}{3}$, meruit $116\frac{2}{3}$, et tantum opportuit (!) ipsum restituere[7]). Bl. 355.

A, B, C. *A* dicit ad *B* (et *C*): si haberem 7 fl de pecunia vestra, haberem in triplo plus quam vos ambo. *B* dicit ad *A* (et) *C*: si haberem 9 fl de pecunia vestra, haberem in quadruplo plus quam vos ambo. *C* dicit ad *A* (et *B*): si haberem 11 fl de pecunia vestra, tunc haberem in quintuplo plus quam vos ambo. Queritur, quantum quilibet habuit. Fac sic. Pone omnes simul habere 1 φ, et quia *A* dicit se in triplo plus habere quam alij, si darent ei 7 de suis, dico, quod habuit $\frac{3}{4}\,\varphi - 7$. Hoc autem ita invenio. Statuo proportionem hanc in minimis suis terminis, et Bl. 354.

6) Berlet hat diese Aufgabe nicht aufgenommen. In der Marienberger Handschrift steht sie auf S. 140.

7) Berlet hat diese Aufgabe ausgelassen. Im Marienberger Manuskript findet sie sich auf S. 149.

ducem illius proportionis recipiam pro numeratore, aggregatum vero ex duce et comite scribo pro denominatore, et a tota minucia subtraham defectum cuiuslibet numeri, videlicet quod optat ab alijs, vt hic primus petit 7, et erit ipsius triplus. Ponam proportionem triplam in minimis suis terminis, ut sunt hij $\frac{3}{1}$, ternariam retineam pro numeratore, deinde addo comitem et ducem, (et proveniunt 4), que seruo pro denominatore, habeo ergo talem minuciam, scilicet $\frac{3}{4}$, a qua subtraham 7, et manent $\frac{3}{4}$ (ꝙ) — 7, que assertio (!) primo. Eodem modo operando invenio, quod B habuit $\frac{4}{5}$ ꝙ — 9 et $C \frac{5}{6}$ ꝙ — 11. Aggrega has partes, et proveniunt 2 + $\frac{23}{60}$ ꝙ — 27, hoc aggregatum ex ypothesi est equale 1 ꝙ, quia dixit omnes simul habere 1 ꝙ. Addo utrobique 27, subtrahendo ab aggregatis 1 ꝙ, et remane(n)t ex vna parte $\frac{23}{60}$ ꝙ $\left(1 \frac{23}{60}\right.$ ꝙ$\left.\right)$ equales 27 ø ex altera parte. Diuide ø per ꝙ, et proveniunt $19 \frac{44}{83} \left(19 \frac{43}{83}\right)$, ꝙ valor, et tantum habent omnes simul. Sed quia positum est supra, quod A habeat $\frac{3}{4}$ ꝙ — 7, $B \frac{4}{5}$ ꝙ — 9, $C \frac{5}{6}$ ꝙ — 11, habet A necessario $7 \frac{53}{83}$, $B\ 6 \frac{51}{83}$, $C\ 5 \frac{23}{83} \left(5 \frac{22}{83}\right)$[8]).

Bl. 355. Quidam habuit pueros et denarios et dixit: si cuilibet do 2 ₰, manent in residuo 5 denarij, si autem cuilibet do 3 ₰, deficio in 6 ₰. Queritur quot sint denarij, et quot sint pueri. Fac sic. Pone ø puerorum 1 ꝙ et da cuilibet 2, scilicet multiplicando 1 ꝙ per 2, et erunt 2 ꝙ, et quia debet habundare in 5 denarijs, erunt ergo 2 ꝙ + 5. Pone secundo iterum ø puerorum 1 ꝙ et da cuilibet 3 ₰, scilicet multiplicando 1 ꝙ per 3, et erunt 3 ꝙ. Sed quia debent 6 deficere, subtrahe 6, et erunt 3 ꝙ — 6. Et primo ponebatur, quod puerorum ø esset 2 ꝙ + 5 (!). Equa partes addendo 3 ꝙ 6 ø. Adde etiam ad 2 ꝙ (+ 5 ø) 6 ø, et erunt 2 ꝙ + 11 ø in vna parte, in alia parte 3 ꝙ. Subtrahe iterum 2 ꝙ ubilibet, et manet 1 ꝙ equalis 11 ø. Fac secundum regulam[9]).

Bl. 355'. Item quis est ø, cuius $\frac{1}{5}$ ducta in $\frac{2}{7}$ facit 13. Dico, quod ille ø est 1 ꝙ, cuius $\frac{1}{5}$ ducta in $\frac{2}{7}$ facit $\frac{2}{35}$ ʒ equales 13 ø. Diuidatur ergo ø per ʒ, et veniunt $\frac{455}{2}$, cuius radix quadrata ostendit quesitum. Et quia est surdum, quadretur quelibet pars, scilicet $\frac{1}{5}$ et $\frac{2}{7}$, facit $\frac{1}{25}$ prima et

8) Diese Aufgabe fehlt im Marienberger Manuskript.

9) Diese Aufgabe hat Riese weggelassen.

$\frac{4}{49}$ secunda, ducatur $\frac{1}{25}$ de $\frac{455}{2}$ in $\frac{2}{49}\left(\frac{4}{49}\right)$ eiusdem numeri, scilicet $\frac{455}{2}$, et radix quadrata producti valet 13, quod fuit probandum.

Item posito, quod diameter alicuius quadrati altera parte longioris sit 10 et latus longius 8. Queritur de quantitate lateris breuioris. Pone, quod latus ignotum, scilicet minus, sit 1 φ, quam in se multiplica, et provenit 1 ʒ. Multiplica etiam latus longius in se, scilicet 8, et erunt 64, que due multiplicationes simul addantur, facit 1 ʒ + 64 ø equales (!) multiplicacioni diametri in se, scilicet 100 ø. Quia uero idem genus denominationis pro utraque parte stare non debet, subtrahantur ergo 64 ø ab 1 ʒ per deletionem signi auctiui, sic et de 100 ø, et remanent 36 ø equales 1 ʒ. Procedatur ergo secundum regulam secundam, et veniunt 6, valor rei uel φ.

Item sunt duo socij, primus habet 20 ℔ piperis, secundus 20 ℔ cinoberis. Primus dat aliquot ℔ pro fl, secundus autem 5 plus pro fl quam primus. Venditis autem istis simul invenerunt 8 fl, capitale et lucrum. Queritur, quantum primus det pro fl et quantum secundus. Fac sic. Pone primum dedisse 1 φ pro fl, quare secundus dabit 1 φ + 5 pro fl. Examina utrumque secundum proportionum regulam sic: 1 φ dat 1 fl, quid dant 20? Et provenit $\frac{20}{1}$ φ. Deinde dic: 1 φ + 5 dant 1 fl, quid dant 20? Et provenit $\frac{20}{1\,φ+5}$. Quas modo minuciarum adde, et provenient $\frac{40\,φ + 100\,ø}{1\,ʒ + 5\,φ}$ equales 8. Jam constat, quod numerator est denominatori octuplus, quare denominatorem per 8 multiplica, et erunt 8 ʒ + 40 φ equales 40 φ + 100 ø. Jam age secundum capitulum, et patet valor φ, scilicet radix de $12\frac{1}{2}$.

Detur ø, qui in se ipsum multiplicatus uel sibi ipsi additus tantundem proveniat. Fac sic. Pone (numerum) esse 1 φ, hanc adde ad se ipsum (!), et erit 2 φ, hanc secundo multiplica in se, et fiet 1 ʒ. Modo iuxta regulam operando φ per ʒ committendo veniet $\frac{2}{1}$. [Bl. 356.]

Dentur duo ø in proportione sesquitercia, qui siue inuicem ducantur siue vnus ab alio subtrahatur, idem proveniat. Fac sic. Pone, quod minor ø sit 1 φ (3 φ), quare maior erit 4 φ. Jam subtrahe, scilicet minorem a maiore, et manet 1 φ. Deinde ducatur vnus in alium, et erit 12 ʒ. Jam iuxta terciam regulam operando patet valor φ, scilicet $\frac{1}{12}$. Primum posui esse 3 (φ), quare erunt $\frac{3}{12}$, secundus erit $\frac{1}{3}$, primus $\frac{1}{4}$.

Item est quoddam quadratum equilaterum rectangulum, cuius quatuor latera simul iuncta faciunt $\frac{2}{5}$ ipsius eiusdem aree. Queritur, quantum est

vnumquodque latus. Pone, quod latus vnum sit 1 φ, quam si in se ipsam multiplicaueris, provenit 1 $\mathfrak{z}$, prioris scilicet quadrati area, cuius $\frac{2}{5}$ sunt $\frac{2}{5}$ $\mathfrak{z}$. Addantur etiam simul quatuor latera eiusdem quadrati, et erunt quatuor φ equales $\frac{2}{5}$ $\mathfrak{z}$. Et quia perventum est ad regulam terciam, quare secundum preceptum eius 4 φ per $\frac{2}{5}$ $\mathfrak{z}$ diuidantur, et veniunt 10, valor φ.

Item sunt tres socij *A, B, C,* quorum primus habet 64 ℔ muscati, secundus 64 ℔ lauri, tercius uero 64 ℔ gariophali, et secundus, scilicet *B,* semper quintuplo plus dat pro 1 fl quam *A, C* uero tantum, quantum *A* dat pro 1 fl, et superlucrati sunt vna cum capitali summa 100 fl. Queritur ergo, quot quilibet ℔ pro 1 fl dare debet. Fac sic et pone, quod *A* det 1 φ pro 1 fl, quare *B* 5 φ dabit pro 1 fl et *C* etiam 1 φ, quia tantum, quantum *A*. Examinando quodlibet seorsum secundum regulam proportionum dicendo $\left\{\begin{matrix}1\\5\\1\end{matrix}\right\}$ φ dat 1 fl, quid 64? Facit $\left\{\begin{matrix}A - \frac{64}{1\,\varphi}\\ B - \frac{64}{5\,\varphi}\\ C - \frac{64}{1\,\varphi}\end{matrix}\right.$ Que omnia simul addantur, facit aggregatum $\frac{704\,\varphi}{5\,\mathfrak{z}}$ equale 100. Et quia numerator est centuplus ad denominatorem, quare denominator per 100 multiplicetur, et veniunt 500 $\mathfrak{z}$ equales 704 φ. Diuidatur ergo iuxta preceptum tercie regule φ per $\mathfrak{z}$, et quociens, scilicet $\frac{704}{500}$, est valor φ, tantum ergo primus, scilicet *A,* dat pro 1 fl et totidem *C,* et quilibet mercatur 45 fl $\frac{5}{11}$. Secundus uero, scilicet *B,* quia quintuplum plus dat pro 1 fl, quare valor φ, scilicet $\frac{704}{500}$, per 5 multiplicatur, et veniunt $\frac{3520}{500}$, tot ergo ℔ *B* dat pro 1 fl, quare 64 ℔ ipsius *B* valent 9 fl $\frac{1}{11}$. Que omnia simul collecta faciunt precise 100 fl, quod fuit probandum.

Bl. 357. Item est quiddam (!) quadratum altera parte longius, cuius 4 latera simul iuncta cum area faciunt aggregatum 76, et posito, quod latus vnum, scilicet longius, addat 2 super breuius. Quesitur ergo, quantum sit vnumquodque latus eiusdem, et quanta sit area. Pone, quod latus breuius sit 1 φ, erit ergo latus longius 1 φ + 2. Ducatur ergo latus vnum in aliud uel 1 φ in 1 φ + 2, et producuntur 1 $\mathfrak{z}$ + 2 φ, scilicet quantitas aree, cui 4 latera addantur, et erit aggregatum 1 $\mathfrak{z}$ + 6 φ + 4 ø equales (!) 76 ex ypothesi. Restaurando igitur 4 ø ex utraque parte subtrahantur,

et remanent 1 ʒ + 6 ℞ ex vna parte equales 72 ø ex alia parte. Quare iuxta preceptum quarte regule procedatur, et veniunt 6, valor rei scilicet et quantitas lateris minoris, quare maius est 8 et area 48, quod fuit quesitum.

Item sunt duo socij, quorum unus alteri 100 concedit fl ad duos annos pro lucro et lucri lucro. Quibus elapsis alter illi 144 restituit fl, capitale scilicet et lucrum et lucri lucrum. Queritur, quantum 100 fl fecerunt lucrum in primo anno. Procede sic et pone lucrum primi anni 1 ℞, et quia 100 fl primo anno lucrati sunt 1 ℞, quare ultra procede secundum regulam proportionum dicendo: 100 fl lucrati sunt 1 ℞, quid ergo lucrantur 100 fl + 1 ℞ in secundo anno? Operare secundum regulam, et provenit illa quantitas $\frac{100\,℞ + 1\,ʒ}{100}$, lucrum scilicet secundi anni, cui lucrum primi anni addatur, et erit aggregatum $\frac{200\,℞ + 1\,ʒ}{100}$ equale 44. Multiplicetur ergo denominator, scilicet 100, per 44, proveniunt 4400 equale(!) suo numeratori. Et quia ℞ + ʒ assimilantur ø, quare procedatur secundum preceptum quarte regule, et veniunt 20, valor ℞.

Item sunt duo socij, quorum unus 120 ℔ habet florum muscati, alter vero totidem habet ℔ cinamomi, et primus semper 6 plus dat pro 1 fl quam secundus, et ambo mercantur 35 (42) fl. Queritur primo, quot quilibet ℔ dat pro 1 fl et secundo, quot quilibet ex 120 ℔ mercatur fl. Operare sic et pone, quod primus dat 1 ℞ pro 1 fl, quare secundus 1 ℞ — 6 dabit pro 1 fl. Utrumque ergo, per regulam proportionum examinatur dicendo: 1 ℞ valet 1 fl, quot 120? Facit $\frac{120}{1\,℞}$. Et iterum 1 ℞ — 6 valet 1 fl, quot 120? Facit $\frac{120}{1\,℞ - 6}$. Et quia amborum lucra simul iuncta 42 vale(n)t fl, addantur ergo simul, et erit aggregatum $\frac{240\,℞ - 720\,ø}{1\,ʒ - 6\,℞}$ equale 42. Multiplicatur ergo denominatorem per 42, et erit 42 ʒ — 252 ℞ equales(!) suo numeratori, scilicet 240 ℞ — 720 ø. Restaurantur ex utraque parte, proveniunt ex vna parte 42 ʒ + 720 ø equale(!) 492 ℞ ex altera parte. Et quia iam peruentum est ad quintam regulam, fiat ergo operacio iuxta preceptum eiusdem, et veniunt 10, valor ℞, tot ergo primus ℔ dat pro 1 fl, quare 120 ℔ 12 valent fl. Secundus autem 6 minus, ergo 4 ℔ dat pro 1 fl, et sic 120 ℔ 30 valent fl, que simul addita, 30 scilicet et 12, precise 44 (42) faciunt fl, quod fuit probandum. Bl. 358.

Propositis duobus numeris, scilicet 9 + 12, si petitur ad quemlibet tercium, puta 10, aliquem numerum maiorem, cuius quidem maioris $\frac{1}{4}$ subtracta de primis duobus, scilicet 9 + 12, residuum (residua) habea(n)t eandem proportionem quam numeri (10 et numerus) nunc ultimo inventi Bl. 357'.

(inventus). Fac sic. Pone, quod ø inveniendus sit 1 φ, cuius quarta pars est $\frac{1}{4}$ φ, quam subtraham de 9 + 12, eruntque residua 9 — $\frac{1}{4}$ φ 12 — $\frac{1}{4}$ (φ), que ex ypothesi habebunt eandem proportionem ad invicem quam 10 ad 1 φ. Ponam ergo ad formam regule proportionum sic

9 — $\frac{1}{4}$ φ	12 — $\frac{1}{4}$ φ
10	1 φ.

Sed quia secundum eandem id, quod provenit ex ductu primi in quartum, equum est ei, quod provenit ex ductu secundi in tercium, erunt 9 φ — $\frac{1}{4}$ ʒ ex vna parte equales 120 ø — $\frac{10}{4}$ φ ex alia parte. Addam utrobique defectum, et emergunt hic quidem 11 $\frac{1}{4}$ φ, illic vero 120 + $\frac{1}{4}$ ʒ, aduc equalia. Integrabo ʒ multiplicando omnia per 4, et proveniunt 46 φ ex vna parte equales 480 ø + $\frac{1}{1}$ ʒ ex alia parte. Nunc ergo iuxta quintam regulam omnia per ʒ diuidantur, et manent ut sunt, φ mediatur, et manent 23, hoc in se ducatur, et proveniunt 529, ab hoc producto subtraham ø, scilicet 480, et erit residuum 49, huius subtraham radicem quadratam a medietate φ, scilicet 23, et manent 16, qui est valor φ siue maior numerus respectu 10 quesitus, cuius quartam partem, scilicet 4, aufero a 9 + 12, et manent 5 + 8 habentes eandem proportionem, quam 10 + 16, quia ubique est dupla [proportio supertriparciens quintas].[10])

Bl. 359. Item est quoddam quadratum rectangulum altera parte longius, cuius duo latera simul iuncta sunt 14, area vero 48. Queritur, quantum est vnumquodque latus. Operare sic et pone, quod latus 1 sit 1 φ, quare reliquum erit 14 — 1 φ. Ducatur ergo vnum latus in reliquum; et proveniunt 14 φ — 1 ʒ equales 48 ø, et restaurantur(!) et restauratione facta relinquuntur 48 ø + 1 ʒ ex vna parte et 14 φ ex opposita parte, et sic perventum est ad quintam regulam, ubi scilicet ø et ʒ assimilantur φ, fiat ergo processus secundum preceptum eiusdem, et veniunt 6, valor φ.

Item radix anguli $a \cdot b$ cum angulo $a \cdot c$ valent 168. Queritur de quantitate vniuscuiusque angulorum duarum linearum se intersecantium. Operare sic et pone, quod radix anguli $a \cdot b$ sit 1 φ, quam si in se ipsam multiplicaueris, erit totus angulus $a \cdot b$ 1 ʒ. Et residuum ergo, scilicet angulus $a \cdot c$, cum angulo $a \cdot b$ duos rectos angulos constituens, erit 180 — 1 ʒ, cui cum radix anguli $a \cdot b$ additur, scilicet 1 φ, erit aggre-

10) Was in der eckigen Klammer steht, hat WIDMANN später mit anderer Tinte hinzugefügt.

gatum 1 ℞ + 180 ø — 1 ʒ equale radici anguli $a \cdot b$ cum angulo $a \cdot c$, scilicet 168. Restauratur ergo ʒ, et remanent ex vna parte 1 ℞ + 180 ø equale(!) 168 ø + 1 ʒ, adhuc inter se equalia. Et quia idem genus denominacionis pro utraque parte stare non debet, subtrahantur ergo 168 ø ex utraque parte, remanent ex vna parte 1 ℞ + 12 ø equale(!) 1 ʒ. Et quia iam perventum est ad regulam sextam, quare secundum preceptum eiusdem procedatur, et veniunt 4, valor ℞ et radix anguli $a \cdot b$, erit ergo totus angulus 16, angulus uero $a \cdot c$ 164, quod fuit quesitum.

b a
16
164 164
16
d c

Item sunt tres socij, scilicet A, B, C, quorum quilibet certam pecuniarum habet summam. Dicit C: A quidem duplo plus habet quam ego, B uero triplum est ad me, et cum quilibet eorum partem abiecerit, puta A 2 et B 3, et residuum vnius si ductum fuerit in residuum alterius, proveniunt 24. Queritur ergo, quod(!) quilibet eorum habuit, scilicet A et B, et quot ego. Fac sic et pone, quod C habet 1 ℞, habebit ergo A 2 ℞, quia duplum ad C, et B 3 ℞, quia triplum. Et quia quilibet eorum partem abicit, ut A 2 et B 3, habebit ergo A 2 ℞ — 2 et B 3 ℞ — 3, que secundum tenorem propositionis in se invicem ducta faciunt 6 ʒ + 6 ø — 12 ℞ equale(!) 24. Restaurando addantur ex utraque parte 12 ℞, et fiunt 6 ʒ + 6 ø ex vna parte et 24 ø + 12 ℞ ex alia parte, adhuc inter se equalia. Quia uero idem genus et cetera. Subtrahantur ergo ex utraque 6 ø, et remanent 18 ø + 12 ℞ equale(!) scilicet 6 ʒ. Et quia iam peruentum est ad sextam regulam, ubi ø + ℞ assimilantur ʒ, quare iuxta preceptum eiusdem procedatur, et veniunt 3, valor ℞ et summa, quam habuit C, habet ergo A 6 et B 9.

Item sunt tres socij, quorum quilibet 80 habet ℔ croci, primus bonum, secundus meliorem et tercius optimum, qui in triplo tantum dat pro 1 fl, quantum secundus et secundus duplo tantum, quantum primus, et omnes tres 100 mercantur fl. Queritur, quantum quilibet dat pro 1 fl. Pone, quod primus det 1 ℞ pro 1 fl, secundus 2 ℞ pro 1 fl, quia duplum tantum, quantum primus, tercius uero 6 ℞, quia triplum tantum, quantum secundus pro 1 fl. Examinantur(!) ergo secundum regulam proportionum, quantum cuiuslibet 80 valent ℔ Bl. 360'.

$$\text{dicendo} \left\{\begin{matrix} 1\text{ ℞} \\ 2\text{ ℞} \\ 3\text{ ℞} \end{matrix}\right\} \text{ dant 1 fl, quid 8(0)? Facit } \left\{\begin{matrix} \frac{80}{1\text{ ℞}} \\ \frac{80}{2\text{ ℞}} \\ \frac{80}{6\text{ ℞}} \end{matrix}\right.$$

que simul addantur, et erit aggregatum $\frac{1600\,ʒ}{12\,ce}$ equale 100. Quia uero

numerator centuplus est ad denominatorem, quare denominator per 100 multiplicetur, et erunt 1200 ce equales 1600 ʒ. Diuidatur ergo secundum preceptum septime regule ʒ per ce, et exibunt $\frac{4}{3}$, valor φ, tantum ergo, scilicet $\frac{4}{3}$ ßr, primus dat pro 1 fl et mercatur 60 fl, secundus $\frac{8}{3}$ pro fl et mercatur 30 fl, tercius uero $\frac{24}{3}$, id est 8 ßr, pro 1 fl et mercatur 10 fl. Qui omnes simul collecti faciunt precise 100 fl, quod fuit probandum.

Item quis est ce tantum valens, quantum 6 eius quadrati. Operare sic et pone, quod ille ce sit 1 ce, et quia tantum valet, quantum 6 eius quadrati, valet 6 ʒ, et sic 1 ce assimilatur 6 ʒ. Quare procedatur secundum preceptum regule septime, ubi ce assimilatur ʒ. Minus, scilicet ʒ, per maius diuidatur, et patet radix eiusdem cubi, scilicet 6, cuius quadratus vnus est 36, quorum 6 tantum valent, quantum ce eiusdem radicis, quod fuit quesitum, scilicet 216.

Item est quoddam corpus cubicum tantum valens, quantum 16 eius latera simul iuncta. Queritur de quantitate eiusdem corporis cubici, et quantum sit vnumquodque eius latus. Pone, quod latus vnum sit 1 φ, quod cubicetur, et erit 1 ce tantum valens, quantum 16 latera eius. Multiplicatur ergo latus, scilicet 1 φ, per 16, et erunt 16 φ equales 1 ce. Et quia iam peruentum est ad octauam regulam, ubi φ assimilatur ce, quare iuxta preceptum eiusdem procedendo veniunt 4, valor scilicet 1 φ uel lateris vnius, quorum 16 faciunt tantum, quantum cubicum corpus eiusdem, scilicet 64. Est ergo 1 latus 4 et quantitas corporis cubici 64, quod fuit quesitum.

Bl. 361. Item sunt tres quadrati in continua proportione quadrupla, quorum latus minoris ductum in quemlibet quadratum maiorem et producta simul collecta faciunt 160. Queritur de quantitate lateris minoris quadrati et consequenter de quantitate vniuscuiusque quadrati seorsum. Operare sic et pone, quod latus 1 minoris quadrati sit 1 φ, erit ergo quadratus eius et minor 1 ʒ, quare secundus 4 ʒ et tercius 16 ʒ, quia in continua proportione quadrupla. Et quia latus minoris ductum in quemlibet maiorem et producta simul iuncta faciunt 160, ducatur ergo 1 φ in 4 ʒ, et erunt 4 ce. Ducatur etiam idem latus, scilicet 1 φ in 16 ʒ, et erunt 16 ce. Producta simul collecta faciunt 20 ce equales 160 ø. Quia uero iam perventum est ad regulam 9, ubi ø assimilatur ce, procedatur ergo secundum preceptum regule, et veniunt 2, valor scilicet φ et lateris minoris, quare quadratus minor 4, medius 16, tercius autem 64, qui multiplicati per latus minoris et producta simul collecta faciunt 160, quod fuit probandum.

Item qui(!) sunt tres quadrati, qui cum suis 4 ce tantum ualent,

quantum tria latera vnius quadratì multiplicata per 15. Queritur de quantitate lateris vnius quadrati. Operare sic et pone, quod illi tres quadrati sint 3 ʒ, quibus adde 4 ce, et erunt 3ʒ + 4 ce equales 3 lateribus per 15 multiplicatis, id est 45 φ. Et quia peruentum est ad decimam regulam, ubi φ assimilatur ʒ + ce, quare iuxta preceptum eiusdem procedendo veniunt 3, valor rei scilicet et vnius quadrati latus, erit ergo vnus quadratus 9, quare tres 27, et vnus ce eciam valet 27, valent ergo 4 ce 108, qui tribus quadratis iuncti tantum valent, quantum 3 latera per 15 multiplicata, scilicet 135, quod fuit quesitum.

Item sunt 14 quadrati, qui tantum valent, quantum 2 latera vnius quadrati in tres eiusdem lateris quadratos mulitiplicata cum additione 4 laterum. Queritur de quantitate lateris vnius quadrati. Procede sic et pone, quod latus vnius quadrati sit 1 φ, quam in se multiplica, erit 1 ʒ, qui multiplicatur per 14, et erunt 14ʒ equales 2 lateribus in tres quadratos ductis. Ponantur illa duo latera 2 φ, que duca(n)tur in 3 quadratos, id est 3ʒ, et erunt 6 ce, quibus addantur 4 latera, id est 4 φ, et erit aggregatum 6 ce + 4 φ, que equantur 14ʒ. Et quia iam perventum est ad undecimam regulam, quare iuxta preceptum eiusdem operare, et veniunt 2, valor rei id est vnius lateris, quare vnus quadratus erit 4 et 14 56, qui tantum valent, quantum 2 latera, id est 4, in tres quadratos, id est 12, ducta 4 lateribus iunctis, quod fuit probandum. Bl. 361'.

Item est quoddam productum ex duobus lateribus in 4 quadratos, quod tantum valet, quantum partium multiplicantium producta, quorum, maior, scilicet quadratorum, per 5, altera uero et minor, scilicet laterum. per 6 multiplicata simul collecta. Queritur de quantitate vnius lateris Procede sic et pone, quod latus vnius quadrati sit 1 φ, erit ergo quadratus eius 1ʒ, et quia propositum est, quod 2 latera ducta in 4 quadratos, quare 1 φ multiplicetur per 2 et 1ʒ per 4, et erunt 2 φ + 4ʒ, que secundum tenorem propositionis in se inuicem multiplicata faciunt 8 ce equales aggregati(!) ex multiplicatione partium prodictorum, maioris, scilicet quadratorum, per 5 et minoris per 6, erunt 12 φ + 20ʒ equales 8 ce. Et quia iam peruentum est ad regulam duodecimam, ubi φ + ʒ assimilantur ce, fiat ergo processus secundum preceptum eius, et veniunt 3, valor scilicet vnius lateris.

Item multiplicaui 2 latera quadrati in 2 quadratos, et proveniebant 4 ce equales multiplicationi vnius quadrati in se ipsum. Queritur de quantitate vnius lateris quadrati. Pone, quod vnum latus sit 1 φ, quam in se ipsam multiplica, et proveniet 1ʒ, scilicet 1 φ quadratus. Et quia 2 latera quadrati secundum tenorem propositionis multiplicata in 2 quadratos sunt equales multiplicationi vnius quadrati in se ipsum, quare quodlibet eorum, scilicet 1 φ + 1ʒ, per 2 multiplicatur, et erunt 2 φ + 2ʒ, que Bl. 362.

in se invicem multiplicata producunt 4 ce equales multiplicacioni vnius quadrati in se ipsum. Ducatur ergo 1 ʒ in se, et erit 1 ʒʒ equales(!) 4 ce. Modo iuxta preceptum regule tredecime ce per ʒʒ diuidatur, et quociens, scilicet 4, ostendit valorem rei, scilicet quantitatem vnius lateris.

Item sunt 2 latera, que cum in 3 eius ce multiplicata fuerint, producunt 6 ʒʒ equales 24 quadratis. Queritur de quantitate vnius lateris quadrati. Pone, quod vnum latus sit 1 φ, erit ergo eius quadratus 1 ʒ. Quia uero dictum est, quod productum ex duobus lateribus in 3 ce tantum valet, quantum 24 quadrati, multiplicatur ergo 1 φ per 2 et 1 ce per 3, et erunt 2 φ + 3 ce, que in se invicem ducta pro(ducunt) 6 ʒʒ equales 24 ʒ. Et quia iam peruentum est ad quartam decimam regulam, quare (iuxta) preceptum eiusdem procedendo veniunt 2, valor scilicet vnius lateris.

Bl. 362'. Item sunt duo quadrati, quorum maior est nonuplus ad radicem quadrati minoris, minor uero duplusuperbiparciens tercias ad latus quadrati maioris. Queritur de quantitate laterum vniuscuiusque quadrati et consequenter de quantitate quadratorum. Operare sic et pone, quod latus minoris quadrati sit 1 φ, que in se multiplicata producit 1 ʒ, quadratum scilicet minorem. Et quia quadratus maior iuxta tenorem propositionis est nonuplus ad latus minoris, erit ergo quadratus maior 9 φ, cuius radix est • 9 φ, et quia quadratus minor, scilicet 1 ʒ, est duplusuperbiparciens tercias ad latus maioris quadrati, multiplicatur • 9 φ, scilicet latus maioris quadrati, per denominationem proportionis eorum ad inuicem, scilicet $2\frac{2}{3}$, et proveniunt $\frac{576}{9}$ φ, cuius radix quadrata est equalis 1 ʒ. Sed quia $\frac{576}{9}$ (φ) non habet radicem, quia est surdum, quadrentur ergo quantitates ex utraque parte in equacione posite, vnum per delecionem puncti et alterum in se multiplicando, et proveniunt $\frac{576}{9}$ φ et 1 ʒʒ inter se equalia. Fiat ergo processus iuxta preceptum quinte decime regule, ubi φ assimilatur ʒʒ, et veniunt 4, valor scilicet lateris quadrati minoris, cuius quadratus est 16 duplus superbiparciens tercias ad latus quadrati maioris. Diuidatur ergo quadratus minor per denominationem proportionis ad latus maioris, et proueniunt in quociente 6, quantitas scilicet lateris quadrati maioris, quod in se multiplicatum facit 36, scilicet quadratum maiorem, qui est nonuplus ad latus quadrati minoris, scilicet ad 4, quod fuit quesitum.

Item productum ex tribus lateribus in 4 quadratos additum producto vnius quadrati in se ipsum equum est ei, quod provenit ex multiplicatione 9 in 5 quadratos. Queritur de quantitate lateris vnius quadrati. Pone, quod latus vnum sit 1 φ, erit ergo quadratus eius 1 ʒ, et quia dictum

est in propositione, 3 latera quadrati in 4 quadratos ducta et productum additum multiplicationi vnius quadrati in se ipsum equum est ei, quod provenit ex ductu 5 quadratorum in 9, sunt ergo ista 3 latera 3 φ et 4 quadrati 4 ʓ, que in se invicem ducta proveniunt(!) 12 ce, qui multiplicationi vnius ʓ in se, id est 1 ʓʓ, additi facit(!) aggregatum 12 ce + 1 ʓʓ equale multiplicationi 5 quadratorum in 9, id est 45 ʓ. Et quia iam perventum est ad regulam 16, ubi scilicet ce + ʓʓ assimilantur ʓ, quare iuxta preceptum eiusdem procedatur, et veniunt 3, valor scilicet vnius lateris, erit ergo vnus quadratus 9.

Item aggregaui quadratum multiplicationi eiusdem in se, et erat aggregatum equale multiplicationi prioris quadrati in 4 eius latera — 7 quadratis. Queritur de quantitate lateris eiusdem quadrati. Operare sic et pone, quod latus illud sit 1 φ, erit ergo quadratus eius 1 ʓ, et quia secundum tenorem propositionis quadratus ille multiplicationi eius in se additus ducatur ergo 1 ʓ in se, et erit 1 ʓʓ, cui addatur 1 ʓ, et erit aggregatum 1 ʓʓ + 1 ʓ equale multiplicationi eiusdem quadrati in 6 eius latera, et quia 1 latus est 1 φ, erunt ergo 6 latera 6 φ, que in 1 ʓ ducte producunt 6 ce, et sic 1 ʓʓ + 1 ʓ equalis(!) 6 ce — 7 quadratis, id est 7 ʓ. Restaurantur ergo 7 ʓ ex utraque parte addendo, et proueniunt ex vna parte 1 ʓʓ + 8 ʓ equales 8 ce. Et quia iam peruentum est ad regulam septimam decimam, ubi ʓʓ + ʓ assimilantur ce, fiat ergo processus iuxta preceptum eiusdem, et veniunt 4, valor vnius lateris, quare 1 quadratus erit 16. *(Bl. 363.)*

Item est quadratus, qui in se ductus tantum valet, quantum tres cubi cum quadrati quadruplo iuncti. Queritur de quantitate lateris illius quadrati. Pone, quod illud latus sit 1 φ, cuius quadratus est 1 ʓ, qui in se ductus secundum tenorem propositionis procreat 1 ʓʓ tantum valens ex ypothesi, quantum 3 ce cum quadruplo prioris quadrati, id est cum 4 ʓ, erit ergo 1 ʓʓ equalis 3 ce + 4 ʓ. Et quia iam peruentum est ad octauam decimam regulam, ubi ce + ʓ assimilantur ʓʓ, quare iuxta preceptum regule procedendo veniunt 4, valor scilicet lateris quadrati.

Item est quadratus, qui tantum valet, quantum radix de 27 lateribus. *(Bl. 363'.)* Queritur de valore vnius lateris. Pone, quod latus sit 1 φ, cuius radix ..t • 1 φ, et quia mentio facta est in propositione de radice (de) 27 φ, rit ergo radix (de) 27 φ • 27 φ equale(!) vni quadrato, id est vni ʓ. Iam ..o perventum est ad regulam nonam decimam, ubi ʓ assimilatur radici φ. Procedatur ergo secundum preceptum eiusdem, et veniunt 3, ..r radicis vnius scilicet . φ, quare quadratus illis radicibus simul collectis alis erit 81(!), quod fuit propositum.

Item sunt 3 quadrati, qui cum simul aggregati tantum valent, quantum

radix quadrata de 36 quadratis simul iunctis. Queritur de valore vnius quadrati et radice eiusdem. Procede sic et pone, quod illi tres quadrati simul collecti sint 3 ʒ, qui sunt equales radici quadrate de 36 quadratis, quare 3 ʒ sunt equales • 36 ʒ. Et quia ʒ assimilatur • ʒ, quare iuxta preceptum vicesime regule fiat processus, et veniunt 2, radix quadrata(!) uel latus vnius quadrati, erit ergo vnus quadratus 4, et tres simul collecti 12 equale(!) radici quadrati(!) 36 quadratorum simul iunctorum, quod fuit propositum.

Bl. 364. Item sunt duo quadrati, quorum differencia est 24, et si radix vnius in radicem alterius ducta fuerit, illud, quod provenit, equale est 35 ø. Queritur de quantitate lateris vnius quadrati et minoris. Operare sic et pone, quod quadrati minoris latus sit 1 φ, erit ergo quadratus minor 1 ʒ. Et quia differencia quadratorum est 24, quare quadratus maior est 1 ʒ + 24, cuius radix est • 1 ʒ + 24. Ducatur ergo radix vnius in radicem alterius uel 1 φ in • 1 ʒ + 24, quadrando prius ex utraque parte, et erit ex vna parte 1 ʒ et ex alia parte 1 ʒ + 24, que in se inuicem ducta faciunt 1 ʒʒ + 24 ʒ equales 35 ø(!). Et quia prius partes sunt equale(s), per vniuscuiusque multiplicacionem in se equetur et ø in se multiplicando, et sic 1 ʒʒ + 24 ʒ sunt equales 1225 ø. Fiat ergo processus iuxta preceptum vicesime secunde regule, et veniunt 5, latus scilicet minoris quadrati.

PIERRE FERMATS STREIT MIT JOHN WALLIS,

EIN BEITRAG ZUR GESCHICHTE DER ZAHLENTHEORIE.

VON

GUSTAV WERTHEIM,

PROFESSOR AN DER REALSCHULE DER ISRAELITISCHEN GEMEINDE ZU FRANKFURT AM MAIN.

§. 1. Mutmafsliche Veranlassung des Streites.

Im Jahre 1655 war die *Arithmetica Infinitorum* von JOHN WALLIS[1]) erschienen, ein Werk, das auf rein rechnerischem Wege Quadraturen und Kubaturen ausführt, die vorher mehr durch geometrische Betrachtungen erstrebt worden waren[2]). PIERRE FERMAT[3]) erhielt ein Exemplar dieses Buches durch den englischen Edelmann KENELM DIGBY[4]) mit dem Ersuchen, sein Urteil über dasselbe abzugeben. Da DIGBY im Sommer 1656 in Toulouse war, also wahrscheinlich mit FERMAT persönlich verkehrte, so ist anzunehmen, dass er ihm das Exemplar selbst überreicht hat. FERMAT's Urteil über das Werk ist in dem Brief an DIGBY vom 20. April 1657 enthalten[5]). FERMAT legt dar, dafs er die von WALLIS erhaltenen Resultate über die Quadratur der Parabeln und der Hyperbeln schon viele Jahre vorher gefunden und dem TORRICELLI[6]) mitgeteilt habe. Hierauf und auf die Ausstellungen, die FERMAT an dem Werke macht, soll hier nicht ein-

---

1) JOHN WALLIS (1616—1703) studierte in Cambridge Theologie, war anfangs Prediger in London, wurde 1649 Professor der Geometrie in Oxford. Als KARL II. 1660 den Thron bestieg, ernannte er WALLIS, der ein treuer Anhänger KARL's I. gewesen war, zu seinem Kaplan.

2) Eine treffliche Würdigung der Vorzüge und Mängel dieser Schrift giebt CANTOR in seinen Vorlesungen Bd. II S. 822 u. flgde.

3) PIERRE FERMAT, einer der bedeutendsten französischen Mathematiker, wurde 1601 in Beaumont de Lomagne bei Toulouse als Sohn eines Lederhändlers geboren. Er studierte Jurisprudenz und wurde 1631 Parlamentsrat in Toulouse. Er starb 1663 in Castres, einem unweit Toulouse gelegenen Städtchen.

4) KENELM DIGBY, geboren 1603 in London, gestorben ebenda 1665, ältester Sohn des wegen Teilnahme an der Pulververschwörung hingerichteten Sir EVERARD DIGBY, stand in den politischen und religiösen Kämpfen, die sich in England abspielten, bald auf der einen, bald auf der anderen Seite und war deshalb öfters genötigt, England zu verlassen.

5) Brief IV des *Commercium epistolicum* von WALLIS. Die Parteien korrespondierten nicht direkt mit einander, sondern schrieben an DIGBY, der die Briefe der einen Partei der andern übermittelte. Für die Briefe aus und nach England diente dabei noch als Zwischenperson der englische Priester THOMAS WHITE.

6) EVANGELISTA TORRICELLI, geb. 1608 in Faenza, gest. 1647 in Florenz als Professor der Mathematik, der Erfinder des Barometers (1643).

gegangen werden. Ich will nur hervorheben, dafs die Darstellungsweise des WALLIS, der mehrfach von anderen bereits hergeleitete Sätze nochmals durch Induktion findet und dann, ohne einen Beweis zu versuchen, für allgemein gültig annimmt, dem an die Strenge der Alten gewöhnten FERMAT im höchsten Grade unsympathisch sein musste. Ferner gehörte WALLIS einem Volke an, dessen Beziehungen zu Frankreich grade damals — in Frankreich herrschte LUDWIG XIV., in England OLIVER CROMWELL — aus nationalen und religiösen Gründen äufserst gespannt waren. So erklärt es sich, dass FERMAT zu dem Entschluss kam, seine Kräfte mit WALLIS in einem Zweikampf zu messen, und es kann uns nicht wunder nehmen, dass er hierfür ein Gebiet wählte, auf welchem er sich besonders stark fühlte. Ich werde im Folgenden versuchen, diesen Kampf in seinen Hauptzügen und unter Beschränkung auf die gestellten zahlentheoretischen Aufgaben zu schildern.

§. 2. Die beiden ersten Aufgaben Fermat's und die Gegenaufgabe des Wallis.

Am 3. Januar 1657 erliess FERMAT folgende Herausforderung: „Dem WALLIS und den übrigen englischen Mathematikern wird folgende numerische Aufgabe gestellt:

1. Einen Kubus zu finden, der, wenn man ihn zur Summe seiner aliquoten Teile addiert, ein Quadrat giebt.

Ein solcher ist z. B. $343 = 7^3$; die aliquoten Teile dieser Zahl sind 1, 7, 49, und wenn man 343 zu ihrer Summe addiert, so erhält man $400 = 20^2$. Es wird ein anderer Kubus verlangt, welcher dieselbe Eigenschaft hat.

2. Man verlangt ebenso eine Quadratzahl, die, wenn man sie zur Summe ihrer aliquoten Teile addiert, einen Kubus giebt.

Ich erwarte die Lösung dieser Aufgaben. Wenn weder England, noch das belgische oder keltische Gallien sie liefert, so wird das narbonensische Gallien sie geben und dem Herrn DIGBY als Zeichen wachsender Freundschaft widmen."

Diese Herausforderung wurde durch WHITE dem Lord WILLIAM BROUNCKER[7]) in London übermittelt. BROUNCKER erhielt sie am 14. März und schickte sie gleich den folgenden Tag an WALLIS nach Oxford. In

7) Lord WILLIAM BROUNCKER (1620—1684) erhielt 1660 in Folge seiner Unterzeichnung der Erklärung englischer Grofsen zu Gunsten KARL's II. das Amt eines Kanzlers und Grofssiegelbewahrers der Königin. 1662 wurde er erster Präsident der *Royal Society*, in welche er als eins der ersten Mitglieder getreten war.

dem Begleitschreiben[8]) spricht er die Hoffnung aus, WALLIS werde die beiden Aufgaben, die schwieriger seien, als es auf den ersten Anblick scheine, schnell lösen und ihm die Lösung mitteilen.

WALLIS antwortete schon am 17. März[9]), die gestellten Aufgaben seien von der Natur der Aufgaben über vollkommene, überschiefsende und mangelhafte Zahlen[10]); er sei zur Zeit mit anderen Dingen beschäftigt, so dafs er sich der Sache nicht widmen könne. Für den Augenblick gebe er die Antwort, dafs die Zahl 1 beiden Aufgaben genüge. Er hatte trotzdem die Divisoren-Summen[11]) für einige der ersten Zahlen bestimmt und dabei gefunden, dafs sowohl $1 + 5 + 25$, als auch $1 + 2 + 4 + 8 + 16$ gleich 31 ist. Er stellte daraufhin die Gegenaufgabe:

Es sollen zwei Quadratzahlen (wie 16 und 25) von der Beschaffenheit bestimmt werden, dafs die Divisoren-Summe der einen gleich derjenigen der andern sei.

BROUNCKER hatte sich ebenfalls mit den beiden Aufgaben und mit einer inzwischen eingetroffenen dritten Aufgabe FERMAT's, von der weiterhin die Rede sein wird, beschäftigt und seine Lösungen in zwei englisch geschriebenen Briefen an FERMAT gesandt[12]). FERMAT, der der englischen Sprache unkundig war, liefs sich die Briefe von einem in Toulouse weilenden jungen Engländer übersetzen. Dieser war aber mit dem Gegenstande nicht vertraut, und daher wollte FERMAT kein sicheres Urteil über BROUNCKER's Lösungen abgeben. Er glaubte aber, BROUNCKER habe die Sache zu leicht genommen, und seine Lösungen seien ungenügend; in den Aufgaben werden Lösungen in ganzen Zahlen verlangt, nicht, wie BROUNCKER meine, in blofs rationalen Zahlen. Da BROUNCKER keine Abschrift seiner Briefe zurückbehalten hatte, so ist ihr Wortlaut nicht bekannt geworden. Ihr Inhalt ist in dem Briefe enthalten, den WALLIS am 7. Oktober 1657 an DIGBY geschrieben hat[13]). Danach hat BROUNCKER für die beiden ersten Aufgaben aufser der Zahl 1 auch noch die Brüche $\frac{1}{a^6}$ und für die erste Aufgabe auch $\frac{343}{a^6}$ angegeben, wo a jede ganze Zahl sein könne.

DIGBY hatte die FERMAT'schen Aufgaben auch dem in Paris am Münzamte angestellten BERNARD FRENICLE DE BESSY (1605—1675) gegeben, der, ohne Mathematiker zu sein, sich aus Liebhaberei mit Zahlentheorie

8) *Comm. ep.* I. 9) *Comm. ep.* II.

10) Eine Zahl heifst vollkommen, überschiefsend oder mangelhaft, je nachdem sie gleich der Summe ihrer aliquoten Teile oder kleiner oder gröfser als diese ist.

11) Die Divisoren-Summe umfafst sämtliche Divisoren, auch die Zahl selbst; bei der Summe der aliquoten Teile einer Zahl ist die Zahl selbst wegzulassen.

12) *Comm. ep.* XI. 13) *Comm. ep.* IX.

beschäftigte und in diesem Gebiet für ungemein tüchtig gehalten wurde[14]). Dafs, wie PAUL TANNERY (*Oeuvres de Fermat* II, p. 332) annimmt, FERMAT die Aufgaben dem FRENICLE auch direkt brieflich mitgeteilt habe, ist möglich, aber — wenigstens soweit die beiden ersten Aufgaben in Betracht kommen — nicht erwiesen. FRENICLE übergab dem Überbringer der Aufgaben sofort 4 Lösungen und sandte den nächsten Morgen weitere 6. Er behandelte dann beide Aufgaben und die Gegenaufgabe des WALLIS in einer besonderen Schrift, von der trotz vieler Bemühungen leider kein Exemplar aufzufinden ist. Der Titel ist nach WALLIS: *Solutio duorum problematum circa numeros cubos et quadratos, quae tanquam insolubilia universis Europae mathematicis a clarissimo viro* D. FERMAT *sunt proposita & a D. B. F. D. B.*[15]) *inventa. Parisiis apud* JOHANNEM LANGLOIS. 1657. Der Inhalt deckt sich ohne Zweifel mit dem, was WALLIS in seinem am 14. März 1658 an DIGBY gerichteten Briefe[16]) und später 1685 im vierten Kapitel (D. FERMATII *problemata de divisoribus et partibus aliquotis*) seiner Arbeit *De combinationibus, alternationibus et partibus aliquotis tractatus* veröffentlicht hat. Die Lösung der Aufgaben setzt die Bildung einer möglichst weitgehenden Tabelle für die Divisoren-Summe der Quadrat- und ebenso der Kubikzahlen voraus. Da die Divisoren-Summe des Produkts zweier teilerfremden Zahlen gleich dem Produkt der Divisoren-Summen der Faktoren ist, so sind in die Tabellen nur die Primzahlen und deren Potenzen aufzunehmen. In der letztgenannten Arbeit des WALLIS erstreckt sich die Tabelle für die Quadratzahlen bis 499, die für die Kuben bis 199. FRENICLE hatte jedenfalls viel weiter gehende Tabellen[17]). Eine Lösung der ersten FERMAT'schen Aufgabe wird danach auf folgende Weise erhalten: Nach der Tabelle ist die

Summe	der	Divisoren	von	5^3	gleich	$2^2 \cdot 3 \cdot 13$.
„	„	„	„	11^3	„	$2^3 \cdot 3 \cdot 61$.
„	„	„	„	13^3	„	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$.
„	„	„	„	27^3	„	$2^2 \cdot 11^2 \cdot 61$.
„	„	„	„	41^3	„	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29^2$.
„	„	„	„	47^3	„	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$.

14) Am 12. Dezember 1657 schreibt DIGBY an FERMAT (*Oeuvres de* FERMAT T. II. p. 362), FRENICLE wolle sich über nichts anderes mehr mit ihm unterhalten als über mystische Theologie und seine Gedanken über den freien Willen und die Vorausbestimmung; er gebe so den Rang eines der gröfsten Mathematiker des Jahrhunderts, den er einnehmen könnte, gegen den eines der unbedeutendsten Theologen auf.

15) Dominus BERNARD FRENICLE DE BESSY. 16) *Comm. ep.* XXIII.

17) Das spricht auch BROUNCKER in seinem Briefe an WALLIS vom 16. April 1658 aus. *Comm. ep.* XXX. Eine zweckmäfsig angeordnete Tabelle giebt EULER in seiner Arbeit: *De numeris amicabilibus (Comm. arithm.* I, S. 102).

Somit ist die Summe der Divisoren von $[5.\ 11.\ 13.\ 27.\ 41.\ 47]^3$ gleich $2^{16}.\ 3^4.\ 5^2.\ 7^2.\ 11^2.\ 13^2.\ 17^2.\ 29^2.\ 61^2$, d. h. es ist ein Kubus ermittelt, dessen Divisoren-Summe ein Quadrat ist.

Ähnlich sind die zweite Aufgabe und die Gegenaufgabe von WALLIS zu behandeln, von welcher letzteren FRENICLE eine grofse Anzahl Lösungen giebt[18]). Dafs man die Aufgaben auf diese Weise in Angriff zu nehmen habe, scheint WALLIS erst aus der Schrift des FRENICLE gelernt zu haben; er giebt auch vor dem 25. März 1658 keine Lösungen, die nicht schon FRENICLE gegeben hätte. Dafür reitet er aber fortgesetzt auf der Lösung 1 herum[19]) und sucht namentlich DIGBY, der zwar ein philosophisch gebildeter Mann aber kein Mathematiker war, weifszumachen, dafs er thatsächlich FERMAT's Forderungen erfüllt habe; denn FERMAT habe ausdrücklich nur eine Lösung (aufser 343) der ersten Aufgabe und überhaupt nur eine Lösung der zweiten Aufgabe verlangt, und eine solche (für beide Aufgaben 1) habe er gegeben. Ebenso verteidigt er die von BROUNCKER gegebenen wenig besseren Lösungen $\frac{343}{a^6}$ und $\frac{1}{a^6}$, in Betreff welcher er eine lebhafte Auseinandersetzung[20]) mit FRENICLE über die Frage hat, ob man bei einem Bruch überhaupt von aliquoten Teilen sprechen könne, und welches eventuell diese Teile seien.

Daneben betont er wiederholt, solche zahlentheoretische Aufgaben seien nicht wert, dafs man Zeit darauf verwende, und er mufs sich von FRENICLE (Brief vom 3. Febr. 1658)[21]) sagen lassen, er möge nicht Probleme, die er trotz vieler Bemühungen nicht lösen könne, für wertlos erklären, und es schicke sich für einen Professor der Mathematik am allerwenigsten, die Berechtigung einer wissenschaftlichen Thätigkeit nach ihrem praktischen Nutzen zu bemessen. Auch FERMAT spricht (Brief vom 7. April 1658) seine Verwunderung darüber aus[22]), dafs WALLIS fortfahre zu verachten, was er nicht verstehe. Übrigens scheint WALLIS mit seiner Lösung wenig Beifall bei seinen Fachgenossen gefunden zu haben. JOHANN BERNOULLI führt sie noch 40 Jahre später in seinem Briefe an LEIBNIZ vom 3. April 1697 als bekanntes Muster einer nichtssagenden Lösung an[23]).

§ 3. Die dritte Fermatsche Aufgabe.

Sobald FRENICLE die beiden von FERMAT gestellten Aufgaben gelöst hatte, scheint dieser die Sache, auf die er vielleicht von Anfang an kein

18) *Comm. ep.* XXXI. 19) *Comm. ep.* VII, XVI, XVIII, XXIII.
20) *Comm. ep.* XXII, XXIII. 21) *Comm. ep.* XXII.
22) *Comm. ep.* XXXVII.
23) LEIBNITII *et* BERNOULLII *Commercium philos. et math.* I, p. 263.

grofses Gewicht gelegt hatte, als erledigt angesehen zu haben. In der That war es leicht, auch wenn die Schrift von FRENICLE nicht das eingeschlagene Verfahren sondern nur die Resultate enthielt, diese letzteren zu analysieren und dadurch die Lösung zu erhalten. FERMAT stellte jetzt eine dritte Aufgabe, die ich ihrer grofsen Bedeutung[24]) wegen in wörtlicher Übersetzung folgen lasse:

„Es giebt kaum Jemand, der rein arithmetische Aufgaben stellt, kaum Jemand, der sie zu lösen versteht. Ist der Grund vielleicht der, dafs die Arithmetik bis heute mehr geometrisch als arithmetisch behandelt worden ist? Denn das ist in den meisten Werken der Fall, sowohl in denen der Alten wie in denen der Neueren, ja sogar im DIOPHANT, der sich doch weiter als die übrigen von der Geometrie entfernt hat, indem er seine Analyse auf die Betrachtung blofs rationaler Gröfsen beschränkte. Dafs aber dieses Gebiet auch nicht ganz von der Geometrie befreit ist, zeigen hinlänglich die *Zetetica* des VIETA, in denen DIOPHANT's Methode auf die stetige Gröfse, also auf die Geometrie ausgedehnt wird."

„Indessen hat die Arithmetik ein ihr eigenes Gebiet, die Theorie der ganzen Zahlen. Diese Theorie ist von EUKLID in seinen Elementen nur schwach skizziert und von seinen Nachfolgern nicht genügend ausgebaut (wofern sie nicht in denjenigen Büchern DIOPHANT's verborgen ist, deren uns die Ungunst der Zeit beraubt hat). Die Arithmetiker haben sie also zu entwickeln oder zu erneuern."

„Um den Weg zu erhellen, schlage ich ihnen vor, den folgenden Satz zu beweisen, resp. die in demselben enthaltene Aufgabe zu lösen. Wenn sie das fertig gebracht haben, werden sie mir zugeben, dafs Fragen dieser

---

24) Die Gleichung, deren Lösung den Gegenstand dieser Aufgabe bildet, wird bedauerlicher Weise noch immer nach dem Engländer PELL benannt, der sich durchaus kein Verdienst um dieselbe erworben hat (vergl. CANTOR, Vorlesungen II. S. 708). Noch in der neuesten (1894) Auflage der „Vorlesungen über Zahlentheorie" von P. G. LEJEUNE-DIRICHLET heifst es S. 201: „FERMAT hat diese Gleichung den Mathematikern zuerst vorgelegt, worauf ihre Lösung von dem Engländer PELL angegeben wurde." Auch die historischen Bemerkungen über die Gleichung, welche BACHMANN S. 189 seiner „Elemente der Zahlentheorie" in Anlehnung an GAUSS, *Disquisitiones* 202 giebt, sind nicht einwandfrei. Die falsche Benennung rührt, wie es scheint, von EULER her, der bei verschiedenen Gelegenheiten die Lösung der Gleichung PELL zuschreibt; so z. B. sagt er in seiner „Vollst. Anleitung zur Algebra" II. Teil II. Abschnitt 7. Kapitel: „Hierzu hat vormals ein gelehrter Engländer, namens PELL, eine ganz sinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen." Es dürfte nachgerade Zeit sein, die Gleichung nach dem Manne, der zuerst ihre Bedeutung erkannt hat, die FERMAT'sche zu nennen.

Art weder hinsichtlich der Feinheit, noch der Schwierigkeit, noch der Beweisart den berühmtesten Aufgaben der Geometrie nachstehen."

„Für jede gegebene Zahl, die keine Quadratzahl ist, giebt es unendlich viele Quadratzahlen von der Beschaffenheit, daſs das Produkt einer jeden in die gegebene Zahl bei Addition der Einheit eine Quadratzahl wird."

„Beispiel. Es sei die Zahl 3, die keine Quadratzahl ist, gegeben. Wenn man dieselbe mit der Quadratzahl 1 multipliziert und zum Produkte 1 addiert, so erhält man 4, eine Quadratzahl. Wird dieselbe Zahl 3 mit der Quadratzahl 16 multipliziert und zum Produkt 1 addiert, so erhält man 49, eine Quadratzahl. Statt 1 und 16 kann man unendlich viele andere Quadratzahlen finden, welche dasselbe leisten. Ich fordere aber eine allgemeine Regel, die sich auf jede gegebene Zahl, welche keine Quadratzahl ist, anwenden läſst. Es möge z. B. die Quadratzahl bestimmt werden, deren Produkt in 149 oder in 109 oder in 433 u. s. w., bei Addition von 1 eine Quadratzahl wird."

Der Schreiber DIGBY's, welcher die für BROUNCKER bestimmte Abschrift anfertigte, mag die Einleitung der Aufgabe, welche ausdrücklich die Forderung ganzzahliger Lösungen stellt, für unerheblich gehalten und deshalb weggelassen haben. So erklärt es sich, daſs BROUNCKER und nach ihm WALLIS meinten, es seien nur rationale Lösungen verlangt, und daſs beide demgemäſs die Aufgabe auf die von DIOPHANT an sehr vielen Stellen angewandte Art behandelten. Soll nämlich die Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ nur in rationalen Werten gelöst werden, so liefert die Annahme $ax^2 + 1 = (1 - rx)^2$ durch eine leichte Entwicklung $x = \frac{2r}{r^2 - a}$, $x^2 = \frac{4r^2}{(r^2 - a)^2}$, oder wenn $r^2 = q$, $r^2 - a = d$ gesetzt wird, $x^2 = \frac{4q}{d^2}$, und das ist die Lösung, die BROUNCKER nach Paris schickte.

WALLIS hatte, wie er DIGBY schreibt[25]), am 13. Sept. 1657 nur ganz allgemein gehört, daſs FERMAT eine dritte Aufgabe gestellt, und daſs BROUNCKER sie gelöst habe. Er sendet in demselben Briefe eine Aufgabe, die DIGBY an FERMAT übermitteln möge. Diese Aufgabe ist zwar nicht zahlentheoretischer Natur, sie möge aber doch hier einen Platz finden; denn es ist nicht ohne Wert für die Beurteilung des WALLIS zu sehen, was er einem Gegner wie FERMAT zu bieten wagte. Es soll folgender Satz bewiesen werden:

Ein von zwei parallelen Ebenen begrenzter Pyramidenstumpf habe als gröſsere Basis das Quadrat über der Strecke A, als kleinere Basis das Quadrat über der Strecke E, als Höhe die Strecke F. Konstruiert man nun

25) *Comm. ep.* VII.

einen Winkel von 120⁰, macht dessen Schenkel beziehungsweise gleich A und E und legt den Kreis durch die so bestimmten drei Punkte, so ist das Produkt aus der Höhe F in das Quadrat des Radius dieses Kreises gleich dem Volumen des Pyramidenstumpfes.

Es ist begreiflich, dafs FERMAT, der sich überhaupt vor schriftlichen Auseinandersetzungen scheute, mit dieser Schüleraufgabe seine Zeit nicht verlieren wollte. Auch war er damals amtlich sehr in Anspruch genommen: Er hatte einem Gerichtshofe zu präsidieren, der über einen wegen Amtsmifsbrauch angeklagten Priester zu entscheiden hatte. Der Priester wurde zum Feuertode verurteilt und das Urteil, das grofses Aufsehen erregte, auch vollzogen. Diese Angelegenheit, schreibt DIGBY, würde für jeden anderen eine Entschuldigung sein; sie sei es aber nicht für FERMAT, der in allem, was er unternehme, unglaublich lebhaft und durchdringend sei. Da FERMAT, so oft er ihn nach dem Satz gefragt habe, immer nur mit Lobsprüchen geantwortet habe, aber nicht mit dem Beweis herausgerückt sei, so könne er auf den Beweis durch FERMAT nicht mehr rechnen; er werde also, wenn er demnächst nach Oxford komme, WALLIS selbst darum bitten[26]). Dieser giebt ihm den Beweis in seinem Briefe vom 10. März 1658[27]).

Erst am 21. Sept. 1657[28]) erhielt WALLIS durch BROUNCKER die dritte Aufgabe FERMAT's und die Lösung, die BROUNCKER nach Paris gesandt hatte, und die dem FERMAT schlecht übersetzt worden war. In seinem Briefe an DIGBY vom 7. Okt. 1657[29]) wiederholt WALLIS wohl in BROUNCKER's Auftrag dessen Lösung und giebt als eigene Lösung der Gleichung $ax^2 + 1 = \square$ den Ausdruck

$$x = \frac{4ps}{s^2 - 4ap^2},$$

welcher ebenfalls nach DIOPHANT's Methode gefunden wird und durch die Annahme $p = 1$ in $x = \frac{4s}{s^2 - 4a} = \frac{s}{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - a}$, also für $s = 2r$ in $x = \frac{2r}{r^2 - a}$, d. i. in den BROUNCKER'schen Ausdruck übergeht.

FERMAT war natürlich mit BROUNCKER's Lösung, die jeder Anfänger in der Arithmetik geben könnte, nicht zufrieden, und stellte (Briefe vom 6. Juni und 15. August 1657)[30]) andere Aufgaben, bei denen er sich mit Lösungen in rationalen Zahlen begnügen wolle. Diese neuen Aufgaben sollen den Gegenstand des folgenden Paragraphen bilden.

Als BROUNCKER erfuhr, dafs FERMAT nur Lösungen in ganzen Zahlen verlangt hatte, schrieb er an WHITE, er möge den Brief des WALLIS vom

26) *Comm. ep.* XXI. 27) *Comm. ep.* XXIII. 28) *Comm. ep.* VIII.
29) *Comm. ep.* IX. 30) *Comm. ep.* XI, XII.

7. Oktober 1657 zurückhalten; von diesem Schritt setzte er auch WALLIS mit dem Bemerken in Kenntnis, er wolle sich näher mit der Aufgabe beschäftigen. In der That konnte er schon am 1. November 1657[31]) dem WALLIS das Bildungsgesetz der Reihe mitteilen, welche für jedes gegebene a alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $ax^2 + 1 = \square$ liefert, sobald die beiden kleinsten bekannt sind. BROUNCKER giebt diese Reihe für 15 Beipiele, von denen eins hier folgen möge:

$$\text{Für } 3x^2 + 1 = \square \text{ ist die Reihe } 1 \cdot 3\frac{1}{1} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 3\frac{11}{15} \cdot 3\frac{41}{56} \cdot \cdots,$$

d. h. die Werte von x, welche $3x^2 + 1$ zu einem Quadrat machen, sind:

$$1,\ 1 \cdot 3\frac{1}{1} = 4,\quad 1 \cdot 3\frac{1}{1} \cdot 3\frac{3}{4} = 15,\quad 1 \cdot 3\frac{1}{1} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 3\frac{11}{15} = 56, \cdots$$

Was die Bildung dieser offenbar durch Induktion gefundenen Reihe betrifft, so sollten die beiden ersten Glieder durch Probieren aus dem Ausdruck, der die Aufgabe in rationalen Zahlen löst, gefunden werden, die folgenden nach der Regel: Der Zähler jedes Bruches ist gleich seinem Nenner vermindert um den Nenner des vorhergehenden Bruches, und jeder Nenner ist gleich dem Zähler des (unechten) Bruches, den man durch Einrichten der vorhergehenden gemischten Zahl erhält.

Später fand BROUNCKER, dafs der kleinste Wert von x zur Bestimmung aller übrigen genüge, dafs, wenn $a\xi^2 \pm 1 = \eta^2$ ist, auch $a(2\xi\eta)^2 + 1 = \square$ sei; in der That ist dann

$$a(2\xi\eta)^2 + 1 = 4a\xi^2(a\xi^2 \pm 1) + 1 = (2a\xi^2 \pm 1)^2.$$

Er gab weiter noch andere[32]), aus dem Obigen leicht herzuleitende Ausdrücke für die Reihe der Werte von x. Ist $x = \xi$, $y = \eta$ die kleinste Lösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ und wird $\eta' = 2\eta$ gesetzt, so sind die Werte von x

$$\xi,\ \xi\eta',\ \xi(\eta'^2 - 1),\ \xi(\eta'^3 - 2\eta'),\ \xi(\eta'^4 - 3\eta'^2 + 1),$$
$$\xi(\eta'^5 - 4\eta'^3 + 3\eta'),\ \xi(\eta'^6 - 5\eta'^4 + 6\eta'^2 - 1), \ldots;$$

darin sind die Koeffizienten der ersten Glieder in den Klammern 1, die der zweiten die Reihe der natürlichen Zahlen, die der dritten die Dreieckzahlen 1, 3, 6, 10, . ., die der vierten die Pyramidalzahlen, d. i. (die Summen der Dreieckzahlen) 1, 4, 10, 20, . . .; u. s. w. Für die Berechnung am einfachsten sind die folgenden, ebenfalls von BROUNCKER gegebenen Ausdrücke, in denen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ die Werte von x bedeuten und η' wieder $= 2\eta$ ist. Es ist

$$\xi_1 = \xi_1,\ \xi_2 = \eta'\xi_1,\ \xi_3 = \eta'\xi_2 - \xi_1,\ \xi_4 = \eta'\xi_3 - \xi_2,\ \xi_5 = \eta'\xi_4 - \xi_3, \ldots.$$

So z. B. hat die Gleichung $2x^2 + 1 = y^2$ die kleinste Lösung $x = 2$, $y = 3$.

31) *Comm. ep.* XIV. 32) *Comm. ep.* XVII.

Es ist also $\xi_1 = 2$, $\eta' = 6$, und man erhält $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 6 \cdot 2 = 12$. $\xi_3 = 6 \cdot 12 - 2 = 70$, $\xi_4 = 6 \cdot 70 - 12 = 408$, $\xi_5 = 6 \cdot 408 - 70 = 2378$, $\xi_6 = 6 \cdot 2378 - 408 = 13860, \ldots$.

Es war also nur noch ein sicheres Verfahren zur Ermittlung der kleinsten Lösung zu finden. Auch das gelang Brouncker, und Wallis giebt eine Darstellung desselben in den Briefen vom 17. Dezember 1657 und 30. Januar 1658[33]). Euler hat dasselbe mit gewohnter Klarheit auseinandergesetzt[34]). Hier sei nur bemerkt, dafs das Verfahren sich mit dem von Lagrange gefundenen, auf der Theorie der periodischen Kettenbrüche beruhenden im wesentlichen deckt.

Damit war die dritte von Fermat gestellte Aufgabe gelöst; freilich war der Beweis noch nicht erbracht, dafs das dargelegte Verfahren in allen Fällen zum Ziele führen müsse[35]). Die Lösung war in der Hauptsache von Brouncker gefunden. Wallis hat nur die ihm brieflich oder mündlich mitgeteilten Gedanken Brouncker's zu Papier gebracht. Einen wesentlichen Anteil an der Sache nimmt Wallis gar nicht in Anspruch. Vielmehr erklärt er in dem Brief an Digby vom 26. Dezember 1657[36]), dafs Brouncker das Hauptverdienst zufalle, und er beglückwünscht diesen in dem Briefe vom 30. Januar 1658[37]), dafs er den Ruhm, den die Engländer vordem im Kampfe mit den Franzosen gewonnen, unbefleckt bewahrt und gezeigt habe, dafs Englands Streiter in den Wissenschaften ebenso stark wie im Kriege seien.

Wallis, trotz seiner theologischen Studien ein recht weltkluger Mann, hielt es nicht für angezeigt, den Franzosen auf einmal zu enthüllen, dafs Brouncker die Lösung der dritten Aufgabe vollständig gelungen war. Am 1. Dezember 1657[38]) schrieb er diesem, Fermat habe ja nur unendlich viele, nicht alle Lösungen verlangt, und es sei vorteilhaft, die Reihe, welche letztere gebe, für später aufzuheben. Auch wie man die erste Lösung finde, wolle er vor der Hand verschweigen und nur, wenn Fermat es ausdrücklich fordere, offenbaren; vorläufig genüge es zu sagen, die Lösung sei eine ganze Zahl, wenn der Nenner der rationalen Lösung in den Zähler aufgehe.

An demselben Tage schreibt er Digby einen noch bedenklicheren Brief[39]). Er wiederholt zunächst die Lösung in rationalen Zahlen; dann wirft er sich in die Brust und erklärt, die Beschränkung, a dürfe keine Quadrat-

33) *Comm. ep.* XVII u. XIX. 34) Algebra II. Teil, II. Abschnitt, 7. Kapitel.

35) Darauf macht schon Huygens aufmerksam (*Oeuvres* T. II. p. 211).

36) *Comm. ep.* XVIII. Vergl. auch Wallis' Brief an Huygens vom 1. Januar 1659 (Huygens, *Oeuvres* II, p. 297).

37) *Comm. ep.* XIX. 38) *Comm. ep.* XV. 39) *Comm. ep.* XVI.

zahl sein, sei unnötig; die gegebene Lösung (in rationalen Zahlen) sei auch für Quadratzahlen a gültig. Man könne auch die Aufgabe verallgemeinern und die Gleichung $ax^2 + b^2 = \square$ lösen; die Lösung von $ax^2 + 1 = \square$ sei dann nur mit b zu multiplizieren. Jetzt komme FERMAT mit der Forderung ganzer Zahlen, die vordem nicht gestellt sei. Aber BROUNCKER und er wollten auch diese neue Aufgabe lösen, die freilich nicht so allgemein sei wie die frühere, da jetzt a keine Quadratzahl sein dürfe. Übrigens enthielten die allgemeinen Ausdrücke alle Lösungen, sowohl die in ganzen Zahlen wie die gebrochenen. Wolle man aber nur ganze Zahlen zulassen, so solle man eine beliebige ganze Zahl ξ wählen, für welche $a\xi^2 + 1 = \eta^2$ sei; die Zahl ξ möge man sich auf irgend eine Weise verschaffen; dann sei $2\xi\eta$ ein neuer Wert von x, dieser liefere einen dritten, der einen vierten u. s. w., und so erhalte man unendlich viele Lösungen. Wenn nun FERMAT weiter gehe und etwa alle Lösungen der Gleichung fordere, so könnten sie ihm auch damit dienen.

Dank dieser Zurückhaltung scheinen FERMAT und FRENICLE erst spät von allen Details der Lösung unterrichtet worden zu sein. FERMAT weifs noch am 7. April 1658 nichts davon[40]), und in dem Briefe FRENICLE's an DIGBY[41]), den dieser am 20. Februar 1658 an WALLIS schickt, hält es FRENICLE für nötig, die Lösung in rationalen Zahlen zurückzuweisen und zu fordern, dafs WALLIS wenigstens eine Methode gebe, die ganzzahligen Lösungen von den gebrochenen zu trennen. Er selbst habe bereits für alle a unter 150 die Werte von x in seiner Schrift angegeben. Nun möge WALLIS, wenn er wirklich die Aufgabe beherrsche, weitere Lösungen geben, etwa bis $a = 200$ oder wenigstens die Lösung für $a = 151$, denn der Fall $a = 313$ übersteige wohl seine Kräfte. Diese Aufforderung beantwortet BROUNCKER in seinem Brief an DIGBY vom 23. März 1658[42]) damit, dafs er die kleinste Lösung der Gleichung für $a = 313$ angiebt. Er hat nach seiner Methode in 1 bis höchstens 2 Stunden ausgerechnet, dafs

$$313 \cdot (7170685)^2 - 1 = (126862368)^2,$$

folglich

$$313 \cdot (2 \cdot 7170685 \cdot 126862368)^2 + 1, \text{d. i. } 313 \cdot (1819380158564160)^2 + 1 = (32188120829134849)^2$$

ist, und WALLIS giebt am 29. März[43]) die kleinste Lösung für $a = 151$, nämlich $x = 140634693$, $y = 1728148040$.

---

40) *Comm. ep.* XXXVII. 41) *Comm. ep.* XXVI. 42) *Comm. ep.* XXVII.
43) *Comm. ep.* XXIX.

§ 4. Die letzten von Fermat gestellten Aufgaben.

Als Fermat noch der Meinung war, seine dritte Aufgabe werde von den Engländern nicht gelöst werden, stellte er[44]) denselben andere Aufgaben, die sie in der Weise Diophant's[45]), d. i. durch rationale Werte lösen dürften:

Es sollen zwei Kuben gefunden werden, deren Summe gleich der Summe zweier anderen Kuben sei. Es solle ein Kubus gefunden werden, der gleich der Summe zweier Kuben sei[46]).

Ferner fordert er den Beweis der beiden Sätze:

Die Gleichung[47]) $x^2 + 2 = y^3$ hat nur die eine Lösung $x = 5, y = 3$.

" " $x^2 + 4 = y^3$ " " " Lösungen $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ und $\begin{cases} x = 11 \\ y = 5. \end{cases}$

Fermat willigte ein, dafs Frenicle sich ebenfalls mit den Aufgaben beschäftige; er werde dieselben nicht so leicht wie die früheren finden.

Für die erste Aufgabe fand Frenicle sofort eine Anzahl Lösungen. Wallis erhielt dieselben durch Brouncker[48]), dem Digby sie brieflich (13. Oktober 1657) mitgeteilt hatte, und sandte an Digby am 1. Dezember 1657[49]) andere Lösungen derselben Aufgabe, indem er prahlend hinzufügte, wenn Fermat noch mehr wünsche, könne er in einer Stunde 100 Stück liefern; so leicht sei die Sache. Das ist aber Geflunker; denn thatsächlich hat Wallis nicht eine einzige neue Lösung gegeben: er hat Frenicle's Gleichungen beiderseits mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert. Frenicle hat z. B. die Lösung gegeben $9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$. Daraus bildet Wallis vier neue Lösungen

$$27^3 + 30^3 = 3^3 + 36^3,\ 36^3 + 40^3 = 4^3 + 48^3,\ 45^3 + 50^3 = 5^3 + 60^3,$$
$$\left(4\frac{1}{2}\right)^3 + 5^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6^3.$$

Als Frenicle ihn deshalb mit Recht angreift[50]) (20. Februar 1658), sucht er sein Verfahren (Brief[51]) an Digby vom 25. März 1658) noch zu

44) *Comm. ep.* XII.

45) Bei dieser Gelegenheit erinnert er Digby an das Versprechen, das er ihm gegeben, auf ein Exemplar dieses Schriftstellers, das alle 13 Bücher enthalte, zu fahnden und es ihm zur Verfügung zu stellen.

46) In seiner *Observatio* zu Diophant II, 6 erklärt Fermat, er könne beweisen, dafs es unmöglich sei, einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein irgend eine Potenz aufser dem Quadrat in zwei Potenzen von demselben Exponenten zu zerfällen. Vergl. meine Diophant-Übersetzung S. 52.

47) Euler behandelt beide Gleichungen in seiner Algebra II. Teil, II. Abschnitt § 192, 193.

48) *Comm. ep.* X. 49) *Comm. ep.* XVI. 50) *Comm. ep.* XXVI.

51) *Comm. ep.* XXVIII.

rechtfertigen, indem er sagt, auch unter FRENICLE's Lösungen seien einige auf diese Weise entstandene. Spöttisch erwidert[52]) FRENICLE (4. Mai 1658), in Frankreich seien derartige Lösungen unzulässig, in England vielleicht nicht.

Mit den übrigen von FERMAT gestellten Aufgaben sich zu beschäftigen, lehnte WALLIS ab[53]). Er ziehe nützlichere Wissenschaften der Zahlentheorie vor. Speziell die von FERMAT gegebenen negativen Sätze seien wertlos; auch sei es leicht, solche in beliebiger Menge aufzustellen. In der That giebt er dann sechs negative Sätze, die dem DIGBY imponieren mufsten, die aber so schülerhaft leicht sind, dafs FERMAT (Brief an DIGBY vom 7. April 1658[54])) recht hatte darüber zu spotten, und dafs sie hier füglich übergangen werden können[55]).

In demselben Briefe, in welchem FERMAT sich über WALLIS' negative Sätze in der angegebenen Weise äufsert, stellt er ihm, der die ganzen Zahlen nicht liebe, die beiden Aufgaben:

1. zu beweisen, dafs es kein rechtwinkliges Dreieck in rationalen Zahlen gebe, dessen Fläche eine Quadratzahl sei;

2. die Zahl $9 = 1 + 8$ als Summe zweier anderer rationalen Kuben darzustellen.

Für den Satz vom rechtwinkligen Dreieck hat WALLIS (Brief an DIGBY vom 30. Juni 1658[56])) einen Beweis gegeben, der nichts als eine Wiederholung des Satzes mit anderen Worten ist und wohl nur dem DIGBY das Unvermögen des Gebers verhüllen sollte[57]). Was die zweite Aufgabe betrifft, so findet WALLIS $8 + 1 = \left(\frac{20}{7}\right)^3 + \left(\frac{-17}{7}\right)^3$ und fügt hinzu, wie er 9 in einen positiven und einen negativen Kubus zerfällt habe, so würde

---

52) *Comm. ep.* XXXVIII. 53) *Comm. ep.* XVI. 54) *Comm. ep.* XXXVII.

55) Diese Sätze lassen sich, wenn x, y ganze Zahlen bezeichnen, kurz folgendermafsen aussprechen:

1) Die Gleichung $x^2 + 62 = y^2$ ist unmöglich.
2) „ „ $x^2 + 12 = y^4$ hat nur die Wurzel $x^2 = 4$.
3) „ „ $x^4 + 9 = y^2$ „ „ „ „ $x^4 = 16$.
4) „ „ $x^3 - y^3 = 20$ ist unmöglich.
5) „ „ $x^3 - y^3 = 19$ hat nur die Wurzeln $x^3 = 27$, $y^3 = 8$.
6) Die Differenz zweier geraden und ebenso zweier ungeraden Biquadrate ist durch 16 teilbar.

56) *Comm. ep.* XLIV.

57) Einen wahrscheinlich von FERMAT herrührenden Beweis des Satzes giebt FRENICLE in seinem *Traité des triangles rectangles en nombres.* Vergl. die Arbeit von G. WERTHEIM in der Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 44 S. 4 u. flgd.

er sicherlich, wenn auch durch längere Rechnung zu zwei positiven gelangen[58]).

Brouncker verhielt sich den neuen Aufgaben Fermat's gegenüber durchaus ablehnend. Am 11. Mai 1658 schrieb er[59]) Wallis, da er die Aufgabe gelöst habe, die Fermat selbst für die schwierigste halte, so fühle er sich nicht verpflichtet, die Lösung der andern zu versuchen. Übrigens halte er dieselben nicht für schwierig und glaube, er würde sie bewältigen, wenn er Zeit und Lust dazu hätte.

§ 5. Franciscus van Schooten's Teilnahme an dem Streite[60]).

Die Herausforderung, welche Fermat an die europäischen Mathematiker gerichtet hatte, scheint auch den holländischen Gesandten in Paris, Wilhelm Boreel, interessiert zu haben, und wohl um seinen Landsleuten Gelegenheit zu geben sich auszuzeichnen, schickte er am 26. Januar 1657 die beiden (ersten) von Fermat gestellten Aufgaben in einem Briefe an die Professoren der Mathematik in Leyden ab. Der Rektor der Universität, Jacques Golius (1596—1667), ein berühmter Orientalist, der sich auch mit Mathematik beschäftigte, erhielt den Brief am 7. Februar 1657, einen Tag vor dem Ablauf seiner Amtswürde, und öffnete ihn in Schooten's Gegenwart den 11. Februar. Schooten schrieb eine Antwort, die er Golius mitteilte und am 17. Februar an Boreel abschickte. Er schlug darin für die Lösung der ersten Fermat'schen Aufgabe folgendes Verfahren vor:

Um zunächst die Kuben der verlangten Eigenschaft zu finden, welche die Formen p^3, p^6, p^9, ... hätten, wo p eine Primzahl bezeichnet, solle man die Reihen

$$\text{(I)} \qquad 1 + p + p^2 + p^3$$

$$\text{(II)} \qquad 1 + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6$$

. . . .

58) Wallis irrt, wenn er die Zerfällung von 9 in zwei positive Kuben für leicht hält. Davon überzeugt ein Blick auf die Lösung der Aufgabe, die der Jesuit Jacobus de Billy nach brieflichen Mitteilungen Fermat's in seinem *Inventum novum* S. 10 (Franz. Übers. von Paul Tannery in *Oeuvres de* Fermat III p. 345) giebt. Die Zerfällung von Wallis erhält man durch die Annahme $x^3 + y^3$, d. i. $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = \frac{3}{k} \cdot 3k$, wo k unbestimmt bleibt. Setzt man nämlich $x + y = \frac{3}{k}$, $x^2 - xy + y^2 = 3k$, so folgt durch Elimination von x leicht $y = \frac{1}{2k}(3 + \sqrt{4k^3 - 3})$, und abgesehen von 1 ist der kleinste Wert, für welchen $\sqrt{4k^3 - 3}$ rational wird, $k = 7$.

59) Comm. ep. XXXIV.

60) Comm. ep. XXXIII. Franciscus van Schooten (Sohn) (1615—1660).

für alle Primzahlen 2, 3, 5, ... summieren und sehen, ob sich eine Quadratzahl als Summe ergebe. Für die Reihe (I) hat SCHOOTEN die Summation mit allen Primzahlen unter 100 vollzogen und keine andere Lösung als die schon von FERMAT gegebene $1 + 7 + 49 + 343 = 20^2$ erhalten. Die Reihe (II) vorzunehmen oder gar die Kuben zu betrachten, welche ungleiche Primzahlen als Faktoren enthalten, dazu fehlte ihm der Mut. Er glaubt aber, dass die Aufgabe unendlich viele, freilich weit auseinander liegende Lösungen besitze.

Ein ähnliches Verfahren schlägt er für FERMAT's zweite Aufgabe vor. Man soll die Reihen

(I) $$1 + p + p^2$$

(II) $$1 + p + p^2 + p^3 + p^4$$

. . . .

für die Werte $p = 2, 3, 5, \ldots$ summieren und sehen, welche Summe ein Kubus sei. Dann solle man ebenso mit den aus mehreren Primzahlen zusammengesetzten Quadraten verfahren.

Gleichzeitig stellte SCHOOTEN seinerseits FERMAT die Aufgaben: 1. Einen Kubus zu finden, der die Summe zweier Kuben sei, oder die Unmöglichkeit der Sache zu beweisen; 2. zu untersuchen, ob es möglich oder unmöglich sei, andere vollkommene Zahlen als die durch EUKLID's Methode (Schlufssatz des 9. Buches) gelieferten zu finden.

SCHOOTEN teilte FERMAT's Aufgaben und die Lösungen, die er gegeben, HUDDE[61]) mit. Dieser antwortete ihm am 23. Februar von Utrecht, die Aufgaben mifsfielen ihm zwar nicht; er wolle aber seine Mufsezeit wichtigeren und allgemeineren Fragen widmen. Aus Liebe zu SCHOOTEN habe er einen Tag der Sache gewidmet und einige Abkürzungen des SCHOOTEN'schen Verfahrens gefunden. Diese möge SCHOOTEN seinem Briefe, falls derselbe noch nicht abgeschickt sei, beifügen. Es fehlt hier an Raum, auf diese wenig belangreiche Sache weiter einzugehen. Erwähnt sei nur noch, dafs auch GOLIUS, freilich ohne Erfolg, sich mit den Aufgaben beschäftigte.

Am 9. März 1657 erhielt SCHOOTEN ein Schreiben von HUYGENS[62]) und in demselben einliegend einen Brief des Rechtsgelehrten CLAUDE MYLON in Paris, der sich lebhaft für Mathematik, besonders Zahlentheorie inte-

---

61) JOHANN HUDDE (1633—1704), geboren in Amsterdam, trat nach vollendetem Rechtsstudium und längerem Aufenthalt in Frankreich in die Verwaltung seiner Vaterstadt, welcher er 19mal als Bürgermeister vorstand.

62) CHRISTIAN HUYGENS, 1629—1695, geb. und gest. im Haag, Physiker, Mathematiker und Astronom. Der angeführte Brief steht *Oeuvres de* H. T. II No. 375.

ressierte. MYLON's Brief enthielt als Einlage[63]) ebenfalls die beiden ersten FERMAT'schen Aufgaben und zugleich die Nachricht, dieselben seien von FRENICLE gelöst und die Lösung solle gedruckt werden. In demselben Briefe schickte HUYGENS die Abschrift eines Schreibens FERMAT's an FRENICLE[64]), welches die dritte Aufgabe als Lehrsatz giebt und eine Regel zur Lösung fordert. Durch ein späteres Schreiben MYLON's an HUYGENS (12. April 1657), das ihm übersandt wurde, erhielt SCHOOTEN die von FRENICLE gefundene Lösung der dritten Aufgabe für einige Zahlen[65]), und am 18. Mai 1657 schickte MYLON die Tabelle FRENICLE's für alle Zahlen bis 86 und für die beiden Zahlen 119, 127[66]).

Durch MYLON erhielt dann FRENICLE SCHOOTEN's Lösungsvorschlag der ersten Aufgabe. Er bemerkt dazu in dem Briefe vom 12. April 1657, es sei besser, die Kuben der Reihe nach zu prüfen, als SCHOOTEN's Verfahren anzuwenden. Wolle man dies doch thun, so empfehle es sich, gewisse Zahlen von vornherein auszuschliefsen. Auf Details dieses (auf die Kuben p^3 bezüglichen) Ausschliefsungsverfahrens, in welchem FRENICLE bekanntlich eine grofse Virtuosität besafs, ist es ebenfalls nicht erforderlich hier einzugehen. FRENICLE stellte SCHOOTEN zugleich die Aufgaben: 1. Eine Dreieckzahl zu finden, deren 6faches, vermehrt um 1, ein Kubus sei; 2. zu beweisen, dafs die Gleichung $19x^2 = 17y^2 + 1$ in ganzen Zahlen unlösbar sei. Auf die zweite Frage SCHOOTEN's gab FRENICLE folgende Antwort: „Gerade vollkommene Zahlen giebt es aufser den durch EUKLID's Methode gelieferten nicht. Wenn es ungerade giebt, so müssen dieselben von der Form a^2p sein, wo p eine Primzahl der Form $4n + 1$ ist."

FRENICLE liefs SCHOOTEN durch MYLON fragen, ob er zugebe, dafs seine Lösung in der Schrift, die er vorbereite, mit abgedruckt werde. SCHOOTEN willigte ein (29. Mai 1657) und schlug eine Überschrift vor, die erkennen lassen solle, dafs er nur gezeigt habe, wie man die gesuchten Zahlen finden könne, dafs er aber aus Mangel an Zeit dieselben nicht bestimmt habe. Da erschien FRENICLE's Büchlein ohne SCHOOTEN's Lösung und mit einer Widmung an DIGBY, die SCHOOTEN's Entrüstung erregte. Denn FRENICLE erklärte darin prahlerisch, die Lösung, die er gebe, sei weder den Engländern noch den Niederländern gelungen. SCHOOTEN hatte noch einen besonderen Grund, sich verletzt zu fühlen. In seinen *Exercitationes mathematicae* S. 426 sagt er ausdrücklich, er sehe von einer Behandlung der vollkommenen Zahlen ab, weil er gehört, FRENICLE habe ein dreibändiges Buch über figurierte Zahlen, Primzahlen u. s. w. geschrieben, und er wolle

63) *Oeuvres de* H. T. II No. 374. 64) Ebenda No. 372. 65) Ebenda No. 383. 66) Ebenda No. 389.

das Erscheinen desselben abwarten. Das Blatt, auf dem das steht, hatte er FRENICLE durch MYLON mit achtungsvollen Grüßsen überreichen lassen, und nun dieser Dank!

Von all diesen Vorgängen erfuhr FERMAT erst, als der aus Castres gebürtige Leibarzt des Königs, PIERRE BOREL, seinem Vater schrieb, der holländische Gesandte wundere sich, dafs FERMAT dem Professor SCHOOTEN nicht antworte, der behaupte, FERMAT's Aufgaben gelöst und demselben neue gestellt zu haben. FERMAT erklärt in seinem Brief an DIGBY vom 15. August 1657, er habe von SCHOOTEN nichts erhalten[67]).

§ 6. Ende des Streites.

Die Lösung der dritten FERMAT'schen Aufgabe erfüllte sowohl FRENICLE wie FERMAT mit grofser Achtung für WALLIS und BROUNCKER; dafs WALLIS nur einen geringen Anteil an dem Erfolge hatte, war ihnen unbekannt geblieben. FRENICLE äufserte[68]) seine Verwunderung darüber, dafs WALLIS mit seinen Talenten so lange hinter dem Berge gehalten habe. Er bedauerte die harten Ausdrücke, die er gebraucht, die aber vielleicht das Gute gehabt hätten, WALLIS zur Entfaltung seiner Kräfte anzuspornen. DIGBY spricht in dem Schreiben[69]), in dem er WHITE für die Besorgung der Briefe dankt, seine Freude aus, dafs BROUNCKER und WALLIS sich als grofse Mathematiker erwiesen und in Paris allgemeines Ansehen gewonnen hätten. In seinem Brief an WALLIS vom 8. Mai 1658[70]) hebt er hervor, die bedeutendsten Männer in Paris müfsten jetzt zugeben, dafs die Leistungen der Engländer auf dem Gebiete der Mathematik hinter denen keiner andern Nation zurückständen. Ebenso erkennt FERMAT in dem Briefe[71]), den DIGBY am 19. Juni 1658 erhielt und an WALLIS schickte, mit Freude an, dafs seine numerischen Aufgaben jetzt gut gelöst seien. Nun möchten aber die Gegner es nicht verschmähen, die Wissenschaft von den ganzen Zahlen, in der sie so scharfsinnig gewesen seien, zu fördern. Zu diesem Zwecke schlägt er ihnen vor, sich um die Beweise folgender Sätze, die er selbst beweisen könne, zu bemühen:

1) Jede Zahl ist entweder eine Dreieckzahl oder die Summe von zwei oder drei Dreieckzahlen; entweder eine Quadratzahl oder die Summe von

---

67) *Comm. ep.* XII. Wie stark SCHOOTEN's Ingrimm war, kann man daraus ersehen, dafs er noch am 19. September 1659 in einem Briefe an HUYGENS (T. II No. 517) mit Behagen eine abfällige Äufserung zitiert, die DESCARTES über FERMAT gethan hatte.

68) *Comm. ep.* XXXVIII. 69) *Comm. ep.* XLI. 70) *Comm. ep.* XLII.

71) *Comm. ep.* XLVII.

zwei oder drei oder vier Quadratzahlen; entweder eine Fünfeckzahl oder die Summe von zwei oder drei oder vier oder fünf Fünfeckzahlen; u. s. w.[72]).

2) Jede Primzahl $4n + 1$ ist die Summe zweier Quadratzahlen[73]).

3) Jede Primzahl $3n + 1$ ist die Summe einer Quadratzahl und des Dreifachen einer Quadratzahl[74]).

4) Jede Primzahl der beiden Formen $8n + 1$, $8n + 3$ ist die Summe einer Quadratzahl und des Doppelten einer Quadratzahl[75]).

5) Keine Dreieckzahl aufser 1 ist ein Biquadrat[76]).

Ferner bittet er sie, den Beweis der folgenden Sätze zu suchen, die er für wahr halte, aber nicht beweisen könne:

1) Man erhält immer eine Primzahl, wenn man 1 zu einer Potenz von 2 addiert, deren Exponent ebenfalls eine Potenz von 2 ist[77]).

2) Das Doppelte jeder Primzahl von der Form $8n - 1$ ist die Summe von drei Quadraten[78]).

3) Das Quadrat einer Primzahl der Form $4n + 3$, die auf 3 oder 7 endigt, ist ebenso wie das Produkt zweier solchen Primzahlen die Summe eines Quadrats und des Fünffachen eines anderen Quadrats.

Mit diesem Briefe fand der Streit sein Ende. Digby schickte denselben an Wallis mit einem Begleitschreiben[79]), in welchem er sich verabschiedet, da er eine gröfsere Reise antrete.

Es ist eigentümlich, dafs Wallis in der Selbsttäuschung befangen war, er habe seinen Namen ganz besonders mit Ruhm bedeckt, während er in Wirklichkeit eigentlich recht wenig geleistet hatte. Er nahm für sich und Brouncker den vollständigen Sieg in Anspruch, und in seinem Abschiedsbrief[80]) (30. Juni 1658) an den einflufsreichen Digby sagt er, die Gegner würden sich wohl mit den Aufgaben, die die Engländer gelöst

---

72) Dieser auch in der *Observatio* zu IV, 31 des Diophant (vergl. meine Übersetzung S. 162) ausgesprochene Satz ist von Cauchy bewiesen. Vergl. Legendre, *Théorie des nombres*, 3me *éd.* §§ 151—157, 318, 632—652 und Paul Bachmann, Zahlentheorie, 4ter Teil S. 154.

73) Bewiesen von Euler, *Commentatt. arithmet. coll.* I, p. 155.

74) Desgl. ebenda I, p. 295.

75) Bewiesen von Lagrange. *Oeuvres* T. III *(Recherches d'Arithmétique)*.

76) Der Satz ist auch in der *Observatio* zu Diophant VI, 26 (Meine Übersetzung S. 294) ausgesprochen. Den Beweis hat Euler gegeben. *Commentatt. etc.* I, p. 30.

77) Dieser Satz ist bekanntlich von Euler als falsch erwiesen worden. *Commentationes arithmeticae collectae* I S. 356. Übrigens hatte schon Huygens seine Verwunderung darüber ausgesprochen, dafs Fermat auf eine so wenig ausgedehnte Induktion hin den Satz aufzustellen gewagt habe (*Oeuvres complètes*, II. p. 212).

78) Vergl. Legendre, *Théorie des nombres*. 3me *éd.* § 319.

79) *Comm. ep.* XLVI. 80) *Comm. ep.* XLIV.

hätten, begnügen und auf die Lösung der übrigen um so eher verzichten, als sie selbst von den seitens der Engländer gestellten nur die eine bewältigt hätten: zwei Quadratzahlen von gleicher Divisoren-Summe zu finden. WALLIS hat dann die gewechselten Briefe, soweit sie ihm abschriftlich oder in den Originalen zu Gebote standen, unter dem Titel: „*Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis nuper habitum*" veröffentlicht. Die Schrift erschien zuerst 1658 in Oxford, zum zweitenmale in der Gesamtausgabe der Werke von WALLIS (Oxford, 1693), in der sie die Seiten 757—860 des zweiten Bandes einnimmt. Eine französische Übersetzung hat PAUL TANNERY in seiner Ausgabe der Werke FERMAT's gegeben. (T. III, p. 399—610).

In der ersten Zeit scheint die Schrift wenig Verbreitung gefunden zu haben, was wohl der Schwierigkeit zuzuschreiben ist, die sich der Versendung von Büchern entgegenstellte. WALLIS hatte durch den jungen englischen Edelmann PETER BALL, der nach Leyden ging, um daselbst Medizin zu studieren, an HUYGENS ein Exemplar geschickt [81]). Dieser lieh dasselbe SCHOOTEN [82]) und später RENÉ FRANÇOIS DE SLUSE [83]), der nach der Lösung der beiden ersten FERMAT'schen Aufgaben gefragt hatte. Noch am 26. Dezember 1659 wurde HUYGENS durch PIERRE DE CARCAVY [84]) um Besorgung eines Exemplars gebeten, da die Buchhändler von Paris es nicht liefern könnten.

Die Veröffentlichung der Briefe durch WALLIS rief französischerseits eine anonyme Erwiderung hervor, die nach TANNERY's Ansicht, der den lateinischen Text mit französischer Übersetzung l. c. abgedruckt hat, wahrscheinlich FRENICLE zum Verfasser hat. In dieser Erwiderung wird zunächst darauf hingewiesen, dafs es kaum statthaft sei, Briefe ohne Zustimmung, ja ohne Wissen der Schreiber zu veröffentlichen. Offenbar sei WALLIS dabei von der lobenswerten Absicht geleitet gewesen, den Ruhm seines Vaterlandes zu erhöhen. Aber es sei doch noch zweifelhaft, ob die Engländer sich mit Recht den Sieg zuschreiben könnten. Die numerischen Aufgaben hätten sie doch erst gelöst, nachdem das Buch von FRENICLE er-

---

81) *Oeuvres de* HUYGENS T. II No. 497. 82) Ebenda No. 517.

83) Ebenda No. 538. RENATUS FRANCISCUS DE SLUSE, geb. 1622 in Vise bei Lüttich, gest. 1685 zu Lüttich als Grofskanzler und ordentlicher Rat des Bischofs, bewandert aufser in der Theologie in der Jurisprudenz, der Medizin, dem Griechischen, den orientalischen Sprachen und der Mathematik. Er war Mitglied der *Royal Society*.

84) Ebenda No. 698. PIERRE DE CARCAVY, geb. in Lyon, gest. 1684. Er war erst Ratsherr, dann unter COLBERT Bibliothekar des Königs. Wegen seiner mathematischen Kenntnisse wurde er als eins der ersten Mitglieder in die Akademie der Wissenschaften aufgenommen.

schienen sei, das ihnen wesentlich geholfen habe; für den Satz, daſs die Gleichung $ax^2 + 1 = \square$ unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen habe, sei der Beweis noch nicht erbracht, ebensowenig dafür, daſs kein Kubus sich in zwei rationale Kuben zerfällen lasse. Auch die Aufgabe: die Summe zweier Kuben in zwei andere Kuben zu zerfällen, sei weder allgemein, noch für den speziellen Fall 9 gelöst. Die Zahl 9 als Differenz zweier Kuben darzustellen, sei weder VIETA, noch BACHET, noch DIOPHANT schwer gewesen, aber die Zerfällung in eine Summe hätten sie nicht einmal versucht. Endlich sei das, was WALLIS als Beweis des Satzes, daſs die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks keine Quadratzahl sein könne, vorgebracht habe, nicht als Beweis anzusehen. Es fehle also noch recht viel an dem Siege der Engländer.

DIE ENTDECKUNG DER

PARABELFORM DER WURFLINIE.

VON

Dr. EMIL WOHLWILL

IN HAMBURG.

Im vierten Band seiner „Geschichte der experimentellen Methode in Italien" hat RAFAELLO CAVERNI das Versprechen eingelöst, das er vier Jahre zuvor in einer einleitenden Übersicht seines Werkes gegeben hatte: an der Geschichte der Entdeckung der Parabelform der Wurflinie als einem Hauptbeispiel nachzuweisen, daſs und wie GALILEI das geistige Eigentum seiner bedeutenden Zeitgenossen für sich selbst in Anspruch genommen hat. Man hatte das Recht zu erwarten, daſs der Vertreter einer so völlig neuen Ansicht in einem Falle, den er selbst — um mit BACON zu reden — als *instantia praerogativa* für die Berechtigung seines Urteils betrachtet, mit absoluter Unparteilichkeit den Wert jedes einzelnen Beweisgrundes abwägen, der Vieldeutigkeit der gegebenen Thatsachen in vollem Maſse gerecht werden und dann in zwingender Logik darthun werde, daſs wenigstens in diesem Falle für den klar Denkenden nichts übrig bleibt, als an den ehrlosen Diebstahl eines groſsen Mannes zu glauben; in diesen Erwartungen hat uns CAVERNI aufs gründlichste getäuscht: seine Beweisführung ist in allen Teilen die eines gewandten Advokaten, der als seine Aufgabe betrachtet, nur die eine Seite der Sache zur Geltung kommen zu lassen, Alles zusammen zu tragen, was sich möglicherweise zu Gunsten seiner einseitigen Auffassung verwerten läſst, Alles fernzuhalten, was auch nur die Vorstellung hervorrufen könnte, daſs sich die Dinge in anderer Weise ansehen lassen, der um seines Zweckes willen für gestattet hält, mit Vermutungen wie mit Thatsachen zu operieren, als erwiesen hinzustellen, was besten Falls wahrscheinlich ist.

Aber CAVERNI stellt in den Dienst der Sache, die er auf seine Fahne geschrieben hat, ein ausgebreitetes Einzelwissen, eine erstaunliche Belesenheit, er ist insbesondere in den Werken GALILEI's, seinem Briefwechsel und den handschriftlichen Schätzen der Biblioteca Nazionale in Florenz vollkommen orientiert, und dieser seltenen Vertrautheit mit dem Material der Geschichte der Wissenschaft, die den Freunden italienischer Wissenschaft aus früheren Schriften desselben Verfassers entgegen getreten war, ist eine auſsergewöhnliche Anerkennung dadurch zu teil geworden, daſs CAVERNI's „Geschichte der experimentellen Wissenschaft in Italien" von

dem Königlichen Institut von Venedig mit dem Preise gekrönt, und der Bericht des Vertreters der Akademie an der Spitze des Werks veröffentlicht worden ist. Allerdings ist in dieser einführenden Mitteilung ANTONIO FAVARO's in klaren Worten die Erwartung ausgesprochen, dafs der Verfasser sein befremdendes Urteil über GALILEI und insbesondere seine ohne Zweifel irrtümliche Ansicht über die Entdeckung der Parabelform der Wurflinie wiederholter Prüfung unterwerfen und berichtigen werde; es haben also die Akademie von Venedig und ihre Vertreter im Voraus sich dagegen verwahrt, durch ihr anerkennendes Votum eine Zustimmung zu jenem Kampf gegen die Ehre und das Ansehen GALILEI's aussprechen zu wollen, der in CAVERNI's Buch eine so grofse Rolle spielt. Durch die Erklärung aber, die von so gewichtiger Seite kommt, dafs ungeachtet des hervorgehobenen Mangels die überwiegenden Vorzüge des Werks das Urteil der Akademie von Venedig rechtfertigen, ist zugleich die Möglichkeit ausgeschlossen, dafs man über eine in eben diesem Werke nachdrucksvoll ausgesprochene und eingehend begründete Behauptung etwa mit Geringschätzung hinweggehen könnte, dafs es dem Verfasser gegenüber mit der grundsätzlichen Zurückweisung seiner Methode der Geschichtsforschung und Geschichtsdarstellung gethan sein könne; man mufs ihm in die Einzelheiten der Wiedergabe und der Bearbeitung nie zuvor in gleicher Vollständigkeit benutzter geschichtlicher Materialien folgen, um ihn zu widerlegen. Dies soll im Folgenden versucht werden.

I.

Die Möglichkeit, GALILEI's Anspruch auf die Entdeckung der Parabelform der Wurflinie zu bestreiten, hängt mit der eigentümlichen Weise der Veröffentlichung seiner Bewegungslehre zusammen. Es ist bekannt, dafs erst in dem vier Jahre vor GALILEI's Tode erschienenen Hauptwerk die fast vier Jahrzehnte früher in ihren Grundzügen entworfene und dem Hauptinhalte nach abgeschlossene „neue Wissenschaft von der örtlichen Bewegung“ allgemein zugänglich geworden ist. Als eine lange zuvor zum Abschlufs gebrachte Lehre ist dieselbe in dem Werk von 1638 auch äufserlich dadurch gekennzeichnet, dafs ihre Hauptsätze als Bestandteile eines besonderen Buches in dem gröfseren Werk angeführt werden. Ein altes Manuskript in drei Teilen, in lateinischer Sprache geschrieben und in streng wissenschaftlicher Form bietet den eigentlichen Stoff für die weitere in dialogischer Form und in italienischer Sprache geführte Diskussion. Da GALILEI nach seinem Scheiden von Padua grundsätzlich nur noch in der Volkssprache geschrieben hat, so ist schon der Gebrauch der lateinischen Sprache in diesen Abschnitten der *Discorsi e dimostrazioni* in seinem Sinne einem Prioritätsanspruch gegenüber allen

nach 1610 geschriebenen Werken verwandten Inhalts gleich zu achten. Es bedarf nicht der Ausführung, daſs der spät erhobene Anspruch auch in dieser Form für den Historiker nicht ohne weiteres bindend ist. Wenn Simon Marius vier Jahre nach der Entdeckung der Jupiterstrabanten sagt, er habe sie mindestens ebenso früh wie Galilei beobachtet, wenn Baliani im Jahre 1638 drucken läſst, er habe im Jahre 1611 „gefunden", daſs die Schwingungsdauer zweier Pendel sich wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen verhalten, so werden die behaupteten Thatsachen auf Grund solcher Aussagen der Nächstbeteiligten nicht als geschichtlich erwiesen betrachtet werden dürfen; aber ebensowenig wird eine bahnbrechende Lehre Galilei's nicht schon darum als in die Zeit vor 1610 fallend anzusehen sein, weil sie in dem lateinischen Text des einen der drei Bücher *de motu locali* erörtert wird. Es ist nicht nur möglich, sondern höchst wahrscheinlich, daſs bei der Aufnahme des alten Textes in den Zusammenhang des gröſseren Werkes jener nicht unverändert, sondern auf Grund späterer Erkenntnis vielfach ergänzt und umgestaltet zur Wiedergabe gelangte.

Erwiesen ist allerdings, daſs ein aus drei Teilen bestehendes Werk zur Bewegungslehre zur Zeit der Übersiedlung nach Florenz (September 1610) von Galilei seit einiger Zeit in Angriff genommen und mindestens in gröſseren Teilen ausgearbeitet war. Dies Werk wird in seinem Bericht an den Staatssekretär Vinta (7. Mai 1610) unter den dreien genannt, die er zu vollenden hoffte, wenn er durch eine geeignete Stellung am Florentiner Hofe die nötige Muſse gewänne. Galilei spricht hier von den drei Büchern *de motu locali* mit ganz ähnlichen Worten, wie in der Einleitung zu den gleichbenannten lateinischen Abhandlungen der Discorsi von 1638. „Es ist das", sagt er, „eine gänzlich neue Wissenschaft, da kein Anderer weder der Alten noch der Neueren eine von den auſserordentlich vielen bewundernswerten Eigentümlichkeiten entdeckt hat, die ich bei den natürlichen und den gewaltsamen Bewegungen nachweise; und daher kann ich sie mit bestem Recht eine neue und von mir von ihren ersten Anfängen an aufgefundene nennen." Die „neue Wissenschaft von der örtlichen Bewegung", die demnach im Jahre 1610 ihrem Hauptinhalte nach jedenfalls vorhanden war, entspricht ersichtlich auch in ihrer Einteilung den lateinischen Abschnitten des späteren Werks. Ihr drittes Buch beschäftigte sich wie das im „vierten Tag" der Discorsi vorgelegte mit den „gewaltsamen" Bewegungen oder der Lehre von den Proietti. Schon ein volles Jahr früher (am 23. Mai 1609) antwortet ein Brief des Mathematikers Luca Valerio auf eine Zuschrift Galilei's, in der von seinem Werk über die naturgemäſs bewegten Körper und über die geworfenen die Rede gewesen war. Neben den Untersuchungen über die gleichförmig beschleunigte Bewegung muſs also eine in gewissem

Maſse zusammenhängende Wurflehre in Galilei's Handschrift schon im Frühling 1609 vorhanden gewesen sein.

Von Fragen, die ihm in Betreff der Bewegung geworfener Körper noch „übrig bleiben", die also einer Folge bereits erledigter Untersuchungen auf gleichem Gebiet sich anschlieſsen, redet auch ein Brief, den Galilei am 11. Februar 1609 an einen Prinzen des Hauses Medici gerichtet hat. Die weiteren Ausführungen dieses Briefes sind von besonderem Interesse; sie boten bis vor kurzem den einzigen Anhaltspunkt für den Versuch, ohne Rücksicht auf die lateinischen Texte der Discorsi, die Wurflehre vom Jahre 1609 zu rekonstruieren, insbesondere für die Beantwortung der Frage, ob Galilei zu jener Zeit die Parabelform der Wurflinie gekannt hat.

Galilei berichtet dem Prinzen des groſsherzoglichen Hauses: er habe kürzlich gefunden, daſs bei Kanonenschüssen, die von einem hochgelegenen Orte aus in horizontaler Richtung abgefeuert werden, die Kugel immer mit der gleichen Geschwindigkeit von dieser Richtung abweicht und sich der Erde nähert, mag sie durch viel oder ganz wenig Pulver getrieben sein oder auch nur von so viel als eben hinreicht, um zu bewirken, daſs sie den Lauf der Kanone verläſst; er folgert daraus weiter, daſs bei allen horizontal gerichteten Schüssen die Kugel in derselben Zeit die Erde erreicht, mögen nun die Schüsse ihr Ziel in weitester Ferne oder in nächster Nähe treffen, und daſs diese Zeit keine andere ist, als diejenige, in der die Kugel von der Mündung der Kanone aus lotrecht zur Erde fällt. Aber Ähnliches hat er auch für die schräg aufwärts gerichteten Schüsse erkannt; Schüsse dieser Art, die eine Erhebung der Kugel zu gleicher senkrechter Höhe bewirken, deren Bahn also zwischen denselben horizontalen Ebenen liegt, erreichen bei gröſster Ungleichheit der Schuſsweite die Erde, oder die gleiche tiefer gelegene Horizontalebene in derselben Zeit und infolgedessen werden auch die absteigenden Hälften ihrer Bahnen in gleichen Zeiten zurückgelegt, das heiſst in derselben Zeit, wie die horizontal gerichteten Schüsse aus gleicher Höhe[1]).

Diesen Sätzen, die der Kürze wegen als „Gesetz der gleichen Fallzeiten" bezeichnet werden mögen, ist mit höchster Wahrscheinlichkeit zu entnehmen, daſs Galilei, als er sie fand, über das Prinzip des indifferenten Zusammenseins verschiedener Bewegungen desselben Körpers völlig aufgeklärt war; denn die Behauptung, daſs horizontal abgeschossene Kugeln bei gröſster Ungleichheit der horizontalen Geschwindigkeiten in derselben Zeit die Erde erreichen, wie ein Körper, der aus gleicher Höhe frei herabfällt, ist nur ein anderer Ausdruck für die Ansicht, daſs die Bewegung in

---

1) Vergl. Galilei *opere ed.* Alberi, VI, p. 68.

der Richtung der Schwere durch die hinzukommende Bewegung in der Richtung des Schusses in keiner Weise beeinflufst wird, und die Bestimmtheit, mit der GALILEI seine Regel aufstellt, lässt als ausgeschlossen erscheinen, dafs er sie nicht prinzipiell, sondern etwa aus Versuchen abgeleitet hätte, die in dieser Beziehung Sicheres nicht ergeben konnten.

Um die entsprechende Betrachtung auf die schräg aufwärts gerichteten Schüsse anwenden zu können, mufste man überdies gefunden haben, dafs der aufwärts geworfene Körper zum Steigen und Fallen die gleiche Zeit gebraucht. Nach dem Zeugnis von PAOLO SARPI hat GALILEI dies schon vor dem 9. Oktober 1604 erkannt[2]).

Aber GALILEI wufste, als er das Gesetz der gleichen Fallzeiten entdeckte, auch Alles, was zur näheren Bestimmung der beiden Komponenten der Wurfbewegung erforderlich war und damit Alles, was neben dem Prinzip des unabhängigen Zusammenseins der Bewegungen dazu gehörte, die Wurflinie zu konstruieren. Das Gesetz der Fallräume, das die Änderungen der vertikalen Komponente bestimmt, wird als ein jüngst erkanntes in dem Brief an SARPI vom 16. Oktober 1604 angeführt[3]). Noch älter ist wahrscheinlich die Entdeckung des Beharrungsgesetzes in derjenigen Form, in der es noch in den Discorsi von 1638 bei der Konstruktion der Wurflinie zur Verwendung kommt, d. h. in der Beschränkung auf die Bewegung in horizontaler Ebene; aus diesem folgt unmittelbar die Gleichförmigkeit der Bewegung in der Richtung des horizontalen Wurfs und damit Alles, was für die Kenntnis der horizontalen Komponente erforderlich ist. Für die Ableitung dieser dritten Voraussetzung seiner Konstruktion beruft sich GALILEI in der Wurflehre der Discorsi auf die Ausführungen eines vorhergehenden Abschnitts der lateinischen Handschrift; dafs wenigstens in diesem Teil der Gedankengang des 1638 veröffentlichten Textes ein alter, den Paduaner Tagen angehöriger ist, läfst sich durch unzweideutige Äufserungen belegen. Es mag genügen hier darauf hinzuweisen, dafs in einem Brief vom April 1607 CASTELLI als GALILEI's Lehre anführt: „Es bedarf des Bewegenden, damit die Bewegung anfängt, aber dafür, dafs sie fortdauert, genügt, dafs sie keinen Widerstand findet"[4]).

---

2) *Opere di* GALILEI *ed.* ALBERI VIII, p. 29.

3) Dieser Brief ist nach dem in Pisa bewahrten Original zum ersten Mal in FAVARO's, GALILEI *e lo studio di Padova* II, 226 u. f. abgedruckt.

4) Diese zuerst von FAVARO in GALILEO GALILEI *e lo studio di Padova. Firenze* 1883. II, p. 268 veröffentlichte Äufserung ist mir bei der Ausarbeitung meiner Abhandlung über die Entdeckung des Beharrungsgesetzes (Zeitschrift für Völkerpsychologie Bde. XIV und XV) nicht bekannt gewesen. Sie widerspricht scheinbar der dort durchgeführten Auffassung, dafs GALILEI das Prinzip der unver-

Galilei verfügte demnach im Jahre 1609, wo er zuerst von einem Buch über die Wurflehre als einem Bestandteil seines Werkes de motu locali redet, über alle Vorbedingungen für die richtige Konstruktion der Wurflinie; er brauchte nur auf Grund der insgesamt von ihm entdeckten Wahrheiten eine Zeichnung, die das Gesetz der gleichen Fallzeiten veranschaulicht, genau auszuführen, um Wurflinien in Parabelform in beliebiger Zahl vor sich zu sehen; zur abschliefsenden Entdeckung war dann freilich erforderlich, dafs er in seiner Zeichnung die Parabel wiedererkannte; es ist nicht durchaus undenkbar, dafs man dergleichen nicht sieht, selbst dann nicht, wenn in dem vor Augen Liegenden die lange gesuchte Lösung eines Rätsels gegeben ist; wenn aber ein Galilei dreifsig Jahre später sagt: ich habe damals gesehen, was vor meinen Augen lag, so müfsten es Gründe der allerstärksten Art sein, die uns verhindern könnten, ihm zu glauben.

Es sind nun allerdings einige Thatsachen bekannt, die auf den ersten Blick den Zweifel rechtfertigen. In den 1632 veröffentlichten „Dialogen über die beiden Hauptweltsysteme“ fehlt unter den zahlreichen anderweitigen Mitteilungen aus der neuen Bewegungslehre jede Bemerkung über die Parabelform der Wurflinie, aber noch mehr: wo es sich darum handelt, die wirkliche Bahn eines Körpers zu konstruieren, der, während er zur Erde fällt, gleichzeitig an der Rotation der Erde teilnimmt, also um eine Aufgabe, die mit dem Problem der Wurflinie im Wesentlichen übereinstimmt, wird zwar für die Lösung der Aufgabe das Verfahren mitgeteilt, das bei angemessener Ausführung zur Konstruktion einer parabelförmigen Bahn führt, aber statt der Parabel lässt der Salviati der Dialoge durch Zusammensetzung der beiden Bewegungen eine Bewegung im Halbkreis entstehen, und Sagredo bricht über dieses unerwartete Resultat in Jubel aus. Hat nun Galilei in diesem Falle sein besseres Wissen nur verheimlicht oder hat er, als er jene Stelle der „Dialoge“ schrieb und noch später, als er sein Buch veröffentlichte, die wahre Form der Wurflinie nicht gekannt?

Eine zweite, vielleicht noch gröfsere Schwierigkeit bietet die Thatsache, dafs wenige Monate nach der Veröffentlichung der „Dialoge“ Fra

---

änderten Erhaltung der Bewegung in Beschränkung auf die Bewegung in horizontaler Richtung vertreten habe. In Wahrheit beweist auch die Äufserung Castelli's nur, dafs diese Beschränkung, die bei Galilei durch individuelle Veranlassungen bedingt war, von seinen Schülern nicht beachtet wurde, wie ich dies bei Cavalieri und Torricelli nachzuweisen versucht habe. Wegen anderweitiger Äufserungen Galilei's über das Beharren in horizontaler Richtung vergl. die soeben zitierte Abhandlung.

Bonaventura Cavalieri, Galilei's Schüler, die richtige Lösung, die man in den „Dialogen" vergebens sucht, veröffentlicht hat und daſs er dabei durchaus nicht sagt, daſs, was er mitteilt, Galilei's Entdeckung ist. Den beiden Kapiteln zur Bewegungslehre, die Cavalieri seiner Schrift *„Lo Specchio Ustorio overo Trattato delle Settioni Coniche"* eingefügt hat, schickt er allerdings die Bemerkung voraus, daſs, was er in diesen Abschnitten biete, „zum Teil" von Galilei und Castelli, seinen beiden Lehrern, herrühre; im strengen Anschluſs an die Ausführungen des Galilei'schen Dialogs erläutert er alsdann die drei Sätze, die er für seine Konstruktion der Wurflinie verwertet; er läſst also keinen Zweifel darüber aufkommen, daſs seine Ableitung auf Galilei's Gedanken ruht; daſs aber Galilei selbst schon lange vor ihm auf gleichem oder ähnlichem Wege zu demselben Resultat gelangt sei, kann niemand dem Kapitel von der Wurflinie im *„Specchio Ustorio"* entnehmen; vielmehr legt der Umstand, daſs in den hier in Betracht kommenden Darlegungen der Name Galilei nicht genannt wird, die Vermutung nahe, daſs der Verfasser sie als eigene Folgerungen betrachtet wissen will, als den „Teil", der nicht seinen beiden Lehrern gehört.

Damit stimmt die vorläufige briefliche Mitteilung überein, in der Cavalieri unmittelbar vor der Veröffentlichung Galilei von dem Inhalt seiner Schrift in Kenntnis setzt. „Ich habe", schreibt er, „ganz kurz die Bewegung der geworfenen Körper berührt, indem ich zeige, daſs sie bei Ausschluſs des Widerstandes der Luft in einer Parabel stattfinden muſs, sofern Euer Prinzip der Bewegung der schweren Körper vorausgesetzt wird, daſs ihre Beschleunigung der Zunahme der ungeraden Zahlen entspricht, wie sie von der Eins an sich folgen; ich erkläre jedoch, daſs ich zum groſsen Teil[5]) von Euch gelernt habe, was ich in dieser Sache berühre, indem ich zugleich auch meinerseits eine Ableitung für jenes Prinzip anführe."[6]) Auch hier bekennt also Cavalieri, daſs sein Beweis auf Galilei's Lehre von der gleichförmig beschleunigten Bewegung beruht; aber auch aus dieser direkten Mitteilung wird der unbefangene Leser nicht den Eindruck empfangen, daſs er sich bewuſst ist, seine Worte an den Entdecker der parabelförmigen Bahn zu richten.

Daſs endlich Cavalieri in den zuvor erwähnten Ausführungen der „Dialoge" Galilei's wahre Meinung zu finden geglaubt hat, wird durch eine Bemerkung am Schlusse des vorletzten Kapitels seines *„Specchio Ustorio"* vorzugsweise wahrscheinlich. Dem Nachweis, daſs die Krümmung eines Kreises von sehr groſsem Durchmesser von derjenigen einer Parabel und

5) Aus dem *„in parte"* der Schrift ist hier *„in gran parte"* geworden.

6) *Opere di* Galilei *ed.* Alberi vol. IX p. 286.

Hyperbel nicht wesentlich abweichen würde, fügt er hinzu: „Diese Erkenntnis kann denjenigen Befriedigung gewähren, die geglaubt haben, die vom geworfenen Körper bezeichnete Bahn sei eine kreisförmige, denn wenn der betreffende Kreis von erheblicher Gröfse ist, und der Weg des schweren Körpers nur ein kleiner Teil der ganzen Peripherie, würde seine Abweichung von der Parabel nur eine sehr geringe sein.“ Es kann nicht willkürlich sein, in dieser Äufserung eine Bezugnahme auf GALILEI's Betrachtungen in den „Dialogen“ zu suchen, da nirgends sonst mit ähnlicher Bestimmtheit von einer Kreisbewegung geworfener Körper die Rede gewesen war.

II.

Die Ableitung einer Kreisbahn in den „Dialogen“ und CAVALIERI's mindestens verhüllte Erwähnung einer Entdeckung durch GALILEI sind schon mehrfach Gegenstand kritischer Erörterung gewesen; man hat auch bisher nicht unbeachtet gelassen, dafs hier Thatsachen vorliegen, die mit der allgemein angenommenen Entdeckung der Parabelform der Wurflinie vor 1610 nicht ohne weiteres vereinbar sind; es haben jedoch bisher auch diejenigen, die hier eine Schwierigkeit sehen, nicht daran gedacht, deshalb GALILEI's Entdeckung in Frage zu stellen; eine Lösung in diesem Sinne schien ausgeschlossen durch die Antwort GALILEI's auf die vorläufige Mitteilung seines Schülers und durch die weitere Erwiderung CAVALIERI's auf diese Antwort. GALILEI hat im Jahre 1632 aufs Bestimmteste die Entdeckung für sich in Anspruch genommen, CAVALIERI hat in seiner Erwiderung die Thatsache dieser Entdeckung als eine vielen Zeitgenossen wohlbekannte, von ihm selbst nicht bezweifelte bezeichnet, und die Worte, in denen beide Männer bei dieser Gelegenheit sich äufsern, haben den Gedanken, dafs ihre Aussagen wahrheitswidrige sein könnten, nicht aufkommen lassen.

CAVERNI's entgegenstehende Ansicht geht von einer ihm eigentümlichen Auffassung der erwähnten scheinbaren Widersprüche aus. Ihm erscheint nicht die vereinzelte Ausführung in den „Dialogen“ unvereinbar mit dem, was uns sonst über GALILEI's Wurflehre bekannt ist; er sieht vielmehr in jener Auseinandersetzung über die kreisförmige Bahn des auf bewegter Erde fallenden Körpers GALILEI's wahre Ansicht auch über die Form der Wurflinie, die er mit geringen Veränderungen vierzig Jahre hindurch festgehalten hat, und er findet mit diesem Festhalten an der Kreisbahn der geworfenen Körper nichts im Widerspruche als die herrschende Meinung, dafs GALILEI der Entdecker der Parabelform sei und den Anspruch, den in gleichem Sinne der lateinische Text der Discorsi erhebt.

Näher bezeichnet ist die Lehre, zu der sich nach CAVERNI's Auffassung GALILEI bis zum Jahre 1632 bekannt hat, die des NICCOLÒ TARTAGLIA.

Nach diesem besteht die Bewegung des geworfenen Körpers aus reiner gewaltsamer und dieser sich anschliefsender reiner natürlicher Bewegung, die rein gewaltsame aber besteht aus einem geradlinigen und einem krummlinigen Teil; die Krümmung des letzteren ist eine kreisförmige. Wie hier schon angedeutet, leugnet TARTAGLIA in einem anderen Satze seiner Scientia nuova ausdrücklich, dafs die Bewegung des geworfenen Körpers in irgend einem Teil seiner Bahn eine gemischte, d. h. gleichzeitig gewaltsam und natürlich sein könne. Das also wäre nicht nur im Jahre 1609, sondern noch zur Zeit der Veröffentlichung der „Dialoge" im Wesentlichen GALILEI's Vorstellung gewesen und über diese Lehre TARTAGLIA's wäre er nur insofern hinausgegangen, als er in späterer Zeit unter dem Einflusse anderer Forscher ein Zusammensein beider Arten von Bewegungen anerkannt hätte.

Wer nun naiv genug ist zu meinen, dafs man dergleichen nicht als erwiesen betrachten könne, wenn nicht aus einem so langen Zeitraum einige wörtlich anzuführende Äufserungen herbeizuschaffen sind, die eine Denkweise im Sinne der Lehre TARTAGLIA's in unzweideutiger Weise bekunden, der ist mit CAVERNI's Beweisführung rasch zu Ende; denn in Wahrheit giebt es keine solche Belege, und CAVERNI hat auch keine angeführt. Er hat dagegen in einer ungemein weitschweifigen Erörterung auf nicht weniger als 13 dichtbedruckten Seiten grofsen Formats eine Folge von Citaten des verschiedensten Inhalts diskutiert, die Belegen in gewissem Mafse ähnlich sehen und namentlich bei der CAVERNI eigentümlichen Weise, die fremden Worte mit den eigenen Kommentaren ununterscheidbar zu vermischen, den Eindruck hervorrufen, als ob sie jener Behauptung zur Bestätigung dienen können. Diese dürfen als die eigentlichen Fundamente seiner Beweisführung hier nicht unberührt bleiben.

Die Untersuchung beginnt mit den spätestens 1592 geschriebenen Abhandlungen und dem Fragment eines Dialogs, die im Band I der Edizione nazionale unter dem Titel *„de motu"* abgedruckt sind. Wer diese ältesten Aufzeichnungen von GALIEI's Hand ernstlich studiert, wird in ihnen nicht viel mehr als Vorläufer der eigentlich wissenschaftlichen Gedankenentwicklung der Paduaner Periode erkennen; es würde daher für die hier zu erörternde Frage ohne Bedeutung sein, wenn sich in jenen ältesten Schriften Beweise dafür fänden, dafs GALILEI zur Zeit ihrer Entstehung über die Wurflinie nicht anders gedacht hat, als TARTAGLIA; aber selbst hier wird man bei redlichstem Suchen nicht entdecken, was CAVERNI gefunden haben will, die Abhandlungen und Dialoge de motu enthalten nicht allein kein Wort von einer Konstruktion nach TARTAGLIA, sondern überhaupt kein Wort über die Form der Wurflinie und demgemäfs auch keine Andeutung darüber, dafs GALILEI dem mittleren Teil derselben die Kreisform zuschreibt.

Die Pisaner Handschrift läfst ebensowenig erkennen, dafs Galilei — wie Caverni will — im Widerspruch mit Cardano und Benedetti — Tartaglia darin Recht gegeben hat, dafs in keinem Punkte der Wurflinie die Bewegung aus natürlicher und gewaltsamer gemischt sei. Caverni hat für diese Behauptung keinen andern Beleg als die Äufserung, dafs „die Kreisbewegung einer Kugel, deren Centrum mit dem der Welt zusammenfällt, weder eine natürliche noch eine gewaltsame ist".

Ich habe an anderer Stelle gezeigt, dafs diese Äufserung höchst wahrscheinlich mit Galilei's ersten Bemühungen, sich die ewige Dauer der Rotation der Erde begreiflich zu machen, zusammenhängt. Er beachtet, dafs die Teile einer mit der Weltsphäre concentrischen homogenen Kugel aus schwerem Stoff sich durch ihre Rotation dem Centrum der Welt weder nähern, noch von ihm entfernen können, und folgert daraus, dafs eine solche Bewegung neben der natürlichen und der gewaltsamen eine eigentümliche Stellung einnimmt, mit der die dauernde Erhaltung des mitgeteilten Antriebs vereinbar erscheint[7]).

Es bedarf kaum der Erläuterung, aber Galilei erläutert umständlich, dafs das Gesagte sich nicht auf die Rotation einer homogenen oder nicht homogenen Kugel an irgend einer Stelle aufserhalb des Zentrums der Welt bezieht; es kann also auch nicht auf eine kreisförmige Bewegung der geworfenen Körper bezogen werden. Caverni ist kühn genug, diese Beziehung dadurch zu schaffen, dafs er sagt: so ist es ja auch bei den geworfenen Körpern (*cosi aviene dei proietti*); der Leser soll also glauben, Galilei sowohl wie Tartaglia lassen die geworfenen Körper sich in solcher Weise im Kreise bewegen, dafs sie dabei sich dem Mittelpunkt der Erde weder nähern, noch von ihm entfernen!

Dafs in Wahrheit Galilei zu jener Zeit keineswegs im Widerspruch gegen Cardano und Benedetti die Möglichkeit einer „gemischten" Bewegung geleugnet hat, beweisen seine bestimmten Erläuterungen in den Abhandlungen wie in dem Dialog „de motu". Seine Untersuchung über die Bewegung des senkrecht aufwärts geworfenen Körpers kommt zu dem Ergebnis, dafs dieselbe unter dem gleichzeitigen Einflusse der Schwere und der mitgeteilten Kraft von Anfang bis zu Ende, im Steigen wie im Fallen eine gemischte, das heifst aus natürlicher und gewaltsamer zusammengesetzte Bewegung ist[8]). Für den Fall des horizontalen Wurfs aber findet sich in der letzten

7) Vergl. meine Abhandlung über die Entdeckung des Beharrungsgesetzes a. a. O. XV, 74 u. f.

8) *Ed. Naz.* I, p. 322. „Gemischt", das heifst aus natürlicher und gewaltsamer Bewegung zusammengesetzt, wird in der Jugendarbeit (S. 373) auch die Bewegung des schräg aufwärts geworfenen Körpers genannt; hier ist jedoch zweifel-

Abhandlung der Pisaner Handschrift eine Betrachtung über die Mischung oder das Zusammensein der Bewegung in der Richtung der Schwere mit derjenigen in der Richtung des Wurfs, die mit der 46 Jahre später veröffentlichten trotz völlig abweichender Ausdrucksweise im Wesentlichen übereinstimmt. In den Discorsi heifst es: „Sobald der horizontal bewegte schwere Körper die feste Unterlage verläfst, wird er der früheren gleichmäfsigen und unzerstörbaren Bewegung die von seiner eigenen Schwere herrührende Neigung nach unten hinzufügen, es wird demgemäfs eine zusammengesetzte Bewegung entstehen, die ich Wurfbewegung nenne." Und zur Erklärung wird später hinzugefügt: dafs die beiden Bewegungen und ihre Geschwindigkeiten, indem sie sich mischen, sich nicht ändern, stören oder hindern. Dem entspricht in der Jugendarbeit die Erläuterung: „Bewegt sich der geworfene Körper in einer dem Horizont beinahe parallelen Richtung, so kann er sofort sich zu neigen anfangen und dadurch von der geraden Linie des Wurfs abweichen; denn der gewaltsam treibenden Kraft genügt es, dafs sie den Körper vom Anfang der Bewegung entfernt und diese Entfernung wird durch das Neigen nicht gehindert."

Nicht ein Widerstreben gegen die Vorstellung einer gemischten Bewegung im Sinne TARTAGLIA's läfst sich in dieser Äufserung erkennen, sondern vielmehr ein lebhaftes Bemühen, über die Natur und die Ursache der erkannten Mischung zur Klarheit zu kommen.

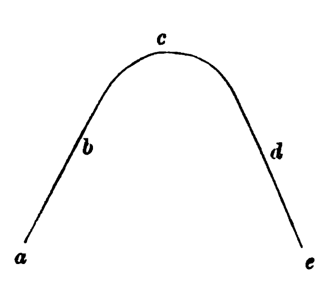
Bei weitem wichtiger war es für CAVERNI's Beweisführung, aus der Blütezeit der Paduaner Professur, speziell aus der Zeit zwischen 1602 und 1609 Belege für seine Behauptung zusammenzustellen. CAVERNI selbst läfst diesem Zeitraum dem Hauptinhalte nach einen grofsen Teil der lateinisch geschriebenen Abschnitte der Discorsi angehören; er glaubt jedoch beweisen zu können, dafs das Gleiche für den Hauptgedanken der Wurflehre ausgeschlossen ist. In Wahrheit bietet auch diese Periode für seine Bemühungen einen leeren Raum, den er mit Vermutungen und Verdächtigungen ausfüllt. Eine höchst seltsame Rolle spielt dabei ein Satz über die Wurflinie, den LIBRI im Jahre 1844 in seiner „Geschichte der mathematischen Wissenschaften in Italien" aus einer Handschrift der Pariser Bibliothèque nationale veröffentlicht hat. Die Handschrift und der Satz rühren nach LIBRI's Angabe von GALILEI's väterlichem Freunde, dem Marchese GUIDUBALDO DAL MONTE her. Die jedenfalls bemerkenswerte Äufserung lautet wie folgt:

„Wenn man eine Kugel mit einer Armbrust oder mit einer Kanone über die Linie des Horizonts hinaus abschiefst oder mit der Hand schleudert,

---

haft, ob der Ausdruck auf die zwiefache Bewegung des einzelnen Punktes zu beziehen ist.

so macht sie beim Sinken denselben Weg wie beim Steigen und die Figur dieses Weges ist diejenige, die unter die Horizontale herabgelassen ein Tau bildet, das nicht angezogen wird, indem dieses Tau wie jene Bewegung aus Natürlichem und Gewaltsamem zusammengesetzt und eine Linie ist, die dem Ansehen nach der Parabel und der Hyperbel ähnlich ist. Das Experiment dieser Bewegung kann man machen, wenn man eine mit Tinte gefärbte Kugel nimmt und sie über die Ebene einer Tafel dahinwirft, die nahezu senkrecht gegen den Horizont steht, es wird dann die Kugel, auch wenn sie springt, die Punkte verzeichnen, aus denen man klar sieht, dafs sie so wie sie aufsteigt, auch absteigt, und so geschieht es mit gutem Grund, weil die Gewalt, die sie beim Steigen nach oben erlangt hat, bewirkt, dafs beim Absteigen in derselben Weise die natürliche Bewegung auf dem Wege nach unten das Übergewicht gewinnt, indem die Gewalt, die von *b* bis *c* die Oberhand hatte, sich erhält und bewirkt, dafs *cd* gleich *cb* wird, weil ferner, indem sie beim Absteigen sich allmählich verliert, die Gewalt bewirkt, dafs *de* gleich *ba* wird, da kein Grund vorhanden ist, dafs von *d* bis *e* die Gewalt gänzlich verloren gehe, denn obgleich sie nach *e* zu sich beständig verliert, bleibt doch noch immer etwas von ihr übrig, und dies ist der Grund, dafs nach *e* zu das Gewicht niemals in gerader Linie geht."[9])



Dafs bei dieser Auseinandersetzung nichts weniger als eine eigentliche Konstruktion der Wurflinie beabsichtigt wird, geht schon daraus hervor, dafs der Verfasser, wie vor ihm CARDANO nur davon redet, welcher Linie die Bahn „dem Aussehen nach ähnlich" (*in vista simile*) ist und dafs er dabei Parabel und Hyperbel zusammenstellt; aber auch das, was er bestimmt behauptet, dafs die beiden Zweige der Wurflinie einander gleich sind und dafs kein Teil derselben geradlinig ist, wird durch seine Worte in ziemlich unbestimmter Weise veranschaulicht, keineswegs bewiesen; nicht ohne Willkür kann man in den wenigen Worten finden, was CAVERNI in ihnen liest: die Meinung, dafs jede zwei Punkte, in denen die beiden Zweige von derselben Horizontalen geschnitten werden, gleiche Geschwindigkeit haben. Das Wort Geschwindigkeit kommt bei DAL MONTE nicht vor, nur von der Übereinstimmung der Form an den korrespondierenden Stellen ist die Rede; dafs

9) Vergl. LIBRI, *histoire des sciences mathématiques en Italie* IV p. 397—98. Dafs das Original von LIBRI genau reproduziert ist, hat Herr Prof. FAVARO die Güte gehabt, in der *Bibliothèque nationale* konstatieren zu lassen.

die letztere nicht erklärlich wäre, wenn nicht die Geschwindigkeiten im Absteigen in der gleichen Weise zunähmen, wie sie im Steigen abnehmen, rechtfertigt die Ergänzung nicht, man könnte mit gleichem Recht aus dal Monte's Satze folgern, daſs er die unveränderte Erhaltung sowohl des horizontalen wie des vertikalen Teils der „gewaltsamen Bewegung" annimmt, weil nur unter dieser Voraussetzung seine Behauptung richtig ist; und doch wird man so fundamentale neue Erkenntnisse nicht zwischen den Zeilen eines Satzes lesen wollen, der, ohne horizontalen und vertikalen Antrieb zu sondern, nur davon spricht, daſs die „Gewalt" sich, wenn auch allmählich abnehmend, doch bis zum Ende erhält.

Inwiefern nun diese handschriftliche Aufzeichnung dal Monte's zu irgend einer Zeit für die Entwicklung der Wurflehre bedeutsam werden konnte, läſst sich nicht mehr ermitteln; es ist nicht bekannt, daſs irgend ein sachkundiges Auge vor Libri sie gesehen hat. Daſs ihr Inhalt Gegenstand mündlicher Unterredung oder brieflicher Erörterung zwischen dal Monte und Galilei gewesen, ist nicht unwahrscheinlich. Cavalieri erzählt, daſs etwa im Jahre 1622 der Ingenieur Muzio Oddi ihm mitgeteilt, daſs Galilei und dal Monte gemeinsam ein Experiment über die Form der Wurflinie angestellt hätten. Dies müſste vor dem Jahre 1607 geschehen sein; denn dal Monte ist im Januar 1607 gestorben. Es wäre denkbar, daſs der Versuch eben der gewesen ist, den dal Monte beschreibt, denn Galilei führt in den Discorsi von 1638 einen ähnlichen an, allerdings als von ihm selbst erfunden und als ein Mittel, Parabeln zu zeichnen, während dal Monte nur von einer der Parabel und Hyperbel ähnlich sehenden Linie redet; auch der frei herabhängenden nur an den beiden Enden befestigten Kette wird bei gleicher Gelegenheit von Galilei die Parabelform zugeschrieben.

Versucht man ohne Voreingenommenheit aus diesen späten Angaben Galilei's, der Äuſserung Oddi's und dem Inhalt der handschriftlichen Aufzeichnung dal Monte's kombinierend weiteres über einen Zusammenhang zwischen Galilei's und dal Monte's Forschungen zur Wurflehre zu entnehmen, so ergiebt sich mancherlei mögliche Deutung, aber kein geschichtlicher Aufschluſs. Giebt man Erwägungen der Wahrscheinlichkeit Raum, so ist es schwer, bei einem Zusammenwirken beider Männer — welcher Art es auch gewesen sei — die entscheidende Anregung dem älteren zuzuschreiben. dal Monte's Verdienste liegen auf anderem Gebiet; auf die fragmentarische Notiz über die Wurflinie beschränkt sich, was wir von seiner Beschäftigung mit Problemen der Bewegungslehre wissen; dagegen konnte Galilei, als dal Monte starb, auf beinahe zwei Jahrzehnte unausgesetzter und erfolgreichster, jenen Problemen gewidmeter Forschung zurück-

blicken: wir müssen alle Vorstellungen, die über den Entwicklungsgang seines Denkens, zu denen die bekannten Daten Veranlassung geben, bei Seite schieben, um zu glauben, daſs ihm Betrachtungen zur Wurflehre, wie dal Monte sie niedergeschrieben, im Jahre 1606 noch rationell, geschweige lehrreich erscheinen konnten.

Eine völlig entgegengesetzte Auffassung der Sachlage hat Caverni in seiner „Geschichte" nicht etwa als die besser begründete und wahrscheinlichere hingestellt, sondern als die allein zulässige einer frei erfundenen Darstellung des geschichtlich nicht zu ermittelnden Verlaufs der Dinge zu Grunde gelegt. Für ihn gilt als ausgemacht, daſs dal Monte's Handschrift bald nach 1607, sei es im Original, sei es in Abschrift, Galilei in die Hände gefallen ist, und daſs er darin alsbald Sätze der Akustik, der Festigkeits- und Bewegungslehre gefunden hat, die er bei passender Gelegenheit sich zu eigen zu machen gedachte; da er aber bei solchem Vorgehen befürchten muſste, von Leuten, die den Inhalt der Handschrift kennen gelernt, zur Rechenschaft gezogen zu werden, habe Galilei (so denkt sich Caverni), um jedem Verdacht zu begegnen, die Erzählung von den gemeinsam ausgeführten Versuchen verbreitet.

Es paſst zu dieser Art, Geschichte zu erfinden, daſs Caverni durch kleine Auslassungen und Ergänzungen die Dokumente verbessert. Von „einem Versuch" (*qualche esperienza*) hat Cavalieri reden hören, von „Versuchen mit Kanonen" läſst ihn Caverni hören; er hat es dann um so bequemer sie als erdichtet erscheinen zu lassen, denn von Versuchen mit Kanonen hätten auch Andere hören müssen, und doch „haben wir keine sichere Urkunde, keinerlei Bericht, der dergleichen auch nur andeutete".

Aber auch dal Monte's entscheidenden Text hat Caverni nach seinen Zwecken korrigiert; er hat die Worte *et iperbola* hinter *parabola* weggelassen; daſs auf diese Weise das Stückchen Wahrheit, das in dal Monte's Worten gefunden werden kann, um ein Erhebliches vergröſsert wird, kann man in Caverni's Darstellung sehen, nach der dal Monte seinem Nachfolger nicht viel mehr als den Beweis für die erkannte Wahrheit zu liefern überlassen hätte; um so stärker tritt nun in jener früheren Periode Galilei's Befangenheit hervor, denn bei aller Neigung sich anzueignen, was er Gutes in dem Nachlaſs des Freundes findet, verschmäht er dessen besten Teil, und dreiſsig Jahre vergehen, bis er, zu besserer Einsicht gelangt, sich entschlieſst, mit dem Übrigen aus dal Monte's Manuskript auch die Anweisung zum Zeichnen der Parabel in seine Dialoge hinüber zu nehmen.

„Galilei verschmäht die Parabel-Ähnlichkeit", die ihm dal Monte offenbart, er „lehnt sie entschlossen ab, als der Freund sie ihm in den Spuren der mit Tinte gefärbten Kugel auf seiner geglätteten Tafel zeigt" —

so kann man es gedruckt bei CAVERNI lesen.[10]) Und doch existiert eine derartige abweisende Äufserung GALILEI's in keinerlei Form, weder in seinen eigenen Aufzeichnungen aus früherer oder späterer Zeit, noch in dem Bericht eines Zeitgenossen, weder mit Bezugnahme auf DAL MONTE's Worte, noch in irgend einem anderen Zusammenhang. Sie ist ein Produkt der Phantasie des Historikers, der hier wie bei vielen anderen Gelegenheiten es für überflüssig findet, seinen Leser darüber aufzuklären, dafs er in der Form eines geschichtlichen Berichts nichts weiter bringt als einen Bericht darüber, wie er sich den Verlauf der Vorgänge denkt.

In ähnlicher irreführender Darstellungsweise hat CAVERNI mitgeteilt, wie seines Erachtens die Anregung, die GALILEI aus DAL MONTE's nachgelassenem Heft empfangen, für seine Wurflehre fruchtbar geworden ist; eingehend schildert er, wie aus DAL MONTE's Sätzen der Gedankengang hervorgewachsen ist, der GALILEI im Jahre 1609 das Gesetz der gleichen Fallzeiten begreifen oder vielmehr ahnen liefs; denn der Tendenz gemäfs, die CAVERNI bei dieser Fiktion verfolgt, läfst er das Gesetz nicht, wie es uns in GALILEI's Worten entgegentritt, als eine notwendige Folgerung, sondern als eine unerweisliche Vermutung erscheinen; nur so konnte das Gesetz der gleichen Fallzeiten in demselben Kopfe Raum finden, der die Parabelähnlichkeit der Wurflinie verwirft, weil er auch jetzt noch an TARTAGLIA's Lehre festhält.

CAVERNI hat nicht übersehen, dafs die wichtigen Erkenntnisse, die der Brief an den Prinzen MEDICI enthält, in sehr viel einfacherer Weise aus dem Prinzip der Zusammensetzung der Bewegungen abzuleiten waren; er glaubt jedoch beweisen zu können, dafs GALILEI über die „gemischten Bewegungen" erst erheblich später zur Klarheit gekommen ist; erst 1624 im Brief an INGOLI wiederholt er die Behauptungen über die Unabhängigkeit der Fallzeit von der Wurfweite mit dem Zusatz, dafs dies geometrisch zu erweisen sei; eine ähnliche Bemerkung ist in dem Brief von Februar 1609 nicht zu finden; dem scheint zu entsprechen, dafs die Lehre vom indifferenten Zusammensein der ungleichartigen Bewegungen im Brief an INGOLI zum ersten Mal klar vorgetragen wird; in die Zeit kurz vor 1624 glaubt deshalb CAVERNI die Entdeckung des neuen Prinzips verlegen zu bedürfen. Der Brief an INGOLI knüpft die Erläuterung über diesen Gegenstand an die Untersuchung über die Bewegungserscheinungen auf bewegter Erde; CAVERNI nimmt demgemäfs an, dafs die Beschäftigung mit der copernicanischen Lehre GALILEI zur Entwicklung seines Prinzips die Veranlassung gegeben habe; das Bemühen um die Widerlegung der physikalischen

10) A. a. O. S. 524, 531.

Gegengründe gegen die Erdbewegung führte ihn dazu, zu begreifen, dafs ein fallender Körper, der zugleich die Bewegung des ihn umgebenden Raumes teilt, jede dieser Bewegungen in solcher Weise ausführt, als ob die andere nicht vorhanden wäre; er begriff, dafs deshalb der Körper, der vom Mastkorb herabfällt, auf bewegtem Schiffe ganz ebenso wie auf ruhendem am Fufse des Mastes zur Ruhe kommt, und nun erst, meint CAVERNI, konnte er auch als notwendig begreifen, was er in Betreff der gleichen Fallzeiten im Jahre 1609 nur vermutet hatte.

So wahrscheinlich es ist, dafs die intensive Beschäftigung mit der Lehre des COPERNICUS in solchem Sinne für GALILEI's allgemeine Bewegungslehre fruchtbar geworden ist[11]), so befremdend mufs für Jeden, der sich um seine wissenschaftliche Biographie bekümmert hat, die Vorstellung sein, dafs dieser Grundgedanke dem Jahre 1624 angehöre, also in den vorhergehenden dreifsig Jahren ihm fremd geblieben sei, während deren die Lehre von der Erdbewegung und die Widerlegung ihrer Gegner für GALILEI ein Hauptgegenstand des Nachdenkens gewesen ist.

Es ist nicht nötig, hier den Widersinn einer Chronologie der GALILEI'schen Entdeckungen nachzuweisen, die den Zeitpunkt der erlangten neuen Einsicht mit dem Datum der ersten Veröffentlichung zusammenfallen läfst, die also auch die Entdeckung der Fallgesetze etwa in sein 65. Lebensjahr verlegen würde, wenn nicht ein zufälliger Weise erhaltener Brief uns darüber aufklärte, dafs das wichtigste dieser Gesetze GALILEI im Jahre 1604 bekannt war; ein ähnlicher Zufall gestattet uns nachzuweisen, dafs GALILEI wenigstens 14 Jahre vor dem Brief an INGOLI die Bewegungserscheinungen auf bewegter Erde nach dem Prinzip des indifferenten Zusammenseins der Bewegungen gedeutet hat; in seinen Randglossen zur Schrift des LODOVICO DELLE COLOMBE gegen die Bewegung der Erde[12]) sind die physikalischen Argumente des Verfassers gegen die Rotationsbewegung in aller Kürze genau so beantwortet, wie später im Brief an INGOLI und in den „Dialogen über die beiden Hauptweltsysteme". COLOMBE's Schrift ist als Erwiderung auf den *Nuncius sidereus* ohne Zweifel im Jahre 1610 entstanden und GALILEI's Randglossen können nicht viel später geschrieben sein; denn sie enthalten in wenigen andeutenden Worten eine Skizze der Kritik, die GALILEI im Juli 1611 im Brief an GALLANZONI ausgeführt hat. Will man nun nicht nach CAVERNI's Vorgang annehmen, dafs etwa COLOMBE's thörichtes Buch GALILEI die erste Veranlassung gegeben hätte, sich mit TYCHO BRAHE's Gegenbeweisen und insbesondere mit der Erörterung der Bewegungs-

---

11) Ich habe die gleiche Auffassung 1884 eingehend erörtert.

12) *Edizione Nationale* III, p. 251 u. f.

erscheinungen auf bewegten Schiffen zu beschäftigen, sieht man vielmehr, wie es näher liegt, die Antworten, die er dem Peripatetiker erteilt, als Früchte einer im wesentlichen abgeschlossenen Lehre an, so fällt auch der Grund weg, vorauszusetzen, dafs GALILEI im Jahre 1609 gefehlt habe, was ihm ein Jahr darauf zu Gebote stand, dafs also das Gesetz der gleichen Fallzeiten sich zu jener Zeit nicht in der oben[13]) angedeuteten Weise hätte finden und beweisen lassen und dafs es dafür einer Ableitung aus DAL MONTE's Sätzen bedurft hätte, für die man weder geschichtliche noch psychologische Gründe anführen kann.

Der Erörterung über den Brief von 1609 schliefsen sich bei CAVERNI Mitteilungen über ein bisher nicht gedrucktes Fragment an, das angeblich ungefähr der gleichen Zeit entstammt. Das GALILEI zugeschriebene Schriftstück enthält in einer Folge von Kapitelüberschriften den Plan für die Bearbeitung artilleristischer Aufgaben. Unter den 14 Kapiteln sollte das vierte die Frage beantworten: ob die Kugel sich in gerader Linie bewegt, wenn sie nicht in senkrechter Richtung abgeschossen wird, das fünfte von der Bahn handeln, die die abgeschossene Kugel beschreibt. Wären mit den Überschriften auch die Kapitel erhalten und gehörten in Wahrheit sowohl die Aufgaben wie die Lösungen der Zeit der Entstehung derjenigen Wurflehre an, von der GALILEI dem Mathematiker LUCA VALERIO berichtet, so müfste in ihnen die *Instantia exclusiva* für die Entscheidung der hier erörterten Streitfrage gegeben sein. In der That scheint ein Zweifel darüber, dafs GALILEI zu jener Zeit über die Lehre TARTAGLIA's nicht hinaus gekommen war, nicht gestattet, wenn man als verbürgt betrachten darf, was CAVERNI von der Beantwortung der vierten und fünften Frage berichtet. „Diese beiden Aufgaben", schreibt er, „wurden von GALILEO mit TARTAGLIA's Argumenten gelöst. Was die vierte betrifft, so sieht man in der That die in der zweiten Voraussetzung des zweiten Buchs der *Scientia nuova* (TARTAGLIA's) angeführte Betrachtung in den Worten wiedergegeben, mit denen SIMPLICIO die Frage beantwortet: Wie lange dauert es nach der Trennung von der Hand der Werfenden, dafs der geworfene Körper nach unten abzuweichen beginnt? „Ich glaube", erwidert er, „dafs er sofort beginnt, denn da er nichts hat, was ihn stützt, ist es unmöglich, dafs die eigene Schwere nicht wirkt." „Hier wird also keine Antwort aus dem Jahre 1609 mitgeteilt, sondern den „Dialogen" der Aufschlufs darüber entnommen, wie GALILEI im Jahre 1609 geantwort haben wird. Dabei bleibt nur unbeachtet, dafs SALVIATI's an SIMPLICIO gerichtete Frage sich mit der Überschrift des

---

13) S. S. 582.

vierten Kapitels keineswegs deckt und daſs der SIMPLICIO der „Dialoge" niemals die GALILEI eigentümlichen neuen Gedanken und Betrachtungsweisen vertritt; man darf also mit gutem Recht bezweifeln, daſs die angeführte Antwort dem vollen Inhalt jenes vierten Kapitels entspricht.

Unmittelbar nach dem Zitat fährt CAVERNI fort: „In voller Übereinstimmung mit diesen Prinzipien (TARTAGLIA's) löst GALILEO die fünfte der vorgelegten Fragen, indem er sagt, (*dicendo*) daſs die von der Kugel in ihrer Bewegung beschriebene Linie zum Teil der Art ist, daſs man sie für eine gerade halten kann, und zum Teil offenbar gekrümmt und der gekrümmte Teil wird ein Teil einer Kreisperipherie sein, wie man in TARTAGLIA's Buch von der neuen Wissenschaft liest."

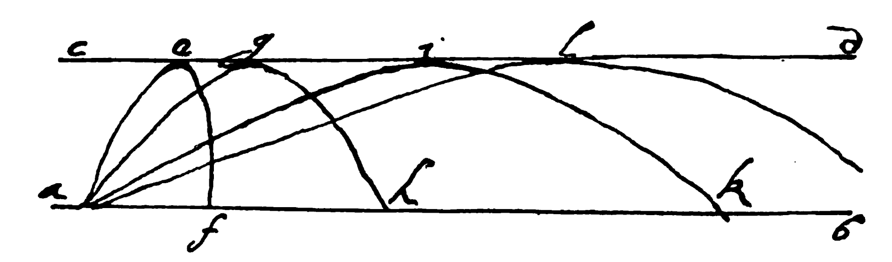
So steht es wörtlich auf Seite 519 des vierten Bandes der CAVERNI'schen Geschichte, freilich ohne Anführungszeichen und ohne Angabe einer Quelle, aber doch mit so unzweideutiger Berufung auf GALILEI's Worte, daſs der Leser schon ein hartnäckiger Zweifler sein muſs, um nicht zu glauben, es existieren Bruchstücke einer Ausführung jener Kapitel und diesen sei die den Streit entscheidende Antwort entnommen. Und dennoch duldet die innere Unwahrscheinlichkeit einer solchen Lösung den Glauben nicht!

Die im Jahre 1898 erfolgte Veröffentlichung des 8. Bandes der Edizione Nazionale der Werke GALILEI's und in diesem der sämtlichen bisher nicht gedruckten handschriftlich erhaltenen Fragmente zur Bewegungslehre beseitigt jede Unklarheit. Das von CAVERNI besprochene Fragment findet sich auf S. 424. Es enthält, wie CAVERNI's Abdruck, die 14 Kapitelüberschriften, aber keine weitere Angabe über die Ausführung; es findet sich kein zweites Fragment, das über den Inhalt der Kapitel Aufschluſs gäbe, geschweige CAVERNI's Aufschluſs bestätigte. Es unterliegt also keinem Zweifel, daſs unter den Handschriften der Biblioteca nazionale in Florenz eine handschriftliche Aufzeichnung, der die Lösung der fünften Frage zu entnehmen wäre, nicht erhalten ist. Auch hier hat demnach CAVERNI in dem, was er GALILEI sagen läſst, nur nochmals die eigene Meinung zum Ausdruck gebracht. Solche Beweisführung bedarf keines Kommentars.

III.

CAVERNI's Versuch zu beweisen, daſs GALILEI in der Periode seiner gröſsten Forschungen und noch darüber hinaus in der Wurflehre an der rohen Vorstellung seines Vorgängers festgehalten, mit ihm auf jede mechanische Begründung dieser Vorstellung verzichtet hat, ist miſslungen; die einzige in Wahrheit aus diesem Zeitraum erhaltene Äuſserung ist mit der Vorstellung, daſs die Wurflehre von 1609 im wesentlichen die des vierten

Tages der Discorsi gewesen sei, einfach vereinbar. Es mag hier nachträglich bemerkt sein, daſs auch die dem Brief an den Prinzen MEDICI beigefügte Originalzeichnung der Vorstellung widerspricht, daſs GALILEI im Februar 1609 noch an eine Kreisbahn der geworfenen Körper geglaubt habe. Diese Zeichnung ist in ALBERI's Ausgabe[14]) ziemlich gut nachgebildet. Herr Professor FAVARO hat die groſse Liebenswürdigkeit gehabt, mir für den Zweck dieser Veröffentlichung ein von ihm selbst in Florenz genommenes Facsimile zur Verfügung zu stellen. Der beistehende Abdruck wird deutlich genug erkennen lassen, daſs, wenn je zuvor TARTAGLIA's Bild der Wurflinie für GALILEI etwas Verführerisches gehabt hat, dies im Frühjahr 1609 nicht mehr der Fall gewesen ist.



Es bleibt zu untersuchen, in wiefern ein Beweis im entgegengesetzten Sinne den späteren Äuſserungen zu entnehmen ist, in denen GALILEI den auf rotierender Erde fallenden Stein einen Kreisbogen beschreiben läſst. CAVERNI hat darauf aufmerksam gemacht, daſs mit dem, was in dieser Beziehung die „Dialoge" von 1632 ausführen, der 8 Jahre früher geschriebene Brief an INGOLI übereinstimmt. „Der Stein im Mastkorb", heiſst es hier, „bewegt sich, wenn das Schiff im Fahren begriffen ist, mit dem gleichen Antrieb wie das Schiff, und dieser Antrieb geht nicht verloren, weil derjenige, der den Stein festhielt, die Hand öffnete und ihn fallen lieſs, sondern erhält sich unzerstörbar in ihm, so daſs er vermittelst dieses Antriebs imstande ist, dem Schiffe zu folgen; durch die eigene Schwere aber, die von jenem nicht behindert wird, bewegt er sich abwärts, indem er aus beiden eine einzige[15]) Bewegung (und vielleicht auch eine kreisförmige) zusammensetzt, die in die Quere geht und nach der Richtung geneigt ist, in der das Schiff sich bewegt[16])."

---

14) Vergl. *Opere di* G. GALILEI *ed.* EUGENIO ALBERI Bd. VI, Tav. II, Fig. 1.

15) ALBERI's Ausgabe liest hier unverständlich *un bel moto;* die *Edizione nationale,* in deren Band VI der Brief an INGOLI zum ersten Male in korrektem Text abgedruckt ist, hat *un solo moto.*

16) *Ed. nazionale* VI, p. 546.

Offenbar wird durch den Ausdruck *et forse anco circolare* wenigstens als möglich bezeichnet, was die „Dialoge“ eingehender erörtern; man wird jedoch diese Übereinstimmung nicht so auffassen dürfen, als ob hier zwei voneinander unabhängige, durch eine Reihe von Jahren getrennte Kundgebungen vorliegen, die für ein Festhalten der gleichen Meinung während eines längeren Zeitraumes zeugen. Die Ausarbeitung der „Dialoge“ ist nach GALILEI's Aussage vor der Inquisition 10 bis 12 Jahre vor dem April 1633, also zwischen 1621 und 1623 in Angriff genommen, der Brief an INGOLI ist im Herbst 1624 begonnen und vollendet; er ist also geschrieben, nachdem ein Teil der behandelten Gegenstände bereits für die „Dialoge“ bearbeitet war; eine nahezu gleichzeitige Entstehung der in beiden Schriften enthaltenen Erörterungen über die vermeintlichen Beweise gegen die tägliche Bewegung der Erde ist daher vorzugsweise wahrscheinlich; dem entspricht, dafs gerade in diesen Abschnitten beider Schriften vielfach ähnliche, ja bis auf den Wortlaut übereinstimmende Ausführungen gefunden werden[17]. So ist auch in den Worten „vielleicht auch kreisförmig“ nur in gewissermafsen verdichtetem Ausdruck wiederholt, was in den „Dialogen“ umständlich teils gesagt, teils umschrieben wird. Es wird also genügen, auf die entscheidende Stelle der letzteren näher einzugehen, um zugleich zu erläutern, was die Äufserung des Briefes an INGOLI bedeutet.

Die Erörterung der „Dialoge“[18] mufs den aufmerksamen Leser durch einen gleich in den ersten Sätzen enthaltenen Widerspruch befremden. Klar und bestimmt wird von SALVIATI auseinandergesetzt, wie man konstruierend verfahren mufs, um die Beschaffenheit der Linie zu finden, die der fallende und zugleich an der Rotation der Erde teilnehmende Stein beschreibt; mit besonderem Nachdruck wird hervorgehoben, dafs für den Zweck dieser Konstruktion es nicht genüge zu wissen, dafs die Bewegung des fallenden Körpers eine beschleunigte, auch nicht dafs die Beschleunigung eine fortwährende sei, sondern vielmehr gewufst werden müsse, nach welchem Verhältnis die Beschleunigung des fallenden Körpers erfolgt; auf SAGREDO's Befragen erklärt dann SALVIATI, dafs der gemeinsame akademische Freund (GALILEI) dies Verhältnis entdeckt habe, doch würde es eine zu grofse Abschweifung erfordern, wenn er darauf bei dieser Gelegenheit eingehen wollte. So wird die Erörterung über das Verhältnis der Beschleunigung mit anderen Dingen für eine spätere Zusammenkunft aufbewahrt[19],

---

17) Vergl. Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme. Übersetzt und erläutert von E. STRAUSS. Leipzig 1891. XLIV u. f.

18) *Ed. nazionale* VII, p. 186 u. f. 19) Ebenda p. 190.

es kommt also das, was soeben als für die Ausführung der Konstruktion, d. h. für die Lösung der Aufgabe unerläfslich bezeichnet worden, thatsächlich nicht zur Sprache, man erfährt nichts über das von dem akademischen Freund entdeckte Gesetz, und trotzdem wird die Konstruktion in Angriff genommen. Dafür scheint es nun plötzlich genügend zu wissen, dafs die Zunahme der Geschwindigkeit eine kontinuierliche ist und dafs infolge dessen der fallende Körper von der Ruhelage bis zu irgend einer bestimmten Geschwindigkeit alle dazwischen liegenden Grade der Langsamkeit durchlaufe; es wird gezeigt, dafs infolge dessen die Bahn des fallenden Steins sich von der parallel der Erdoberfläche gezogenen Kreislinie in um so stärkerem Verhältnis entfernen mufs, je weiter der fallende Körper in dieser Resultierenden fortschreitet. Dadurch und durch die weitere Forderung, dafs die Linie der aus Erdrotation und vertikalem Fall zusammengesetzten Bewegung im Mittelpunkt der Erde endigen mufs, erscheint die Beschaffenheit dieser Linie bestimmt. Dafs sie das in Wirklichkeit nicht ist, geht aus SALVIATI's einleitender Überlegung unmittelbar hervor; denn das Mafs der zunehmenden Abweichung von derjenigen Kreislinie, die der Stein in der Ruhelage beschreiben würde, wird nicht bestimmt, und kann mit den gegebenen Voraussetzungen nicht bestimmt werden. Nicht als erwiesen, sondern nur als sehr wahrscheinlich wird daher hingestellt, dafs die gesuchte, auf der Höhe des Turmes beginnende und im Mittelpunkt der Erde endigende Linie eine Kreislinie ist; bewiesen wird nur, dafs, wenn dies der Fall wäre, sich drei merkwürdige Konsequenzen ergeben müfsten: die wirkliche Bewegung des fallenden Körpers, der an der Bewegung der Erde teilnimmt, ist als einfache Kreisbewegung eine Bewegung genau derselben Art wie die des auf dem Turme ruhenden, er bewegt sich weder mehr noch weniger, als wenn er fortwährend auf dem Turme geblieben wäre, denn die Bogen, die er in letzterem Falle durchlaufen haben würde, sind genau denjenigen gleich, die er als fallender Körper durchläuft, und daraus folgt als drittes Wunder: die wahre und wirkliche Bewegung des Steins wird überhaupt nicht beschleunigt, sie ist vielmehr immer gleichmäfsig und einförmig, weil alle gleichen Bögen beider Peripherien in gleichen Zeiten durchlaufen werden.

Nachdem SALVIATI diese Sätze geometrisch abgeleitet, erinnert er nochmals daran, dafs der Wert dieses Beweises von der Wahrheit seiner unerwiesenen Voraussetzung abhängt; das ist offenbar der Sinn seines Schlufsworts: „dafs aber die Sache in Bezug auf die Bewegung der fallenden Körper sich genau so verhält, will ich für jetzt nicht behaupten [hier hat man das *forse circolare* des Briefs an INGOLI]; wohl aber sage ich, dafs, wenn die von dem fallenden Körper beschriebene Linie nicht genau diese

ist, sie ihr doch aufserordentlich nahe kommt". SAGREDO aber überhört den Vorbehalt und zieht mit besonderer Genugthuung aus dem Gesagten den Schlufs, dafs infolge der Bewegung der Erde es in der Natur überhaupt keine geradlinige Bewegung mehr giebt, und dafs nun selbst diejenige Funktion, die der geradlinigen Bewegung bisher zugestanden war, die Zurückführung der getrennten Teile zu dem Ganzen, dem sie angehören, auf die Kreisbewegung übertragen wird.

Zieht man in Betracht, dafs demnach für die Zusammensetzung der beiden Bewegungen das wichtigste Erfordernis, die Kenntnis der Fallbeschleunigung, absichtlich unbenutzt bleibt und dafs daher auch auf eine Untersuchung darüber von vornherein verzichtet wird, ob die vermutete Kreisform der Resultierenden mit dem Gesetz der ungeraden Zahlen im Einklang ist[20]), so wird man die gegebene Lösung, die in Wahrheit die Umgehung einer Lösung ist, kaum als eine ernsthafte ansehen können. Als eine Fiktion hat GALILEI selbst sie bezeichnet. Als PIERRE CARCAVY ihm im Jahre 1637 die Bedenken eines Freundes gegen die Scheinkonstruktion der „Dialoge" mitgeteilt hatte, erwiderte GALILEI: „dafs durch Mischung der geradlinigen Bewegung des fallenden Körpers mit der gleichförmig kreisförmigen der täglichen Bewegung ein Halbkreis erhalten werde, der im Mittelpunkt der Erde endigt, wurde scherzweise gesagt, wie dies offenbar daraus hervorgeht, dafs es als eine Grille und ein wunderlicher Einfall (*un capriccio e una bizzarria*) bezeichnet wird, das will sagen *jocularis quaedam audacia*. Ich wünsche deshalb, dafs mir in dieser Beziehung Dispens erteilt wird, umsomehr als diese — wie ich sagen darf — poetische Fiktion zu jenen drei unerwarteten Konsequenzen führt".

Dieser Erklärung fügt GALILEI in seinem Brief vom 5. Juni 1637 die weitere hinzu: dafs bei Beschränkung auf denjenigen Teil der beschriebenen Kurve, der über der Oberfläche der Erde liegt, er kein Bedenken trage, sie als eine parabolische Linie zu bezeichnen, da er behaupte, dafs es solche Linien seien, die von den geworfenen Körpern beschrieben werden.

Nach CAVERNI führt hier GALILEI nachträglich unehrlicher Weise als eigenen Gedanken ein, was er inzwischen von CAVALIERI gelernt hat. Man kann diese Deutung in voller Überzeugung zurückweisen und doch die Frage nicht unterdrücken: wenn GALILEI das wufste, als er seine Kreislinie erdichtete, warum hat er im „Dialog" die ernste Wahrheit verschwiegen, die doch sicher nicht weniger interessant war als seine poetische Fiktion?

---

20) STRAUSS („Dialog" S. 526) hat sich der Mühe unterzogen, geometrisch nachzuweisen, dafs dies nicht der Fall ist.

Auch dafür ist die Antwort mit ziemlicher Sicherheit GALILEI's eigenen Worten zu entnehmen. Seine „Dialoge über die beiden Weltsysteme" sind nachweislich während eines längeren Zeitraums entstanden und im Verlauf dieser Zeit hat er den Plan für die Anordnung seines Werks mehrfach geändert. Die hier in Betracht kommende Stelle beweist, dafs GALILEI, als er sie schrieb, die Absicht hatte, die wichtigsten zur Bewegungslehre gehörigen Ausführungen in einem besonderen Werk zu veröffentlichen und in die vorher zu vollendenden „Dialoge über die Weltsysteme" aus dem gleichen Gebiet nur soviel aufzunehmen, als zum Verständnis unerläfslich war. Auf den „Traktat von der Bewegung" wird deshalb der wifsbegierige SAGREDO verwiesen, als er näheres über das Gesetz der Fallräume zu erfahren wünscht. Denkt man sich den hier als bereits abgeschlossene Schrift erwähnten Traktat als identisch oder doch dem Hauptinhalte nach übereinstimmend mit den lateinisch geschriebenen Abschnitten der Discorsi von 1638, so machen schon die bekannten einleitenden Worte dieses Textes verständlich, dafs von den „Dialogen über die Weltsysteme" nach dem ursprünglichen Plane eine Erörterung sowohl über das Fallgesetz wie über die Wurflinie ausgeschlossen blieb; denn das Gesetz der ungeraden Zahlen und die Parabelform der Wurflinie werden in diesen Worten unter allen übrigen neuen Erkenntnissen GALILEI's mit höchstem Nachdruck als Wahrheiten hervorgehoben, „von denen bis dahin Niemand gewufst habe". War GALILEI gesonnen, ein zweites Werk mit solcher Einführung an die Öffentlichkeit zu bringen, so konnte er nicht die Lehren, die dort als völlig neue dargeboten werden, in einem anderen Buche im Voraus gelegentlich zur Sprache bringen wollen. Und daraus ergab sich ohne weiteres, dafs er auch auf eine klare und korrekte Ausführung der hier besprochenen Konstruktion verzichten mufste.

Es liegt nahe, gegen diese Auffassung geltend zu machen, dafs trotz des anfänglich ausgesprochenen Verzichts die „Dialoge über die beiden Weltsysteme" an späterer Stelle nicht nur eine Ableitung der Fallgesetze, sondern auch umständliche Ausführungen über zahlreiche andere Probleme der Bewegungslehre enthalten; die nähere Prüfung ergiebt jedoch, dafs man es hier nicht mit ursprünglich beabsichtigten Ergänzungen, sondern mit Einschaltungen zu thun hat, die mit dem ersten Plan des Werks in unverhülltem Widerspruche stehen. Nachdem im „zweiten Tag" der „Dialoge" die Einwendungen gegen die tägliche Bewegung der Erde gründlich durchgenommen sind und bereits der Übergang zur jährlichen Bewegung vorbereitet ist, kehrt der Dialog noch einmal in ziemlich weitläuftigen Erörterungen zu den soeben behandelten Gegenständen zurück. Dieselben knüpfen sich an eine überaus scharfe Zergliederung der schon 1615 er-

schienenen *Disquisitiones mathematicae* CHRISTOPH SCHEINER's, aber ohne Zweifel war es nicht diese dürftige Schrift und der Wunsch, sie nicht unwiderlegt zu lassen, was GALILEI veranlafste, auf die bereits erledigten Beweisgründe nochmals einzugehen, sondern die heftigen Angriffe SCHEINER's in der erst 1631 veröffentlichten *Rosa Ursina*. Den erbitterten Gegner als Ignoranten erscheinen zu lassen, ist der offenkundige Zweck der Einschaltung. SCHEINER selbst hat den Verdacht ausgesprochen, dafs GALILEI die gegen ihn gerichtete Kritik unter Umgehung der Zensur in das druckfertige Manuskript aufgenommen habe. Jedenfalls werden nicht leicht in anderer Weise als durch die Annahme einer Entstehung der Einschaltung längere Zeit nach der Vollendung der ersten Redaktion des zweiten Tages die vielfachen Wiederholungen und die Widersprüche im letzten Dritteil eben dieses „Tages" verständlich.

Um SCHEINER blofszustellen, bot neben vielen anderen Schwächen der „Disquisitiones" die Berechnung der Fallzeit eines Steins, der vom Monde zur Erde gelangt, einen willkommenen Stoff; hier kam es nun darauf an, der völlig verfehlten die richtige Rechnung gegenüber zu stellen[21]), zu diesem Zwecke fügt GALILEI eine Ableitung der Gesetze des freien Falls und verwandter Teile seiner Bewegungslehre ein. Er hat es nicht für nötig gehalten oder nicht daran gedacht, diese an späterer Stelle gegebene Ableitung mit der vorhergehenden Erklärung in Einklang zu bringen, nach der er zwar die Gesetze kennt, aber sie nicht in einer Einschaltung zur Sprache bringen will; und darum liegt auch für uns kein Grund vor, auf die nachträgliche Einschaltung der Fallgesetze Rücksicht zu nehmen, wo es darauf ankommt, zu begreifen, weshalb an jener früheren Stelle statt einer richtigen Ableitung der Form der Wurflinie ein geometrischer „Scherz" zu finden ist.

Für die ernsten Menschen — auch Herr CAVERNI gehört zu ihnen —, die es unerträglich finden, Probleme der Wissenschaft in solcher Weise leicht genommen zu sehen, noch ein kurzes Wort. Man mag von einem höheren Standpunkt aus dem grofsen Manne zürnen, dafs er in geistreichem Spiel sich ergeht, wo er nicht nach bestem Wissen reden will; wer aber Geschichte studiert, um Menschen und Vorgänge zu begreifen, wird wenigstens anerkennen müssen, dafs die Freude am Geistreichen in Wort und Sinn ein wesentlicher Bestandtheil GALILEI'scher Geistesart ist und dafs die Ausführungen über die Kreisbahn fallender Körper dieser Geistesart entsprechen. Geistesspiele verwandter Art, in ähnlicher Weise „ergötzlich" zu lesen, aber

21) Auf den Wert dieser Rechnung kommt es hier nicht an. Man vergleiche über dieselbe E. STRAUSS a. a. O. S. 533—34.

wertlos für die Wissenschaft bieten seine Hypothesen über den Ursprung der verschiedenen Geschwindigkeiten der Planeten wie über die Entstehung der Fallbeschleunigung durch das Zusammenwirken der unveränderlichen Schwere mit der allmählich abnehmenden vis impressa. Wie für diesen letzteren Fall aus den Schriften jüngerer Jahre streng nachzuweisen ist, bringt er vielleicht auch in den beiden andern Gedankengänge einer längst vergangenen Periode, die ihm nicht minder interessant erscheinen, weil er um besserer Einsicht willen darauf verzichtet hat, sie als richtig zu betrachten. So scheint er noch im Brief an CARCAVY eine ausreichende Rechtfertigung seiner falschen Annahme darin zu sehen, dafs dieselbe so völlig überraschende Konsequenzen ergiebt. Wer weiter verfolgen will, in welchem Mafse für GALILEI der geistreiche Einfall verführerisch und — wenn man will — gefährlich werden konnte, dem mag ein gründliches Studium des Briefs an die Grofsherzogin CHRISTINA VON LOTHRINGEN empfohlen sein.

IV.

Nichts weiter können und wollen die vorstehenden Ausführungen glaublich machen, als dafs GALILEI so, wie er es in den Dialogen von 1632 gethan hat, über die Bahn des fallenden Körpers spekulieren und doch zur selben Zeit von der Parabelform der Wurflinie überzeugt sein konnte; wer dem Gesagten auch nur den Wert einer zulässigen Vorstellung von der Entstehung der Episode der „Dialoge“ zugesteht, hat eben dadurch eingeräumt, dafs aus den dort vorgetragenen Betrachtungen ein Schlufs auf den Inhalt der Wurflehre von 1609 nicht gezogen werden kann.

Aber Erwägungen dieser Art lagen den ersten begeisterten Lesern der „Dialoge“ fern; geschichtliche Betrachtungen über die Entstehung des Buches, über das Verhältnis des Autors zu seinem Werk, über die Veranlassungen, die ihn bestimmten, Einzelheiten weitläufig zu erörtern, andere mit Stillschweigen zu übergehen, kurz alles was für uns, die das Buch geschichtlich verstehen wollen, von besonderem Interesse ist, trat naturgemäfs für diejenigen zurück, denen aus jeder Seite neue Wahrheiten, neue Aufschlüsse über halb Begriffenes oder Unverstandenes entgegentraten; so ist kaum zweifelhaft, dafs auch die merkwürdige Konstruktion des zweiten „Tages“ damals als eine ernstgemeinte Lehre des Meisters aufgefafst und bewundert wurde; aber ebensowenig darf es uns überraschen, wenn Gelehrte wie CARCAVY und sein Freund, deren kritischen Sinn GALILEI's Ausführung unbefriedigt liefs, ihre Bedenken äufsern, ohne irgendwie zu beachten, was er gewissermafsen in die Stelle „hineingeheimnist“ hat.

Es ist schon oben auf die — zuerst von CAVERNI hervorgehobene — Stelle des *Specchio ustorio* hingewiesen, die es sehr wahrscheinlich macht, dafs auch CAVALIERI in den Ausführungen der „Dialoge" GALILEI's wahre Meinung über die Natur der Wurflinie zu lesen geglaubt hat. Um nun zu ermessen, inwiefern eine solche Vorstellung des hochbegabten Schülers weitere Schlüsse auf GALILEI's Wissen im Jahre 1632 gestattet, wird man zunächst genauer zu prüfen haben, was auf CAVALIERI's Ankündigung seines *Specchio* GALILEI erwidert und was CAVALIERI selbst auf diese Erwiderung geantwortet hat.

Auf CAVALIERI's früher angeführte Mitteilung vom 31. August antwortete GALILEI am 11. September 1632 nicht ihm persönlich, sondern dem gemeinsamen, wie CAVALIERI in Bologna ansässigen Freunde CESARE MARSIGLI[22]).

„Ich habe Briefe vom Pater FRA BUONAVENTURA (CAVALIERI) mit der Nachricht, dafs er kürzlich eine Abhandlung über den Brennspiegel drucken lassen, in der er, wie er sagt, bei gegebener Gelegenheit den Satz und den Beweis von der Bahn der geworfenen Körper eingefügt hat, in dem er darthut, dafs dieselbe eine parabolische Linie ist. Ich kann Euch, verehrter Herr, nicht verhehlen, dafs diese Nachricht mir eine wenig erfreuliche gewesen ist; denn ich sehe, wie von einem mehr als vierzigjährigen Studium, von dem ich einen guten Teil in vollem Vertrauen dem Pater mitgeteilt, mir nunmehr die Erstlingsfrüchte genommen und dem Ruhm, den ich mir von so langen Mühen versprach, die Blüte gebrochen werden soll; denn in Wahrheit war das erste, was mich veranlafst hat, über die Bewegung nachzudenken, das Bestreben, diese Linie zu finden; ist sie einmal gefunden, so ist auch der Beweis dafür nicht allzu schwer; ich aber, der sie bewiesen, weifs, wie viel Mühe ich gehabt die These selbst zu finden; und wenn der Pater FRA BUONAVENTURA mir vor der Veröffentlichung seine Absicht mitgeteilt hätte (wie es vielleicht die Höflichkeit erforderte), so würde ich ihn so sehr gebeten haben, dafs er mir erlaubt hätte, zuvor mein Buch drucken zu lassen, und dann hätte er soviel Entdeckungen hinzufügen können, wie ihm beliebte. Ich werde abwarten und sehen, was er vorbringt; aber etwas Grofses müfste es sicherlich sein, um meinen Unwillen zu beschwichtigen und mit dem meinigen den der Freunde alle, die davon gehört und die zu gröfserer Kränkung noch mir mein allzu grofses Vertrauen zum Vorwurf machen. Mein Stern bringt es mit sich, dafs ich um das, was mein ist, kämpfen und auch dabei noch verlieren mufs."

---

22) Vergl. GALILEI, *Opere ed.* ALBERI VII p. 5.

Auf diesen Brief antworteten am selben Tage (21. September 1632) MARSIGLI und CAVALIERI[23]). Der Letztere schreibt:

„Der Kummer, den Ihr nach der Mitteilung des Herrn CESARE MARSIGLI darüber empfunden, dafs ich in meinem *Specchio Ustorio* die parabolische Linie berührt, die von den geworfenen Körpern beschrieben wird, ist sicherlich nicht so grofs gewesen wie der meine, als ich vernahm, dafs Euch gekränkt hat, was ich mehr aus allzu grofser Ehrfurcht als aus anderem Grunde unterlassen. Was ich von der Bewegung gesagt, habe ich als Euer und des Pater BENEDETTO Schüler gesagt, und das erkläre ich feierlich (wie Ihr aus den beiliegenden Bogen sehen könnt), da ich von Euch, ich kann sagen, das Wenige, das ich weifs, gelernt habe. Wahr ist, dafs Ihr vielleicht sagen werdet, ich hätte etwas deutlicher aussprechen sollen, dafs der Gedanke der parabolischen Linie von Euch, verehrter Herr, herrührt; aber wisset, dafs die Besorgnis, vielleicht nicht vollständig mit Eurer These übereinzustimmen, bewirkt hat, dafs ich nicht in bestimmten Worten Euch zuzuschreiben wagte, was Ihr als nicht das Eure hättet zurückweisen müssen. Diese Besorgnis bewirkte, sage ich, dafs ich mich auf die allgemeinen auf Seite 152 gesagten Worte bezog, wo ich auch den Pater D. BENEDETTO nenne, nicht weil ich ausdrücken will, dafs das Folgende zum Teil von ihm herrührt, sondern weil auch er mich über einen Teil dieser Gegenstände unterrichtet hat, da ich über dieselben von ihm mit andern Schülern Versuche habe ausführen sehen; von diesen andern Schülern habe ich auch eben diese These gehört, und mir scheint in der That sowohl die These, wie dafs sie von Euch herrührt, so verbreitet zu sein, dafs der Gedanke, ich hätte sie als mein Eigentum in Anspruch nehmen können, nicht aufkommen kann[24]). Und wenn ich gegen andere die Höflichkeit gehabt habe, wie gegen den Herrn MUZIO ODDI, ihm zu schreiben, ehe ich über Dinge, die zwischen ihm und mir sich zugetragen, etwas drucken liefs, so hätte ich das viel eher noch bei Euch gethan, wenn ich gedacht hätte, dafs Ihr Wert auf die Sache legtet, da ich Euch so sehr schätze, ehre und liebe, wegen Eurer vielen Verdienste und der zahllosen Gunstbeweise, die mir von

---

23) GALILEI, *Opere ed.* ALBERI IX p. 290 u. f.

24) Herr Professor FAVARO hat auf meine Bitte die Güte gehabt, das Original des Briefes in Florenz zu vergleichen. Dabei hat sich herausgestellt, dafs neben einigen minder wichtigen anderweitigen Abweichungen ALBERI's Abdruck an dieser Stelle eine ganze Zeile ausgelassen und dadurch den Sinn nicht unwesentlich verändert hat. Der richtige Text lautet: *da' quali pure ho sentito l'istessa conclusione p a r e n d o m i i n s o m m a t a l m e n t e d i v u l g a t a l a c o n c l u s i o n e e ch' ella n' era l'autore, che non potesse cadere etc.* Bei ALBERI fehlen die hier gesperrt gedruckten Worte.

Euch zu Teil geworden sind. Und wenn, als Ihr mich unterrichtetet, Ihr mir angedeutet hättet, dafs ich diese oder jene Gedanken nicht an die Öffentlichkeit bringen sollte, so würde ich es unter keinen Umständen gethan haben, während ich sonst, wenn ich sie andern erklärte und als die Euren zur Sprache brächte, geglaubt hätte zu thun, was dem guten Schüler geziemt, indem ich mich wenigstens als verständig Erfassenden wenn nicht als Nachahmer der bewundernswerten Bemühungen erwiese, die Ihr auf die Enthüllung der Geheimnisse der Natur verwendet."

„Ich füge hinzu, dafs ich in Wahrheit dachte, Ihr hättet irgendwo darüber geschrieben, da ich nicht in der glücklichen Lage gewesen bin, alle Eure Werke zu sehen, und in diesem Glauben hat mich bestärkt, dafs ich wahrnahm, wie diese Lehre so sehr und so lange schon verbreitet ist, da Oddi mir vor zehn Jahren sagte, Ihr hättet darüber mit dem Herrn Guidubaldo dal Monte Versuche gemacht, und auch das hat mich unachtsam gemacht, so dafs ich Euch nicht zuvor davon schrieb, da ich in der That glaubte, dafs Ihr Euch durchaus nicht darum kümmertet, vielmehr zufrieden sein würdet, dafs einer Eurer Schüler bei so günstiger Gelegenheit sich als Anhänger Eurer Lehre zeigte, von der er bekennt, dafs er sie von Euch gelernt habe."

„Wollt Ihr nun trotz dessen, was ich zu meiner Verteidigung sage, dafs es ein Vergehen sei, so ist es sicher keins aus bösem Willen. Erwägt nun, was ich thun soll, um Euch Genugthuung zu geben; denn ich bin voll bereit, es zu thun. Ich habe hier in Bologna nur einige Abdrücke aus der Hand gegeben, und werde keinen andern ausgeben lassen, bis die Sache, wenn möglich, in solcher Weise in Ordnung gebracht ist, dafs es Euch genügt; ich werde deshalb entweder die weitere Ausgabe so lange verschieben, bis Ihr Euer Buch über die Bewegung habt drucken lassen, oder es mit früherem Datum drucken lassen könnt, oder ich lasse die beiden Bogen noch einmal drucken, unter Vernichtung alles dessen, was Ihr als Euch benachteiligend anseht, oder ich setze am Rande von Seite 164, bei Zeile 22, wenn Ihr meint, dafs ich mit Euch übereinstimme, die Worte: These des Herrn Galileo, oder endlich, ich verbrenne alle Abdrücke, damit mit ihnen die Ursache des Verdrusses zerstört werde, die ich meinem Herrn Galileo gegeben, so dafs er mit Cäsar mir hätte sagen können: *Tu quoque Brute fili!* während ich immer als mein höchstes Glück betrachtet, ihn gekannt zu haben, ihn ehren und ihm dienen zu können." — —

„Sagt mir also frei, was von dem Genannten, wenn ich es thue, Euch zumeist Genugthuung gewähren wird, denn mit vollster Bereitwilligkeit werde ich es sofort zur Ausführung bringen."

Die hier mitgeteilten Briefe haben es Caverni nicht erschwert, den

Zusammenhang der Vorgänge so zu schildern, als ob durch die Gesamtheit der Zeugnisse der ausschliefsende Anspruch CAVALIERI's auf die Entdeckung der Parabelform zur Evidenz erhoben wäre. Frei dichtend erzählt er, wie die Lektüre der „Dialoge" an der betreffenden Stelle CAVALIERI aufs peinlichste berührt und nach kurzem Nachdenken zur richtigen Lösuug sowohl für die vorliegende Aufgabe wie für das mathematisch identische Problem der Wurflinie geführt hat. Im „Specchio ustorio" wird demnach GALILEI's Lehre nicht benutzt, sondern widerlegt. So findet auch in CAVALIERI's Gedankengang, wie ihn CAVERNI — weiter dichtend — fortführt, nur die eine Sorge Raum: wie GALILEI, der eigenwillige, leidenschaftliche Tyrann es aufnehmen möge, dafs er, der Schüler, gewagt, seinen Halbkreis durch die Halbparabel zu ersetzen, und aufs höchste ist er überrascht, als ihn statt des erwarteten Vorwurfs[25]) über diese verwegene Abweichung die Kunde trifft, dafs GALILEI für sich selbst die Entdeckung der Parabelform in Anspruch nimmt.

Mit dem brutalen Ausspruch: „soviel Sätze, soviel Lügen!" erledigt CAVERNI die wehmütig bitteren Worte, in denen GALILEI dem Schüler gegenüber auf seiner Priorität besteht, aber auch die unbedingte Anerkennung, die CAVALIERI in scheinbarem Widerspruch mit seinen früheren Äufserungen nunmehr GALILEI's Ansprüchen zu Teil werden läfst, bietet ihm keine Schwierigkeiten. Auch CAVALIERI lügt, aber fast ohne zu wissen, dafs er es thut. Im Banne des dämonischen oder magischen Einflusses, den GALILEI auf ihn ausübt — so fafst CAVERNI sein Verzichten auf — glaubt „der gute Mensch" zu begreifen und zu wissen, was GALILEI ihn glauben machen will; willenlos läfst er, der rechtmäfsige Eigentümer, sich bewegen, mit eigenen Händen dem Räuber ins Haus zu tragen, was er fordert; willenlos bekennt er sich überzeugt, dafs er selbst der Räuber gewesen sei.[26])

Sieht man davon ab, dafs CAVERNI auch hier dem Romanschriftsteller die Feder des Historikers überläfst, dafs er eine Kombination von Möglichkeiten für Geschichte ausgiebt, so ist auch als einfacher Erklärungsversuch betrachtet, seine Darstellung der Vorgänge eine völlig in der Luft schwebende; sie giebt eine Deutung der bekannten Thatsachen und Äufserungen, wie man sie erst dann versuchen dürfte, wenn als festgestellte Wahrheit

---

25) Er fürchtete, sagt CAVERNI, „für GALILEI ein Gegenstand der Geringschätzung und des Zorns zu werden, wie es KEPLER aus ähnlichen Gründen geworden war". Es ist bekannt, dafs GALILEI niemals KEPLER's Entdeckung der elliptischen Bahnen der Planeten zugestimmt hat; aber dafs er dem Entdecker aus dem Aufgeben der Kreisform einen Vorwurf gemacht hätte, wie CAVERNI hier andeutet, läfst sich nicht nachweisen.

26) CAVERNI, *Storia* IV p. 530.

erwiesen wäre, was CAVERNI uns klar zu machen versprochen, aber in keinem Teil seiner Auseinandersetzungen wirklich erwiesen hat.

So wenig man nun derartigen Deutungen Berechtigung zugestehen wird — daſs auch nach GALILEI's Brief und CAVALIERI's Erwiderung Manches zu erklären übrig bleibt, ist nicht zu bestreiten. Mit voller Bestimmtheit geht aus CAVALIERI's Aufserungen nur der Wunsch hervor, den gekränkten Meister zu versöhnen; um das zu erreichen, erschöpft er sich in der Aufzählung von Gründen dafür, daſs er dem Anscheine nach GALILEI's Entdeckerrecht nicht anerkannt und seine Zustimmung zur Veröffentlichung nicht erbeten hat, und in Anerbietungen zur Sühne jeder möglichen Verschuldung, die sich bis zu völliger Preisgebung des eigenen Werkes steigern. Aber die Rechtfertigungsversuche erklären nicht in genügender Weise, was sie begreiflich machen wollen; und die unbegrenzte Bereitwilligkeit, der Versöhnung Opfer zu bringen, ruft den Zweifel hervor, ob nicht hinter den ausgesprochenen Gründen der Wahrheit besser entsprechende rücksichtsvoll versteckt sein mögen. CAVALIERI will unsicher gewesen sein, ob GALILEI den Satz von der Parabel, wie er selbst ihn formuliert hat, als den seinen anerkennen werde, aber, wenn er gewiſs war, wie er bedingungslos zugesteht, daſs GALILEI die Parabelform der Wurflinie erkannt habe — worauf konnte sich seine Unsicherheit beziehen? Seine These lautet: „Die schweren Körper, die von dem Werfenden nach irgendwelcher Richtung auſser in derjenigen senkrecht gegen den Horizont angetrieben werden, beschreiben, von dem Werfenden getrennt und bei Ausschluſs des Widerstands des Mediums, eine krumme Linie, die von der Parabel unmerklich verschieden ist“[27]). Durch die einschränkende Bestimmung der letzten Worte will CAVALIERI auf die für kleine Strecken verschwindende Abweichung der Wurflinie von der Parabelform hinweisen, die dadurch entsteht, daſs die vertikale Komponente stets senkrecht gegen die gekrümmte Erdoberfläche gerichtet ist. Er konnte nicht zweifeln, daſs GALILEI seinem so verstandenen *insensibilmente differente* zustimmen werde. Aber ebensowenig ist in dem anderweitigen Wortlaut der These irgend etwas ausgesprochen, was nicht derjenige anerkennen muſste, der die Bahn der geworfenen Körper als Parabel betrachtet. Und wenn in Wahrheit die Ungewiſsheit in dieser Beziehung CAVALIERI zweifeln lieſs, ob er GALILEI als Entdecker nennen dürfe — wie leicht war bei dem unausgesetzten brieflichen Verkehr der Zweifel zu beseitigen! Es ist unverständlich, daſs er statt dessen GALILEI's Namen ungenannt läſst, da er doch nicht in Frage stellen will, sondern aufs bestimmteste anerkennt, daſs ihrem wesentlichen Inhalte nach die These

---

27) *Specchio ustorio* p. 164.

Galilei gehört. Cavalieri meint einen Ersatz für die ausdrückliche Nennung in der allgemeinen Bemerkung gegeben zu haben, in der er freimütig bekennt, die Einsicht in Probleme der Bewegungslehre „teilweise" Galilei zu verdanken; aber der Leser des Specchio ustorio kann um dieser Erklärung willen besten Falls als möglich, nie als klar ausgesprochen ansehen, dafs auch der Satz von der Wurflinie zu dem Teil des Vorgetragenen gehört, den Cavalieri Galilei verdankt. Es kommt dazu, dafs auch Cavalieri's nachträgliche Angaben über die allgemeine Verbreitung der Parabellehre als einer von Galilei herrührenden keineswegs so bestimmt lauten, dafs man um ihretwillen nicht nur die Nennung Galilei's als überflüssig, sondern auch einen Versuch Cavalieri's, sich selbst für den Entdecker auszugeben, als undenkbar betrachten müfste. Die vermeintliche Verbreitung war jedenfalls nur eine Verbreitung von Mund zu Mund; Cavalieri konnte kaum zweifeln, jedenfalls sich leicht darüber aufklären, dafs der Specchio ustorio die erste Druckschrift war, in der die Parabelform öffentlich gelehrt wurde; und wenn die Thatsache, dafs sie durch Galilei entdeckt war, so offenkundig erschien, dafs es für die Veröffentlichung der Vorfrage nicht bedurfte, so konnte es um so weniger einen Grund geben, nicht in unzweideutigen Worten die Entdeckung Galilei zuzuschreiben.

Diese Bedenken zusammenfassend, kann man sagen, dafs Cavalieri's Verteidigung nicht ausreicht, um von seiner vollen Aufrichtigkeit diejenigen zu überzeugen, die im Specchio ustorio wie in dem August-Brief an Galilei diesem nichts weiter zuerkannt sehen, als die vorbereitenden Schritte für die Entdeckung der Parabelform, nicht aber die Entdeckung selbst, während in der Erwiderung auf Galilei's Brief vom 11. September nicht nur Galilei's Priorität aufs Bestimmteste anerkannt, sondern auch mit gleicher Entschiedenheit in Abrede gestellt wird, dafs eine Verleugnung dieses Verhältnisses möglich und im Specchio ustorio enthalten oder beabsichtigt sei.

Wie immer man diesen scheinbaren Widerspruch der Äufserungen vor und nach dem 11. September 32 zu beseitigen versuchen möge — der *eccesso di reverenza*, den Cavalieri selbst an die Spitze seiner Verteidigung stellt, wird dabei eine Rolle spielen müssen. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs für Cavalieri, auch wenn er selbst und ohne von Galilei zu wissen, die Parabelform entdeckt hätte, Galilei's Wort: ich habe sie gefunden! ein entscheidender Beweis seiner Priorität gewesen wäre, und auch das mufs man zum mindesten als möglich ansehen, dafs in diesem Falle sein Verlangen, den verehrten Meister völlig zu beruhigen, stark genug gewesen wäre, um ihn erdichten zu lassen, was er von der Verbreitung seiner Lehre sagt. Aber eine Notwendigkeit, an solche Erdichtung zu glauben, liegt nicht vor; denn auch wenn Cavalieri in Wahrheit schon in Pisa von

den Schülern CASTELLI's, später von MUZIO ODDI und von vielen Andern über GALILEI's Entdeckung hatte reden hören, konnte die Konstruktion der „Dialoge", die eine Parabelform verleugnet, ihm die Vorstellung glaublich erscheinen lassen, daſs irgend welche Gründe den Entdecker veranlaſst haben, seine richtige Erkenntnis gegen die irrtümliche Lehre zu vertauschen, die er in den „Dialogen" als eine hochbedeutungsvolle Wahrheit vortrug; es ist begreiflich, daſs in solchem Falle der geniale Mathematiker nicht darauf verzichtete, in seinem Buche den täuschenden Ausführungen der „Dialoge" gegenüber den einfachen auf GALILEI's Forschung beruhenden Beweis für die Parabelform an die Öffentlichkeit zu bringen; aber nicht minder läſst sich verstehen, daſs er in diesem besonderen Abschnitt von der Wurflinie den Namen dessen ungenannt lieſs, der die Parabelform zwar entdeckt hatte, aber nunmehr die verwandte Frage so behandelte, als ob er von dieser nichts mehr wissen wolle.

Eben daraus würde sich auch erklären, daſs CAVALIERI in jenem ersten Briefe von der Parabel spricht, ohne erkennen zu lassen, daſs es GALILEI's Lehre ist, die er verteidigt; als Leser der „Dialoge" durfte er zweifeln, ob es noch jetzt die seine sei.

Auch die sonst befremdenden Äuſserungen des zweiten Briefes finden wenigstens teilweise im Rahmen einer solchen Auffassung einfache Deutung; ein weniger von Pietät und Verehrung gegen GALILEI erfüllter Anhänger hätte, über den Widerspruch der „Dialoge" hinweg gehend, ihm die Entdeckung der Parabellehre zuschreiben können; aber CAVALIERI kam über den Zweifel nicht hinweg, ob jemand, der die Linie des fallenden Körpers auf bewegter Erde als eine kreisförmige konstruiert, mit dem Satz des *Specchio Ustorio* sich einverstanden erklären könne, und ob er deshalb GALILEI zuschreiben dürfte, was er früher gelehrt hatte.

Auch die sonst kaum verständliche Äuſserung: er habe geglaubt, daſs GALILEI sich um seine Lehre von der Parabel nicht mehr kümmere, erscheint gerechtfertigt, wenn man die Konstruktion der „Dialoge" als Ausgangspunkt des Zweifels ansieht. Als drei Jahre später ein Brief GALILEI's CAVALIERI nochmals die Veranlassung gab, die Unterlassung einer Anfrage vor der Veröffentlichung des *Specchio* zu rechtfertigen, beschränkt er sich darauf zu erklären: er habe damals geglaubt, daſs GALILEI auf seine Entdeckung nur geringen Wert lege[28]).

Daſs hier so wenig wie in der früheren Verteidigung hinzugefügt wird, die Konstruktion der „Dialoge" habe zu dieser Ansicht die dringendste Veranlassung gegeben, erklärt sich aus dem *„eccesso di riverenza"*, von dem

28) Vergl. CAMPORI, *Carteggio Galileano inedito.* Modena 1881 p. 442.

Cavalieri's Briefe an Galilei ohne Ausnahme Zeugnis ablegen. Ein Wort, das als ein kritisches auch nur gedeutet werden könnte, ist in diesen Briefen nicht zu finden; aber ohne die Andeutung einer Kritik konnte er von dem Widerspruch zwischen der Konstruktion der „Dialoge“ und der richtigen Zusammensetzung der Wurflinie nicht reden.

Will man dieser Auffassung gegenüber, die sich im Hypothetischen auf das Notwendigste beschränkt, als wahrscheinlicher ansehen, dafs Cavalieri Galilei zu Liebe nachträglich ein Wissen von früherer Entdeckung fingiert, und um es glaublicher zu machen, thatsächliche Einzelheiten hinzu erfindet, denen keine Wirklichkeit entspricht, so ist damit doch nichts weiter gewonnen als eine Voraussetzung, unter der Cavalieri als selbstständiger Entdecker angesehen werden kann, keinenfalls ein ausreichender Grund, Galilei's Entdeckung zu leugnen. Denn die Vorstellung, dafs Galilei nicht erkannt und irgendwie gelehrt haben könne, was Cavalieri unbekannt geblieben ist, wird durch die Notizen, die uns über das Verhältnis beider Männer zu Gebote stehen, in keiner Weise gerechtfertigt. Wenn Cavalieri sich Galilei's Schüler nennt, so war er das doch in ganz anderem Sinne als beispielsweise Castelli, Aproino, Antonini. Seine Beziehungen zu Galilei beginnen 9 Jahre, nachdem dieser Padua verlassen, also im gewöhnlichen Sinne zu lehren aufgehört hatte. Im Jahre 1619 empfahl der Kardinal Borromeo den vielversprechenden jungen Mann, der in Pisa sich mathematischen Studien widmen wollte, dem Wohlwollen Galilei's; in Pisa wurde er Schüler des Pater Castelli; wie weit dieser sich berechtigt glauben konnte, ihn in die Lehren einzuweihen, die Galilei noch immer künftiger Veröffentlichung vorbehielt, läfst sich mit Sicherheit nicht sagen; was in dieser Beziehung Cavalieri's Brief vom 21. September 1632 ausführt, deutet mehr auf zufällige Mitteilung als auf regelmäfsigen Unterricht; ebensowenig ist bekannt, in welchem Mafse bei Galilei's gelegentlicher Anwesenheit in Pisa oder bei Besuchen Cavalieri's in Florenz der junge Mathematiker sich der unmittelbaren Belehrung dessen erfreuen durfte, den er als Meister verehrt. Von solcher Belehrung redet in unzweideutiger Weise Galilei in seinem Brief an Marsigli vom 11. September 1632; er sagt nicht ausdrücklich, scheint aber doch nicht zu bezweifeln, dafs Cavalieri auch den Aufschlufs über die Wurflinie seiner direkten Mitteilung verdankt. Aber Cavalieri bestätigt diese Voraussetzung nicht; er verneint sie vielmehr durch Schweigen. Nicht von Galilei und nicht von Castelli, sondern von Castelli's Schülern und von andern hat er die These gehört. Dieses Nichteingehen auf Galilei's Andeutung ist umsomehr beachtenswert, wenn man annimmt, dafs Cavalieri, um Galilei nicht zu widersprechen, sein Vorwissen durchaus fingiert; er

würde also selbst im Fingieren, wo es auf etwas mehr oder weniger in der Willfährigkeit nicht ankommen konnte, nicht zugestehen wollen, dafs er Galilei selbst die Kenntnis dieser besonderen Lehre verdankt. Mit seinem Brutus Verhältnis war demnach seiner eigenen Auffassung nach wohl vereinbar, dafs Galilei über eine Lehre, auf die er so grofsen Wert legt, ihn nicht persönlich unterrichtet hat.

Auch der *„Specchio Ustorio"* liefert keinen Beweis in entgegengesetztem Sinne. Obgleich Cavalieri hier mit so besonderem Nachdruck erklärt, dafs er von den Problemen der Bewegungslehre als Galilei's Schüler rede, enthält doch sein Buch — abgesehen von der Parabelform der Wurflinie — in Bezug auf die Bewegungslehre nichts, was er nicht den gedruckten „Dialogen über die Hauptweltsysteme" entnehmen konnte und im Wesentlichen ihnen entnommen hat, also nichts, was ihn als vorzugsweise Eingeweihten der Galilei'schen Lehre erkennen liefse.

War er das nicht oder läfst sich doch nicht nachweisen, dafs er es gewesen ist, so kann auch sein vermeintliches Nichtwissen für weitere Schlüsse auf den Inhalt der älteren Galilei'schen Wurflehre nicht verwertet werden, geschweige als ein widersprechendes Zeugnis in Betracht kommen, wo Galilei sagt: ich habe sie gefunden!

V.

Caverni's Roman hat noch eine Fortsetzung. Er hat im ersten Bande seiner Geschichte Galilei als den gewissenlosen Tyrannen geschildert, der um seine Herrschaft zu befestigen, selbst vor Brudermord nicht zurückschreckt, wenn im Bruder ihm ein Nebenbuhler ersteht und nur nach seiner Vernichtung er sich des geraubten Gutes in Sicherheit erfreuen kann. Wie hat nun der räuberische Tyrann in unserm Falle sich den Raub gesichert? Wie ist er mit dem Bruder verfahren, der ihm anheimgiebt zwischen drei Wegen zu wählen, um für alle Zeiten gegen seine Ansprüche gesichert zu sein? Caverni weifs auch davon zu erzählen; mit Entsetzen sieht der Leser sich verwirklichen, was die vorhergehende Schilderung erwarten liefs. Galilei giebt dem treuen Schüler zu verstehen, dafs von den verschiedenen Mitteln, die er zur Sühne vorgeschlagen, ihm eine Zerstörung der unbequemen Schrift durch das Feuer am besten gefallen würde; und Cavalieri zaudert nicht: so vollständig führt er das Werk der Selbstverleugnung aus, dafs heute kaum mehr ein Exemplar seiner Schrift zu finden ist; schon im Jahre 1650 war dieselbe so selten geworden, dafs Daviso, ein Schüler des grofsen Mathematikers, eine neue Ausgabe herzustellen für notwendig erkannte.

Dieser Erzählung liegt an Thatsächlichem nichts weiter zu Grunde, als die Veröffentlichung einer zweiten Auflage des *„Specchio Ustorio“* im Jahre 1650; alles Übrige ist nicht nur durch kein heute zugängliches Zeugnis verbürgt, sondern mit dem, was man über den wirklichen Verlauf der Dinge weiſs, im allerschärfsten Widerspruch.

GALILEI's lebhafte Erregung war durch CAVALIERI's Erklärungen besänftigt; das bezeugt sein Brief vom 16. Oktober 1632 an CESARE MARSIGLI. „Ich habe“, schreibt er, „von dem sehr ehrwürdigen Pater BUONAVENTURA einen langen Brief voller Entschuldigungen empfangen; deren hat es wahrlich nicht bedurft; denn ich habe niemals an seiner besten Absicht gezweifelt, sondern mich über mein Miſsgeschick beklagt, das mir gegen seinen Willen und seine Meinung zum Kummer werden lieſs, was er gethan. Ich kann ihm für heute nicht antworten, da ich auſserordentlich beschäftigt bin, und bitte Euch nur ihm zu sagen, daſs ich nicht wünsche, daſs der Herr Pater irgend etwas in seinem bereits gedruckten Buche ändere, daſs ich ihm vielmehr danke für die ehrenvolle Erwähnung meiner Person“[29]).

Daſs CAVALIERI diese Worte so aufgefaſst hat, wie jeder Unbefangene, der sie heute liest, geht in unzweideutiger Weise aus seiner Erwiderung vom 7. Dezember hervor, in der es heiſst: „Daſs Ihr nunmehr befriedigt seid, da Ihr gesehen, in welcher Weise ich jene Lehre zur Sprache bringe, ist mir über die Maſsen lieb“[30]).

Inzwischen hatte CAVALIERI sein Buch nach Florenz geschickt; in der Erwartung, daſs GALILEI es empfangen, bittet er ihn um sein Urteil, namentlich in Betreff der dargelegten Ansicht über den Brennspiegel des ARCHIMEDES, um dessentwillen er hauptsächlich das Buch habe drucken lassen. GALILEI's Antwort ist wiederum an CÄSAR MARSIGLI gerichtet. Hier endlich darf man erwarten, den Brudermörder reden zu hören; aber was GALILEI am 31. Dezember 1632 mitten unter den aufregenden Verhandlungen über die Befehle der römischen Inquisition dem Freunde nach Bologna schreibt, ist erfüllt von so warmem Wohlwollen und von so neidloser Freude an den Erfolgen des jüngeren Mitarbeiters, wie diese Empfindungen nur jemals bei einem groſsen Forscher zum Ausdruck gekommen sind. „Mit Euch,“ schreibt GALILEI an MARSIGLI, „und nicht mit dem Verfasser des „Specchio ustorio“ will ich mich der wunderbaren Erfindung erfreuen, weil ich gewiſs bin, daſs er, der sie ergründet, über sie so groſse Freude empfindet, daſs sie Erhöhung nicht duldet. Mit Euch muſs ich auſserdem mich freuen, wenn ich den glücklichen Fortschritt und den über-

---

29) *Opere ed.* ALBERI VII, 14.

30) Ebenda IX, 317.

[illegible] Kopfes sehe, der vormals Euch von [illegible] begünstigt worden ist; und wenn mein Ur- [illegible] Herren noch in irgend welcher Geltung steht, so [illegible] ihm freien Lauf durch das weite Gebiet der mathe- [illegible] zu gewähren, wohin immer der Genius ihn zieht, [illegible] wird auch der allerbeste sein und ohne jeden Ver- [illegible] der Berechnung von Ephemeriden oder der Aufstellung [illegible][1].

[illegible] diesen Zitaten keines weiteren Wortes, um darzuthun, [illegible] welche geheimnisvolle Machinationen der Verbreitung [illegible] in seiner ersten Auflage hinderlich gewesen sind oder [illegible] erheblicher Teile dieser Auflage bewirkt haben — [illegible] Wille dabei nicht beteiligt gewesen sein kann. Aber [illegible] die durch GALILEI's Eingriff erklärlich erscheinen [illegible] Beweis schuldig geblieben. Die Ausgabe des Specchio [illegible] allem Anscheine nach heute nicht seltener, als andere [illegible] Bedeutung aus demselben Zeitalter; sie wird in ge- [illegible] ausschliefslich zitiert und findet sich beispiels- [illegible] Bibliotheken ziemlich allgemein. Die Aus- [illegible] die leiseste Andeutung darüber, dafs aufser- [illegible] das Erscheinen eines zweiten Abdrucks notwendig [illegible] also annehmen, dafs irgend eine von den ge- [illegible] um derentwillen zweite Auflagen auch anderer [illegible] früher nach der ersten gedruckt werden, den Pater [illegible] haben wird, das Werk seines Lehrers und Ordens- [illegible] herauszugeben.

[illegible] Verdächtigung gegenüber liefse sich mit besserem [illegible] verteidigen, dafs GALILEI selbst durch seine über- [illegible] nicht unwesentlich dazu beigetragen, die Ver- [illegible] torio und dadurch die Erschöpfung der ersten [illegible] begnügte sich nicht, seinen Freunden, wie [illegible] die Lektüre des Buches zu empfehlen, an- [illegible] wie den Kardinal CAPPONI zur Anknüpfung per- [illegible] dem Verfasser um des trefflichen Werkes willen [illegible] voller Öffentlichkeit, in seinem unsterblichen [illegible] Paters BUONAVENTURA CAVALIERI und seines [illegible] „das er mit Bewunderung gelesen habe“[33].

[illegible]

[illegible] *Galileano inedito* p. 447, 490.

[illegible]

So verweist er selbst in Ausdrücken, wie er sie nur für die gröfsten Forscher kennt, seine Leser auf das Buch, das ihm in der Veröffentlichung des Hauptsatzes seiner Wurflehre um 6 Jahre zuvorgekommen war.

Als widersinnig und unwahr, wie solchen Thatsachen gegenüber die von Caverni erzählte Geschichte des Specchio ustorio erscheint, mufs auch bezeichnet werden, was er zum ferneren Beweis für Cavalieri's Priorität von einer Entstehung der Galilei'schen Wurflehre in den Jahren 1636 und 37 berichtet. In der That läfst eine Folge von Briefen aus dem Jahre 1637 bestimmt erkennen, dafs Galilei in jener Zeit, also unmittelbar vor der Veröffentlichung der „Dialoge über zwei neue Wissenschaften" sich mit der Lehre von den Proietti beschäftigt hat und dafs der holländische Verleger mahnen mufste, um diesen Teil des Manuskripts zu erhalten, nachdem die vorhergehenden bereits gedruckt waren. „Die Dokumente", sagt Caverni und verweist dabei auf die soeben erwähnten Briefe, „bezeugen, dafs während die ersten lateinischen Sätze über die beschleunigte Bewegung bis zum Jahre 1604 hinaufreichen, die auf die Proietti bezüglichen zum gröfsten Teil 1636 und 37 geschrieben sind." Dabei begegnet dem strengen Kritiker eine Vertauschung des Inhalts der „Dokumente" mit dem Gegenstand seiner Beweisführung. Die letztere hat es mit den lateinisch geschriebenen Abschnitten des vierten Tages der Dialoge von 1638 zu thun, die „Dokumente" reden ohne Weiteres von dem Gesamtinhalt dieses vierten Tages. Dafs jene in lateinischer Sprache geschriebenen Abschnitte in den Jahren 1636 und 37 entstanden sind, kann ersichtlich nicht daraus entnommen, also auch nicht dadurch bestätigt werden, dafs nachweislich Galilei noch im Jahre 1637 mit der Bearbeitung des vierten und letzten Teils seines Werkes beschäftigt gewesen ist; denn dieser vierte „Tag" enthält zwar als kleineren Teil jene lateinischen Abschnitte, daneben aber einen gröfseren in dialogischer Form und italienischer Sprache geschriebenen, der die lateinischen Sätze erläutert und ausführt; dafs nicht etwa nur dieser letztere gröfsere Teil, von dem es sehr glaublich und wahrscheinlich ist, sondern der kleinere, von dem es mit gutem Grund bezweifelt wird, Galilei bis unmittelbar vor der Veröffentlichung seines Werks beschäftigt hat, wird in jenen Briefen nicht angedeutet; sie reden allgemein von den Proietti und lassen daher nur erkennen, dafs der 73jährige Greis gethan hat, was in ähnlicher Lage auch jüngere Leute zu thun pflegen: er hat an dem letzten Teil seines Werks bis zum letzten Augenblick vor der Veröffentlichung gearbeitet.

VI.

Caverni richtet gegen das Ende seiner langen Anklageschrift an Galilei die folgende Herausforderung:

„Da Ihr, Herr Galileo, für gut befunden habt, mit der Würde Eurer handelnden Personen Euer Spiel zu treiben und über eine Frage von so grofser Bedeutung in Eurem Hauptwerk in scherzender Weise zu verhandeln beliebt, sagt uns, in welcher andern Eurer Abhandlungen, Briefe oder Notizen Ihr während vierzigjähriger Studien über die geworfenen Körper von ihren parabolischen Bahnen ernsthaft geschrieben habt“ — — — „und seid Ihr nicht im Stande, ein glaubwürdiges Schriftstück zu produzieren, das vor dem September des Jahres 1632 entstanden ist, so können wir Euch nicht von der Anklage freisprechen, in einer Weise, die des Philosophen wie des Mannes von ehrenhafter Gesinnung unwürdig, die Entdeckung, nach der Ihr so sehr begehrt, dem Cavalieri weggenommen zu haben.“

Als Caverni dem toten Helden diese verwegenen Worte ins Grab rief, hielt er in eigenen Händen nicht ein einzelnes, sondern eine ganze Folge von Dokumenten, wie er sie verlangt, in ihnen die entscheidende Widerlegung seiner Anklage, die ihn hätte zwingen müssen, den gröfsten Teil seines Buches zu vernichten, wenn er noch fähig gewesen wäre, das dichte Gewebe der Selbsttäuschung, in das er sich verstrickt, zu zerreifsen.

Durch denselben vierten Band des Caverni'schen Werkes, der die hier erörterte Streitfrage behandelt, ist zum ersten Mal in weiteren Kreisen bekannt geworden, dafs unter den Handschriften der Biblioteca nazionale in Florenz, untermischt mit Entwürfen zum Text der gedruckten Discorsi, Überreste einer älteren Bearbeitung der Bewegungslehre erhalten sind, von Galilei's Hand geschriebene Fragmente, die allem Anscheine nach der Paduaner Periode angehören und ohne Zweifel über die Geschichte seiner gröfsten Entdeckungen neues Licht verbreiten werden. Caverni hat es möglich gefunden, durch Benutzung dieser Handschriften Teile einer früheren Redaktion der „neuen Wissenschaft“ zu rekonstruieren, die er in die Jahre 1602 und 1604—10 verlegt. Er hat — wie er auseinandersetzt — für den Zweck dieser Wiederherstellung Argumente formaler wie materieller Natur benutzt. Unter den letzteren hebt er die Verschiedenheiten der Handschrift in verschiedenen Lebensaltern hervor. „Es ist Allen bekannt“, sagt er, „wie die schreibende Hand durch die Jahre in derselben Weise einer Veränderung unterliegt, wie die Bewegungen aller übrigen Glieder; ein Jeder kann das an sich selbst erfahren, wenn er vergleicht, was er im 30sten Jahr geschrieben und was im 50sten. Die Verschiedenheit würde ohne Zweifel noch viel merklicher sein, wenn man den Vergleich anstellte

zwischen der Schrift der ersten Jugend und derjenigen des höchsten Alters; wir haben uns jedoch an die 20 Jahre gehalten, die den zwischen diesen Schriften liegenden Zeitraum ausmachen. Dieselben sind im Jahre 1610 liegen gelassen und erst 1630 planmäſsig wieder aufgenommen worden, wie an betreffender Stelle sich aus den zuverlässigsten Dokumenten ergeben wird. Die zwischen 1602 und 1610 bewiesenen Lehrsätze sind mit hellerer Tinte geschrieben und mit leichten, runden Formen. Im Jahre 1630 bedurfte das Auge, das so weit geschwächt war, daſs es nach wenigen Jahren völlig erlöschen sollte, besser ausgeprägter Zeichen; deshalb ist die Tinte schwarz, die Striche dick, die Formen viereckig"[34]).

Es muſs den italienischen Gelehrten, den gewiegten Kennern der in Florenz bewahrten Manuskripte überlassen bleiben, sich über die Zuverlässigkeit dieser Beobachtungen und über ihre Verwertung zu weittragenden Schlüssen für die Geschichte der Wissenschaft zu äuſsern; an dieser Stelle ist nur hervorzuheben, was für die Galilei'sche Wurflehre in Betracht kommt. Caverni benutzt auch hier in ausgedehntestem Maſse Galilei's ungedruckte und bis dahin unbekannte Aufzeichnungen. Dieselben beziehen sich auf die meisten der in den lateinischen Texten des vierten Tages der Discorsi behandelten Fragen, weichen jedoch im Wortlaut wie in den Einzelheiten der Beweisführung von den inhaltsverwandten Abschnitten des gedruckten Werks mehr oder minder ab; alle aber gehen in völlig unzweideutiger Weise von der Parabelform der Wurflinie als gegebener Thatsache aus. Es war daher für den Verteidiger einer Entdeckung durch Cavalieri von entscheidender Bedeutung, auſser Frage zu stellen, daſs nicht ein einziges dieser Fragmente nach den von Caverni entdeckten „materiellen" Argumenten sich als ein Schriftstück der Paduaner Periode oder doch als vor 1632 geschrieben zu erkennen giebt. Caverni hat dies stillschweigend verneint; aus der Anordnung seines Buches, in dem die Entstehung der wissenschaftlichen Wurflehre sich an die Beraubung Cavalieri's knüpft, entnehmen wir, daſs er die Fragmente, in denen die Parabelform vorausgesetzt wird, insgesamt als nach dem Raube geschrieben ansieht. Der Zeit vor 1609 wurde dagegen jenes vereinzelte Fragment zugeschrieben, in dem die Frage nach der Form der Wurflinie aufgeworfen, aber nicht beantwortet wird; auch wenn wir von Caverni's willkürlicher Einschaltung einer nicht vorhandenen Antwort absehen, ergiebt sich daraus eine chronologische Sonderung der Fragmente, die sich zu Gunsten der hier bestrittenen Hypothese deuten läſst. Um so mehr scheint befremdend, daſs gar kein Versuch gemacht wird, die ausschlaggebende Unterscheidung mit Hilfe jener

34) Caverni, *Storia del metodo esperimentale in Italia* IV, p. 341.

früher erwähnten materiellen Kriterien näher zu rechtfertigen; nirgends ist auch nur ausgesprochen, daſs die Schriftzüge hier und dort die früher geschilderten Verschiedenheiten aufweisen und dadurch die verschiedenen Altersstufen des Verfassers verraten; man hat daher strenggenommen keinen andern Grund, an derartige Ungleichheiten zu glauben, als den, daſs doch ein verständiger Historiker Handschriften verwandten Inhalts nicht ganz nach Gutdünken oder so, wie es zu seinen Ansichten paſst, die eine den besten Mannesjahren, die andern dem beginnenden Greisenalter zuweisen wird.

Durch die Veröffentlichung der zur Bewegungslehre gehörigen Fragmente im achten Band der Edizione nazionale der Werke Galilei's und durch die zugehörigen Erläuterungen des Herausgebers sind wir in endgiltiger Weise darüber aufgeklärt, daſs Caverni die gegen ihn entscheidende Aussage der Handschriften in willkürlichster Weise als ein Zeugnis zu Gunsten seiner Beraubungshypothese verwertet hat.

Durch die Veröffentlichung der Fragmente und die Erläuterungen Antonio Favaro's ist festgestellt, daſs

1. die auf die Wurflehre bezüglichen Fragmente von der Hand Galilei's, wie sie ungeordnet zwischen den Blättern des zweiten Teils der fünften Abteilung der Galilei-Manuskripte gefunden wurden, der Handschrift nach zum gröſseren Teil der jugendlichen Periode, zum kleineren Teil einer späteren Zeit angehören;

2. daſs auf mehreren Blättern ein Teil der Aufzeichnungen die jugendliche Handschrift aufweist, während in anderen Teilen entweder im Haupttext oder in Randbemerkungen oder auch in beiden der Handschrift nach Ergänzungen, Verbesserungen oder anderweitige Zuthaten aus späterer Zeit erkannt werden.

3. Sämtliche auf die Wurflehre bezüglichen Fragmente, mögen sie als jugendliche oder spätere durch die Handschrift gekennzeichnet sein, setzen ihrem Inhalte nach in völlig unzweideutiger Weise die Parabelform der Wurflinie als gegebene Thatsache voraus. Eine Ausnahme macht die oben erwähnte Zusammenstellung von Fragen oder Kapitel-Überschriften zur Wurflehre, in der zwar die Frage nach der Form der Wurflinie Raum findet, aber eine weitere Andeutung über den Inhalt der Antwort nicht gegeben wird.

In sehr interessanter Weise ist in der Veröffentlichung durch die Beigabe von drei Faksimiles das Nebeneinandervorkommen der verschiedenen Handschriften und dadurch die durch drei Jahrzehnte fortgesetzte Arbeit an den gleichen Problemen veranschaulicht. Diese Blätter vergegenwärtigen uns, wie an der Schöpfung jüngerer Jahre Galilei selbst in späterer Zeit Kritik geübt, wie er die Ausdrücke verändert, die Beweise umgeschrieben

und verbessert oder auch den früher nur hingeworfenen Satz ausführend bearbeitet hat; auf eine noch spätere Zeit deutet am Rande das — wie uns bedünken will — von zitternder Greiseshand eingetragene Wort *scritta,* durch das wir erfahren, dafs der Text in die Wurflehre der Nuove scienze aufgenommen worden ist.

Soweit ein Faksimile das vermag, gewähren auch die drei im achten Bande der Edizione nazionale veröffentlichten Aufschlufs über die hier erörterte Frage: in jedem der drei reden schon die an der Spitze stehenden, von vergleichsweise jüngerer Hand geschriebenen Sätze von der Parabelform. Was auch dem Laien hier der Augenschein glaublich macht, wird durch die unter 3. verzeichnete Erklärung des Herausgebers der Edizione Nazionale, des gründlichsten Kenners der GALILEI'schen Handschrift zur Gewifsheit erhoben. Es schien mir wünschenswert an dieser Stelle die an sich ausreichende allgemeine Erklärung durch genauere Angaben über den Inhalt solcher Fragmente ergänzen zu dürfen, die mit Sicherheit der Periode jugendlicher Forschung zuzurechnen sind. Professor FAVARO hat mir auch in dieser Beziehung mit liebenswürdiger Bereitwilligkeit jeden gewünschten Aufschlufs erteilt.

Unter den jetzt zuerst bekannt gewordenen fesselte meine Aufmerksamkeit in erster Linie ein in italienischer Sprache geschriebenes Fragment, das mit den Worten beginnt: „Ich nehme an (und werde vielleicht beweisen können) dafs der fallende schwere Körper naturgemäfs seine Geschwindigkeit fortwährend in dem Verhältnis beschleunigt, in dem seine Entfernung von dem Ausgangspunkte der Bewegung zunimmt.“ — „Das Prinzip“, fährt der Verfasser fort, „erscheint mir sehr natürlich und allen Erfahrungen entsprechend, die wir an Instrumenten und Maschinen sehen, die durch Stofsen wirken, wo das Stofsende um so gröfsere Wirkung hervorbringt, aus je gröfserer Höhe es fällt, und unter Voraussetzung dieses Prinzips werde ich das übrige beweisen.“

Im Folgenden wird dann in sehr eigentümlicher Weise als notwendige Folge des aufgestellten Satzes abgeleitet, dafs die in gleichen Zeiten von dem fallenden Körper zurückgelegten Wege sich wie die ungeraden Zahlen *ab unitate* verhalten und hinzugefügt: „es stimmt dies mit dem überein, was ich immer gesagt und durch Versuche beobachtet habe; und so stimmen alle Wahrheiten mit einander überein“. Das Vorstehende vorausgesetzt, wird dann weiter bewiesen, „dafs die Geschwindigkeit bei der gewaltsamen Bewegung in demselben Verhältnis abnimmt, in der sie in derselben geraden Linie bei der natürlichen Bewegung wächst“[35]).

---

35) *Ed. Naz.* VIII, p. 373—74.

Das Fragment stimmt, wie man sieht, dem Inhalte nach im wesentlichen mit dem Brief überein, in dem GALILEI am 16. Oktober 1604 über denselben (später verworfenen) Grundgedanken und seine Verwertung an PAOLO SARPI berichtet[36]). Dieser Brief erscheint als eine abgekürzte Wiedergabe dessen, was in dem Fragment höchst wahrscheinlich in erster Aufzeichnung niedergeschrieben wurde. Unter den Einzelheiten, in denen der Wortlaut des Fragments von dem des Briefes abweicht, sei hervorgehoben, daſs in jenem die Entdeckung des Fallgesetzes und die der Erklärung durch die Proportionalität der Geschwindigkeiten und der zurückgelegten Wege in einer Weise zeitlich getrennt erscheinen, wie dies aus dem Brief an SARPI nicht zu entnehmen war. Der Wortlaut des letzteren schien sehr wohl mit der Annahme vereinbar, daſs auch die Entdeckung des Fallgesetzes im Jahre 1604 erfolgt sei. Dagegen nötigt uns die Äuſserung des Fragments, in der GALILEI das Gesetz der ungeraden Zahlen als etwas bezeichnet, „*che ho sempre detto e con esperienze osservato*", an erheblich frühere Ergründung dieser Wahrheit zu denken.

Das Fragment selbst darf man, da es unzweifelhaft Autograph ist, zuversichtlich als kurz vor dem Brief an SARPI geschrieben ansehen; es gehört also jedenfalls der zweiten Hälfte des Jahres 1604 an. Mit dieser Thatsache ist, wenn es dessen bedürfen sollte, ein Anhaltspunkt für die Schätzung des Alters der übrigen Fragmente gegeben.

Die Annahme, daſs das hier besprochene Fragment von GALILEI's jugendlicher Hand geschrieben sein müsse, ist von FAVARO „mit voller Sicherheit" als zutreffend erkannt. Aber mit gleicher Bestimmtheit erkennt der Gelehrte, dessen Urteil wir in dieser Beziehung als maſsgebend betrachten müssen, als von jugendlicher Hand geschrieben die nachfolgenden zur Wurflehre gehörigen Fragmente:

1. Pag. 424 (Mss. Gal. P. V. T. II. car. 193 r.).

Es ist dies die im Vorhergehenden mehrfach erwähnte, in italienischer Sprache geschriebene Zusammenstellung artilleristischer Probleme, unter ihnen die beiden Fragen:

se la palla vadia per linea retta, non sendo tirata a perpendicolo

und

che linea descriva la palla nel suo moto.

2. Pag. 427 (Mss. Gal. P. V. T. II. car. 91 t.)

beginnend mit den Worten: *determinetur ergo impetus.* Das nur aus sieben Zeilen samt Zeichnung bestehende Bruchstück formuliert die Aufgabe, den Impetus an den einzelnen Punkten der Parabel aus dem immer gleich-

36) Vergl. A. FAVARO, GALILEO GALILEI *e lo studio di Padova* II, p. 226.

bleibenden horizontalen und dem durch senkrechten Fall erlangten Impetus zu bestimmen. Dabei wird in der aus den Discorsi bekannten Weise die horizontale Geschwindigkeit als durch freien Fall aus entsprechender Höhe erlangt betrachtet.

3. Pag. 428 (Mss. Gal. P. V. T. II. car 110 t.)
Zahlenbeispiel für die Berechnung des Impetus an verschiedenen Stellen der Parabel.

4. Pag. 428 (Mss. P. V. T. II. car 87 t.) *„Datae parabolae elevationem invenire, ex qua decidens mobile parabolam datam describat.“* Die Auflösung und der zugehörige Beweis stimmen völlig mit der entsprecheuden überein, die in den gedruckten Discorsi unter *Propositio* V (*Ed. naz.* VIII p. 293) mit der Überschrift: *„in axe extenso datae parabolae punctum sublime reperire ex quo cadens parabolam ipsam describit“* mitgeteilt werden. Demgemäſs findet sich am Fuſse des Fragments die Bezeichnung *„scritta“*. Eine Vergleichung der beiden Überschriften lehrt, in welchem Maſse die spätere Redaktion bei unverändertem Inhalt erhöhte Deutlichkeit des Ausdrucks erstrebt. Als Abweichung nur im Ausdruck ist ferner hervorzuheben, daſs Galilei in den Discorsi als *sublimitas* bezeichnet, was im Fragment *elevatio* genannt wird. Das Wort *sublimitas* scheint in den zweifellos ältesten Fragmenten nicht vorzukommen.

Der Lösung der Aufgabe schlieſst sich auf pag. 429, übereinstimmend mit dem Corollarium zu Prop. V die Folgerung an: daſs die halbe Basis die mittlere Proportionale zwischen der Höhe der Parabel und der Erhebung über die Parabel ist. Auch hier ist in den Discorsi *sublimitas* für das *„elevatio supra parabolam“* des Fragments gesetzt.

5. Pag. 429—30 (Mss. Gal. P. V. T. II. car. 9 a. r.). Das Fragment beginnt mit Untersuchungen über das Verhältnis zwischen der Gröſse des horizontalen Impetus und der Wurfweite verschiedener Halbparabeln, sowie über die Änderung des Impetus im Fuſspunkt mit der Gröſse des horizontalen Impetus bei Halbparabeln von gleicher Höhe. Durch Umkehrung wird dann die vorhergehende Betrachtung auf Vollparabeln übertragen, die dadurch erzeugt werden, daſs der Wurf in der Richtung der Tangente an die Halbparabel von unten her erfolgt; auch für diese wird das Verhältnis der Wurfweiten bei gleicher Höhe und gegebener ungleicher Stärke des Anfangs-Impetus zunächst für einzelne Fälle abgeleitet. Durch Berechnung einzelner Beispiele wird alsdann mehr veranschaulicht als bewiesen, daſs durch den Wurf in der Richtung von 45° bei gleicher Kraft eine gröſsere Wurfweite erzielt wird als bei gröſserer und geringerer Neigung gegen die Horizontale. Wie in den Discorsi wird auch in diesem Fragment vorausgesetzt, nicht bewiesen, daſs ein Körper, der in der Richtung der Tangente

an die durch horizontalen Wurf erzeugte Halbparabel schräg aufwärts geworfen wird, die gleiche Parabel beschreiben mufs.

6. Pag. 431 (Mss. Gal. P. V. T. T. II. car. III r.).

Beweis, dafs bei Halbparabeln gleicher Amplitude der durch den Wurf erlangte Impetus kleiner ist, wenn die Amplitude doppelt so grofs als wenn sie mehr als doppelt so grofs ist als die Höhe. Der Beweis stimmt im Wesentlichen mit den Ausführungen zu *Propositio* VII des vierten Tages der Discorsi überein.

7. Pag. 433 (Mss. Gal. P. V. T. II. car. III. t.).

Anfang des Beweises für den Satz (*Propositio* VIII des 4ten Tages der Discorsi), dafs die Amplituden je zweier Parabeln gleich sind, wenn der Impetus der geworfenen Körper der gleiche ist und der Wurf in Winkeln erfolgt, die vom halben Rechten um gleich viel oberhalb und unterhalb abweichen.

Das Ergebnis dieser Übersicht ist in kurzen Worten zusammenzufassen. Es sind von Galilei's Hand aus einer Periode der Galilei'schen Forschung, die sicher der Abfassung der „Dialoge über die beiden Hauptweltsysteme" vorausging, eine Reihe von Fragmenten zur Wurflehre erhalten, in denen die Erkenntnis der Parabelform der Wurflinie vorausgesetzt und überdies die wichtigsten dieser Erkenntnis sich anschliefsenden Lehren in ähnlicher Weise, wie in den lateinisch geschriebenen Abschnitten der Discorsi, zum Teil in wörtlicher Übereinstimmung mit denselben behandelt werden.

Auch in dieser Einschränkung ausgesprochen, genügt das Ergebnis der Handschriften-Prüfung, um zu beweisen, dafs die Entdeckung der Parabelform der Wurflinie Galilei, nicht Cavalieri gehört. Es ist dabei zunächst dem Zweifel Raum gelassen, ob die Ungleichheiten der Galilei'schen Handschrift eine völlig sichere Unterscheidung zwischen dem, was vor und nach 1610 geschrieben ist, gestatten mögen. Zieht man jedoch in Betracht, dafs nach allen in Galilei's Briefwechsel vorliegenden Angaben ein Abschlufs seiner Forschung zur Wurflehre im Jahre 1609 vor der Erfindung des Fernrohrs stattgefunden hat, und dafs er zu dem gleichen Forschungsgebiet frühestens zwei Jahrzehnte später zurückgekehrt ist, so gewährt die Wahrnehmung, dafs die besprochenen Fragmente von Galilei's jugendlicher Hand geschrieben sind, zugleich ein unzweideutiges Zeugnis dafür, dafs sie der Paduaner Periode angehören, also Bruchstücke derjenigen Wurflehre sind, von der Galilei dem Luca Valerio und dem Minister Vinta berichtet, und dafs die lateinischen Abschnitte des vierten Tages der Discorsi, die nur ausführen, was dem Inhalte nach schon in den Fragmenten enthalten ist, in Wahrheit sind, was sie zu sein beanspruchen, Bestandteile des in Padua zum vorläufigen Abschlufs gebrachten Manuskripts einer neuen Bewegungs-

lehre. GALILEI's Wurflehre, wie sie in den Discorsi vorgetragen wird, ist demnach ein Erzeugnis jener glorreichen Zeit seiner besten Mannesjahre, der die Mehrzahl seiner grofsen Entdeckungen angehört, nicht seines Greisenalters.

So ist denn auch, CAVERNI's kecker Verwerfung zum Trotz, jedem Zweifel an der Glaubwürdigkeit des Briefes vom 11. September 1632 die Berechtigung genommen. Der Brief ist wahr in allen seinen Teilen; GALILEI's Erklärung, dafs das Suchen nach der Form der Wurflinie Ausgangspunkt seiner Bewegungsforschung gewesen sei, mufs wie bisher, auch fernerhin als festes Datum für die geschichtliche Deutung des Entwicklungsgangs der neueren Bewegungslehre angesehen werden.

Mit gröfserer Bestimmtheit darf man nunmehr auch den Brief vom Februar 1609 als nach der Entdeckung der Parabelform geschrieben, das dort zuerst formulierte Gesetz der gleichen Fallzeiten als aus der Erkenntnis der wahren Beschaffenheit der Wurflinie abgeleitet ansehen; wenn GALILEI hier die Vergleichung der Fallzeiten der mit ungleicher Kraft in horizontaler Richtung abgeschossenen Kugeln zu den Problemen zählt, die ihm zu erörtern übrig bleiben *(questioni che mi restano intorno al moto dei proietti)*, so entspricht das durchaus der Vorstellung, dafs zu jener Zeit die Hauptsätze der Wurflehre bereits festgestellt waren, das Gesetz der gleichen Fallzeiten nur als eine weitere Folgerung hinzukam; damit scheint zusammenzuhängen, dafs diese Folgerung, die GALILEI in anderen Schriften offenbar mit besonderer Vorliebe mehrfach anführt, in den lateinischen Text der Wurflehre der Discorsi nicht aufgenommen ist.

Zu Scheinbeweisen werden dem Zeugnis der Handschriften gegenüber ohne Weiteres die Widersprüche, die gegen GALILEI's Entdeckerrecht aus den „Dialogen über die Weltsysteme“ und aus dem *„Specchio ustorio“* hergeleitet worden sind, wie alle übrigen, die man durch Auslegung anderer Stellen konstruiert hat und ferner konstruieren könnte.

Man wird trotz dieser endgiltig entscheidenden Bedeutung der Handschriften-Prüfung nicht für unangemessen halten, dafs die vorstehenden Seiten sich zumeist mit der Widerlegung scheinbarer Gegenbeweise beschäftigt haben, also strenggenommen mit dem Nachweis, dafs nicht wahrscheinlich sei, was um stärkerer Gründe willen als falsch betrachtet werden mufs. Es handelte sich dabei nicht nur um die Beantwortung der einen Frage, für die das Zeugnis der Schriftzüge ausreicht, sondern um eine Deutung des geschichtlichen Zusammenhangs in solcher Weise, dafs auch der Schein eines Widerspruchs zwischen dem Ergebnis der Handschriften-Prüfung und den anderweitig bekannten Thatsachen verschwand; denn erst mit der Beseitigung dieses Widerspruchs war klare geschichtliche Einsicht gewonnen. Aber noch ein zweites

liefs die eingehende Erörterung aller vorgebrachten Verdachtsgründe geboten erscheinen. Es konnte nicht überflüssig sein, zu zeigen, dafs CAVERNI's Angriff nicht weniger unhaltbar sein würde, wenn nicht durch einen glücklichen Zufall Dokumente erhalten wären, die an sich genügen, den Verdacht zu widerlegen. Unter den schweren Verdächtigungen, die der italienische Gelehrte gegen GALILEI's grofsen Namen erhoben hat, sind nicht wenige, denen in ähnlich leichtfertiger Weise wie den hier besprochenen mit Hülfe von Deutung und Dichtung der Schein von Lebenskraft eingeblasen ist, für deren Nichtigkeit jedoch so unwidersprechliche Zeugen wie in unserm Falle nicht in die Schranken gerufen werden können. Für die Untersuchung dieser andern Fälle mufste es von Wert sein, an dem einen, in dem die geschichtliche Wahrheit nicht in Frage steht, in möglichst vollständiger Weise die Methode dargelegt zu sehen, nach der auch die übrigen bearbeitet sind.

Verzeichnis der mathematischen Werke, Abhandlungen und Recensionen

des

Hofrat Professor Dr. **Moritz Cantor.**

Zusammengestellt

von

Maximilian Curtze.

Nachfolgendes Verzeichnis, welches auf absolute Vollständigkeit keinen Anspruch macht, da die einschlägigen Zeitschriften nicht sämtlich zur Disposition standen, umfafst alle selbständig erschienenen Arbeiten, und, soweit eben unter den oben auseinandergesetzten Umständen möglich war, die in Zeitschriften und sonstigen Sammelwerken abgedruckten Abhandlungen, Notizen und Recensionen. Von letzteren ist ja allseitig anerkannt, dafs sie für die Geschichte der Wissenschaft oft weit fördersamer sich erweisen, als das besprochene Werk selbst, so dafs sie in dieser Zusammenstellung nicht fehlen durften. Eine von kompetenter Seite zugesicherte Unterstützung bei der Ausarbeitung dieses Verzeichnisses ist später zurückgezogen worden, so dafs auch dieser Umstand bei der voraussichtlichen Unvollständigkeit desselben als mildernd in Betracht gezogen werden möge.

Thorn am 1. Juli 1899.

M. Curtze.

I.

Selbständig erschienene Werke.

1. Ueber ein weniger gebräuchliches Coordinaten-System. Inaugural-Dissertation. Frankfurt am Main, Druck von J. J. Schultheis & Comp. 1851. 39, [1] S. 8°.
2. Grundzüge einer Elementararithmetik als Leitfaden zu akademischen Vorträgen. Heidelberg, Verlag von Bangel und Schmidt, 1855. 176 S. 8°.
3. Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. Mit vier Tafeln. Halle, Druck und Verlag von H. W. Schmidt 1863. 8°. XII, 432 S., 4 Tafeln.
4. Euklid und sein Jahrhundert. Mathematisch-historische Skizze. Separatabdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner 1867. 1 Blatt, 72 S. 8°.
5. Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmefskunst. Eine historisch-mathematische Untersuchung. Mit 5 (6) lithographierten Tafeln. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner 1875. 1 Blatt, 273 [1] S. 8°. 6 Tafeln.

6. Das Gesetz im Zufall. Vortrag. Berlin SW. 1877. Verlag von Carl Habel. (C. G. Lüderitz'sche Verlagsbuchhandlung). 33 Wilhelmstrafse 33. (Sammlung gemeinverständl. wissenschaftl. Vorträge, herausgegeben von Rud. Virchow und Frz. von Holtzendorff; XII. Serie, Heft 275.) 48 S. (377—424). 8°.
7. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner 1880. VIII, 804 S. gr. 8°. 1 Tafel.
8. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner 1892. X, 863 [1] S. gr. 8°.
   Auch in zwei Hälften erschienen I, S. 1—500; II, X u. S. 501—864.
9. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. Zweite Auflage. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner 1894. VII [1], 883 [1] S. gr. 8°., 1 Tafel.
10. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter (Schlufs-) Band. Vom Jahre 1668—1759. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. XIV, 893 [1] S. gr. 8°.
   Erste Abtheilung. Die Zeit von 1668—1699. Mit 45 Figuren im Text. 1894. 251 [1] S.
   Zweite Abtheilung. Die Zeit von 1700—1726. Mit 30 Figuren im Text. 1896. S. 253—472.
   Dritte Abtheilung. Die Zeit von 1727—1758. Mit 70 Figuren im Text. 1898. XIV und S. 473—893.
11. Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner 1898. X, 136 S. 8°.
12. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Erster Halbband. Von 1200—1500. Mit 93 in den Text gedruckten Figuren. Zweite Auflage. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner 1899. S. 1—480. gr. 8.

II.

Zeitschriften, an deren Herausgabe Cantor beteiligt war.

1. Kritische Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik. Herausgegeben v. A. Kekulé, G. Levinstein, F. Eisenlohr und M. Cantor. Jahrgang 1858 (einziger) Erlangen, F. Enke.
2. Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter der verantwortlichen Redaktion von Dr. O. Schlömilch und Dr. R. Witzschel (Jahrg. I—III) 1856—1859; unter der verantwortlichen Redaktion von Dr. O. Schlömilch, Dr. B. Witzschel und Dr. M. Cantor (Jahrg. IV) 1860; unter der verantwortlichen Redaktion von Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl und Dr. M. Cantor (Jahrg. V—XXXVII) 1861—1892; unter der verantwortlichen Redaktion von Dr. O. Schlömilch und Dr. M. Cantor (Jahrg. XXXVIII—XLI) 1893—1896; Gegenwärtig herausgeg. von Dr. R. Mehmke und Dr. M. Cantor (Jahrg. XLII—XLIV) 1897—1899. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner 1856—1899.
3. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. In zwanglosen Heften. I. 1877; II. 1879; III. 1880; IV. 1882; V. 1890; VI. 1892; VII. 1895; VIII. 1898. gr. 8°. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner.
   Auch als Supplementhefte zur „Zeitschrift für Mathem. und Physik" ausgegeben.

III.

Abhandlungen und Recensionen.

A. Aus der „Kritischen Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik". Stand mir nicht zur Disposition.

B. Aus der „Zeitschrift für Mathematik und Physik".

I. Abhandlungen.

Jahrgang 1. **1856:** Ueber die Einführung unserer gegenwärtigen Ziffern in Europa. 65—74. — Ueber den Werth von 0°. 244—245.

Jahrgang 2. **1857:** Ueber die Porismen des Euklid und deren Divinatoren 17—27. — Physikalische Aufgabe 64—65. — Ueber eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten 65—66. — Ueber eine combinatorische Aufgabe 103—107. — Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus, drei mathematische Charakterbilder aus dem 16. Jahrhundert. Vortrag, gehalten zu Bonn in der mathem.-astron. Section der 33. Naturforscher-Vers. 353—367. — Ueber Normalstellen. 410—412.

Jahrgang 3. **1858:** Ramus in Heidelberg. 133—143. — Zur Geschichte der Zahlzeichen. Vortrag, gehalten zu Carlsruhe in der mathem.-astron. Section der 34. Naturforscher-Vers. 325—341.

Jahrgang 4. **1859:** Ueber vollkommene Zahlen. 160—161. — Eine unbestimmte Aufgabe. 232—233. — Das pythagoräische Dreieck. 306—309. — Die Professur des Ramus. 314—315.

Jahrgang 5. **1860:** Zur Theorie paralleler Curven. 219—223.

Jahrgang 6. **1861:** Ueber arithmetische Progressionen von Primzahlen. 340—343.

Jahrgang 7. **1862:** Ueber Leitlinien. 50—52.

Jahrgang 8. **1863:** Olry Terquem. Biographische Notiz. Litt. Bericht. 105—109.

Jahrgang 9. **1864:** Galileo Galilei. 172—197.

Jahrgang 10. **1865:** Ueber einen Codex des Klosters Salem. 1—16.

Jahrgang 11. **1866:** Aufgabe. 176. — Ueber die Summe von Cubikzahlen nach Prof. Angelo Genocchi. 248—252.

Jahrgang 12. **1867:** Summe von Cubikzahlen. 170—172. — Einfache Construction der Berührungslininien an die Lemniscate. 428—429. — Euklid und sein Jahrhundert. Mathem.-histor. Skizze. Supplementheft. 1—72.

Jahrgang 14. **1869:** Leibnitz und die Differentation mit beliebigem Index. Litteratur-Zeitung. 30—31.

Jahrgang 17. **1872:** Die Familie Fagnano. 88. — Bürmann. 428—430.

Jahrgang 20. **1875:** Gottfried Friedlein †, ein Nekrolog. Hist.-liter. Abtheilung. 109—113. — Zahlentheoretische Spielerei. 134—135.

Jahrgang 22. **1877:** Gräco-Indische Studien. Hist.-liter. Abtheilung. 1—23.

Jahrgang 23. **1878:** Der Briefwechsel zwischen Lagrange und Euler. Hist.-liter. Abtheilung. 1—21.

Jahrgang 24. **1879:** Drei Briefe von Lagrange. Hist.-liter. Abtheilung. 182—184.

Jahrgang 33. **1888:** Ueber eine Proportion aus der elementaren Stereometrie. 119.

Jahrgang 38. 1893: Ein mathematischer Papyrus in griechischer Sprache. Hist.-liter. Abtheilung. 81—87.

Jahrgang 39. 1894: Fürst Baldassarre Boncompagni Ludovisi. Ein Nachruf. Hist.-liter. Abtheilung. 161—163.

Jahrgang 41. 1896: Functionalgleichungen mit drei von einander unabhängigen Veränderlichen. 161—163.

II. Recensionen.

I. Weissenborn, H., Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange. Halle 1856. 57—63. — Riecke, Frd., Die Rechnung mit Richtungszahlen oder die geometrische Behandl. imagin. Grössen. Stuttgart 1856. 77—79.

II. Hoffmann, L., Mathematisches Wörterbuch. Berlin. 36—39. — Spitz, C., Lehrbuch der ebenen Geometrie. Lpzg. u. Heidelb. 1857. 65—68. — Sloman, H., Leibnitzens Anspruch auf die Erfind. der Differentialrechnung. Lpzg. 1857. 94—96.

III. Bretschneider, C. A., System der Arithmetik und Analysis. Jena 1856/57. 27—29.

IV. Schwarz, Herm., Grundzüge einer Elementararithmetik. Hagen 1859. 59—66. — L. A. Sohnke's Sammlung von Aufgaben aus der Different.- und Integral-Rechnung. 2. Aufl. von H. J. Schnitzler. Halle 1859. 87—88. — Mathemat. Abhandlungsregister 1858. 10—20; 76—86.

V. Krist, Jos., Ueber Zahlensysteme und deren Geschichte. Ofen 1859. 49 bis 52. — Müller, J. H. T., Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematik. Lpzg. 1860. 73—74. — Mathemat. Abhandlungsregister 1859. 22—32; 86—96.

VI. Nock, Zenodorus' Abhandlung über die isoperimetrischen Figuren. Deutsch bearb. Freiburg 1860. 1—3. — Chasles, M., Les trois livres de porisme d'Euclide retablies pour la 1er fois. Paris 1860. 3—7. — Bartolomaei, Fr., Zehn Vorlesungen über Philos. der Mathematik. Jena 1860. 7—8. — Ofterdinger, L. F., Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik. Ulm 1860. 41—42. — Delboeuf, J., Prolegomènes philosoph. de la géometrie et solut. des postulats. Liège 1860. 42—44. — Mathem. Abhandlungsregister 1860. 51—60; 119—128.

VII. Friedlein, G., Gerbert, die Geometrie des Boetius und die indischen Ziffern. Erlangen 1861. 59. — Secchi, A., Intorno alla vita ed alle opere del P. Giambatista Pianciani. Roma 1862. 65—66. — Mathem. Abhandlungsregister 1861. 44—52; 92—102.

VIII. Scritti di Leonardo Pisano pubblic. da B. Boncompagni. 2 Bde. Roma 1862. 41—47. — Lehmann, Fr. A., Die Archimedische Spirale mit Rücks. auf ihre Geschichte. Freiburg 1862. 47—48. — Narducci, E., Catalogo di manoscritti ora possed. da D. B. Boncompagni. Roma 1862. 65—68. — Cantor, M. Mathemat. Beiträge zum Culturleben der Völker. Halle 1863. 81. — Mathem. Abhandlungsregister 1862. 55—64; 125—135.

IX. Joachimsthal, J., Elemente der analyt. Geometr. der Ebene. Berlin 1863. 1—7. — Chasles, Ph., Galileo Galilei, sa vie, son procès et ses comtemporains Paris 1863. 17—21. — Woepcke, Fr., Passages relatifs à des sommations de séries de cubes extr. de manuscr. arabes inédits. Rome 1863. 49—50. — Oeuvres

de Désargues, réun. et anal. p. M. Poudra. Paris 1864. 89—93. — Sturm, Cours d'analyse de l'école polytechnique 2e éd. par E. Prouhet. Paris 1863 bis 64. 105—108. — Unverzagt, Ueber eine neue Methode zur Untersch. räuml. Gebilde. Wiesbaden 1864. 110. — Snell, Ueber Galilei als Begründer der modernen Physik. Jena 1864. 111. — Mathem. Abhandlungsregister 1863. 63—72; 120—128.

X. Heronis Alexandrini geometr. et stereometr. reliquiae ed. Fr. Hultsch Berlin 1864. 1. — Woepcke, Fr., Passages relatives à des sommat. des séries de cubes etc. Rome 1864. 25—26. — Metrologicor. scriptor. reliquiae Coll. Fr. Hultsch I. Lps. 1864. 41—42. — Vosen, Chrn., Galileo Galilei und die römische Verurth. des kopernik. Systems. Frankfurt a/M. 1865. 49—51. — Mathem. Abhandlungsregister 1864. 70—80; 112—120.

XI. Martin, Th. H., Observations et théories des anciens sur les attract. et. repuls. magnétiques et sur les attract. électr. Rome 1865. 21—23. — Quetelet, A., Histoire des sciences mathém. et phys. chez les Belges. Bruxelles 1864. 29—33. — Mathem. Abhandlungsregister 1865. 43—52; 77—86.

XII. Giesel, Die Entstehung des Newton-Leibnitz'schen Prioritätsstreites hinsichtlich der Erfind. der Infinitesimalrechnung. Delitzsch 1866. 44—46. — Le Messâhat de Mohammed ben Moussa al Khârezmî extrait de son algèbre par Arist. Marre 2e éd. Rome 1866. 47. — Notiz (über die Annali di Matematica) 65. — Weissenborn, H., Lebensbeschreibung des Ehrenfried Walther von Tschirnhaus etc. Eisenach 1866. 79—81. — Mathem. Abhandlungsregister 1866. 50—60; 93—104.

XIII. Benecke, A., Ueber die geometrische Hypothesis in Plato's Menon. Elbing 1867. 9—12. — Palm, G. A., Der Magnetismus im Alterthum. Stuttgart 1867. 12—13. — Zeitschrift für Bibliographie und Geschichte der Mathematik, herausg. von B. Boncompagni in Rom. 15—16. — Martin, Fr. Th., Galilée, les droits de la science et la méth. des sciences phys. Paris 1868. 53—59. — Mathem. Abhandlungsregister 1867. 27—36; 69—80.

XIV. Bretschneider, C. A., Beiträge zur Geschichte der griechischen Geometrie. Gotha 1869. 29—30. — Didion, Notice sur la vie et les ouvrages du général J. V. Poncelet. Paris 1869. 53—56. — Forti, Ang., Intorno alla vita ed alle opere di Luigi Lagrange. 2. ed. Roma 1869. 56—57. — Mathem. Abhandlungsregister 1868. 37—44; 59—68.

XV. Giesel, Jacob Bernoulli. Leer 1869. 17—19. — Dreydorff, J. G., Pascal, sein Leben und seine Kämpfe. Lpzg. 1870. 19—28. — Mathem. Abhandlungsregister 1869. 35—44; 112—120.

XVI. Wohlwill, E., Der Inquisitionsprocess des Galileo Galilei. Berlin 1870. — Gherardi, S., Il processo Galileo riveduto sopra documenti di nuova fonte. Firenze 1870. 1—8. — Knapp, G. F., Die Sterblichkeit von Sachsen. Nach amtl. Quellen. Lpzg. 1869. 55—56. — Unverzagt, W., Ueber ein einfaches Coordinatensystem der Geraden. Wiesbaden 1871. 57—59. — Bretschneider, C. A., Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Lpzg. 1870. 65—70. — Mathem. Abhandlungsregister 1870. 44—52; 73—80.

XVII. Günther, S., Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche. Weissenburg 1872. 102. — Friedlein, G., Beiträge zur Geschichte der Mathematik II. Hof 1872. 105—110. — Mathem. Abhandlungsregister 1871. 53—63; 117—128.

XVIII. Nicolai Copernici de Revolutionib. orb. caelest. libri VI. Thoruni 1873. 31—33. — Berichtigung 71—72. — Friedlein, G., Beiträge zur Geschichte der Mathematik III. Hof 1873. 85—86. — Dieci lettere di Gius. Luigi Lagrange pubbl. da Giambatt. Biadego. Roma 1873. 86—87. — Mathem. Abhandlungsregister 1872. 44—54; 74—84.

XIX. Ziegler, Alex., Regiomontanus (Joh. Müller a. Königsberg in Franken), ein geistr. Vorläuf. des Columbus. Dresden 1871. 41—53. — Geiser, C. F., Zur Erinnerung an Jacob Steiner. Zürich 1874. 65—67. — Mathem. Abhandlungsregister 1873. 31—40; 75—84.

XX. Hankel, H., Zur Geschichte der Mathematik im Alterth. und Mittelalter. Lpzg. 1874. 27—38. — Prowe, L., Nicolaus Copernicus auf der Universität zu Krakau. Thorn 1874. 38—39. — Kuckuck, A., Die Rechenkunst im 16. Jahrhundert. Berlin 1874. 65—68. — Rosenow, H., Die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt. Breslau 1873. 69—70. — Finger, Jos., Directe Deduction der Begriffe der algebr. und arithm. Grundoperat. aus dem Grössen- und Zahlbegriffe. Laibach 1873. 70—71. — Claudel, La théorie des parallèles selon les géomètres Japonais. Bruxelles 1875. 71—73. — Hipler, Frz., Die Porträts des Nicolaus Copernicus. Lpzg. 1875. 92—95. — Bremiker, C., Tafeln vierstelliger Logarithmen. Berlin 1874. 95—96. — Report of the commitee on mathematical tables. London 1873. 103—105. — Die erste Säkularfeier der Geburt von Nicolaus Copernicus. Thorn 1874. 106. — Oppert, J., L'étalon de mesures Assyriennes fixé par les textes cunéiformes. Paris 1875. 149—165. — Heinrici, J., Lehrbuch für den Rechenunterricht. Heidelberg 1875. 172—174. — Mathem. Abhandlungsregister 1874. 43—56; 139—148.

XXI. Cremona, L., Elemente des graphischen Calculs. Deutsch von M. Curtze. Lpzg. 1875. 19—20. — Favaro, A., Saggio di chronografia dei Matematici dell' Antichità (Anno 600 a. C. — A. 400 d. C.) Padova 1875. 20—21. — Mansion, P., Notices sur les travaux de R. F. A. Clebsch. Rome 1875. 37. — Gerhardt, Die Sammlung des Pappus von Alexandria. Eisleben 1875. 37—42. — Bohn, C., Anleitung zur Vermessung von Feld und Wald. Berlin 1876. 42—43. — Pappi Alex. Collectionis quae supersunt. ed. Fr. Hultsch I. Berol. 1875. 70—80. — v. Gebler, C., Galileo Galilei und die Römische Curie. Stuttgart 1876. 96—99. — Günther, S., Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften. Lpzg. 1876. 99—103. — Majer, L., Proklos über die Petita u. Axiomata bei Euklid. Tübingen 1875. 181—183. — Useneri, H., ad historiam astronomiae symbola. Bonn 1876. 183—184. — Mathem. Abhandlungsregister 1875. 47—56; 116—124.

XXII. Bombelli, R., Studi archeologico-critici circa l'antica numerazione italica P. I. Roma 1876. 54—56. — Stoy, H., Zur Geschichte des Rechenunterrichtes I. Jena 1876. 55—57. — Hoppe, R., Tafeln zur 30stelligen logarithmischen Rechnung. Lpzg. 1876. 57—58. — August, F., Die Elemente der Arithmetik. Berlin 1875. 59. — Hermes, O., Elementaraufgaben aus der Algebra. Berlin 1875. 59—60. — Unverzagt, K. W., Theorie der goniometrischen und der logarithm. Quaternionen. Wiesbaden 1876. 83—86. — Garbieri, I sei cartelli di matematica disfida tra Tartalea e Ferrari. Milano 1876. 133—150. — Tychonis Brahei et aliorum doctor. viror. epistolae ed. F. R. Friis. Fasc. 1. Hauniae 1876. 150—154. — Biasi, Gi., Il calcolo sulle incognite delle equazioni algebriche. Verona 1876. 160—162. — Lejeune-Dirichlet, G., Vorlesungen über die im umgekehrten

Verhältnis der Quadrate wirkenden Kräfte. Herausgeg. von Grube. Lpzg. 1876. 162—163. — Pappi Alexandr., Collectionis quae supersunt ed. Fr. Hultsch II. Berol. 1877. 173—179. — Günther, S., Studien zur Geschichte der mathem. und physik. Geographie I u. II. Halle 1877. 179—181. — Stoeber, E., Die römische Grundsteuervermessung. München 1877. 182—184. — Weissenborn, H., Die Entwickelung des Ziffernrechnens. Eisenach 1877. 184—185. — Winnecke, F. A. F., Gauss, Ein Umriss seines Lebens. Braunschweig 1877. 185. — Wolf, R., Taschenbuch für Mathem., Physik, Geodäsie und Astronomie. 5. A. Zürich 1877. 185—186. — Bardey, E., Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten. 2. A. Lpzg. 1876. 186—187. — Müller, J., Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 3. A. von H. Müller. Braunschweig 1876. 187—188 — Mathem. Abhandlungsregister 1876. 121—132; 201—212.

XXIII. Wolf, Geschichte der Astronomie. München 1877. 85—88. — Zuckermann, B., Das Mathematische im Talmud. Breslau 1878. 88—92. — Günther, S., Der Thibaut'sche Beweis für das elfte Axiom hist. und kritisch erörtert. Ansbach 1877. 92—93. — Schenk, Philipp Reis, der Erfinder des Telephon. Frankfurt a/M. 1878. 93. — Hugel, Th., Das Problem der magischen Systeme. Neustadt a/H. 1876. 133—134. — Marsano, G. B., Principii elementari sulle probabilità. Genova 1876. 134—135. — Rothlauf, B., Die Mathematik zu Platons Zeiten und seine Bezieh. zu ihr. München 1878. 169—170. — Kieseritzky, C., Die Zahlzeichen und Zahlensysteme der Griechen und ihre Logistik. St. Petersburg 1877. 171. — Molagola, C., Della vita e delle opere di Antonio. Urceo detto Codro. Studi. Bologna 1878. 171—172. — Haenselmann, C., Carl Friedrich Gaufs. 12 Capitel aus seinem Leben. Lpzg. 1878. 173—174. — Schlegel, V., Hermann Grassmann, sein Leben und seine Werke. Lpzg. 1878. 174—175. — Billwiller, K., Kepler als Reformator der Astronomie. Zürich 1878. 175. — Burmeister, Th., Geschichte der Hageltheorien. Glückstadt 1877. 176. — Hattendorff, K., Algebraische Analysis. Hannover 1877. 176—177. — Vogler, A., Anleitung zum Entwurf graphischer Tafeln. Berlin 1877. 190—191. — Unverzagt, W., Der Winkel als Grundlage mathemat. Untersuchung. Wiesbaden 1878. 191—192. — Mathem. Abhandlungsregister 1877. 102—116; 196—208.

XXIV. Petersen, J., Theorie der algebr. Gleichungen. Kopenhagen 1878. 31—33. — Mansion, P., Elemente der Theorie der Determinanten. Lpzg. 1878. 33. — Pappi Alexandr., Collectionis quae supersunt ed. Hultsch III. Berol. 1878. 126—132. — Biadego, G., Pietro Maggi matematico e poeta Veronese. Verona 1879. 132. — Ludwig, C., Rede zum Gedächtnis an Ernst H. Weber. Lpzg. 1878. 133. — Hoüel, J., Cours de calcul infinitésimal I. Paris 1878. 140—143. — Bunkofer, W., Zahlbüschel, Mittelpunkt. Aequivalente Vertretung von Punktsystemen. Bruchsal 1878. 144—145. — Roentgen, R., Die Anfangsgründe der analytischen Geometrie. Jena 1879. 145—146. — Müller, J., Elemente der analyt. Geometrie in der Ebene und im Raume. 2. Aufl. von H. Müller. Braunschweig 1878. 146. — v. Ott, K., Das graphische Rechnen und die graphische Statik. I. Prag 1879. 146—147. — Günther, S., Studien zur Geschichte der mathem. und physik. Geographie. Halle 1877/79. 167—168. — Heiberg, J. L., Quaestiones Archimedeae. Hauniae 1879. 168—169. — Mathem. Abhandlungsregister 1878. 111—120; 209 bis 224.

XXV. Caesar, J., Christian Wolff in Marburg. Marb. 1879 31—32. —

Gaufs, F. G., Fünfstellige vollst. logarithm. und trigonometr. Tafeln. II. Aufl. Zeitz 1879. 32. — Wolf, R., Geschichte der Vermessungen in der Schweiz. Zürich 1879. 35—37. — Hoüel, J., Cours de calcul infinitésimal. II. Paris 1879. 71—74. — Nicolaus Coppernicus aus Thorn, Ueber die Kreisbeweg. der Weltkörper. Deutsch von Menzzer. Thorn 1879. 99. — Heilermann und Dieckmann, Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra. 3 Thle. Essen 1878/79. 100—102. — Reidt, Fr, Arithmetik und Algebra. Breslau 1879. 103—104. — Reidt, Fr., Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. Breslau 1879/80. 194 bis 195. — Scott, Q. F., A treatise on the theorie of determinants and their applications. Cambridge 1880. 203—204. — Wittstein, Th., Analytische Geometrie. Hannover 1880. 203—204. — Mathem. Abhandlungsregister 1879. 110—120; 208 bis 220.

XXVI. Wretschko, A., Elemente der analyt. Geometrie der Ebene. Brünn 1880. 26—27. — Girard, H., La philosophie scientifique. Paris 1880. 27—29. — Buis, Lucien, La science de la quantitée. Bruxelles 1880. 29. — Götting, R., Einleitung in die Analysis. Berlin 1880. 71—73. — Günther, S., Die Lehre von den gewöhnl. und verallgem. Hyperbelfunctionen. Halle 1881. 98—104. — Ruchonet, Ch., Eléments de calcul approximativ. 3 ed. Paris 1880. 149—150. — Joachimsthal, F., Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf die Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung. 2. Aufl. von L. Natani. Lpzg. 1881. 178—179. — Meyer, Frz., Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Hannover 1881. 180—181. — Lagrange's mathemat. Elementarvorlesungen. Deutsch von H. Niedermüller. Lpzg. 1880. 181—182. — Schapira, H., Grundlagen zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen. I, 1. 1. Lief. Odessa 1881. 182—183. — Spiess, E., Erhard Weigel, weiland Prof. der Mathem. zu Jena. Lpzg. 1881. 183—185. — Usener, De Stephano Alexandrino commentatio. Bonn 1880. 185—187. — Favaro, A., Le matematiche nello studio di Padova dal princ. del secolo XIV. all XVI. Padova 1880. 187. — Favaro, A., Galileo Galileo ed il Dialogo di Cecco di Ronchiti da Bruzene. Venezia 1881. 187—188. — Hultsch, Fr., Heraion und Artemision, zwei Tempelbauten Joniens Berlin 1881. 188—189. — Weber, H., Ueber Causalität in den Naturwissenschaften. Lpzg. 1881. 189—190. — Mathem. Abhandlungsregister 1880. 111—120; 219—232.

XXVII. Worpitzky, J., Lehrbuch der Different.- und Integr.-Rechnung. Berlin 1880. 73—76. — Heger, R., Darstellende Geometrie. Breslau 1880/81. 101—103. — Simony, O., Gemeinfafsl. leicht controllierb. Lösung der Aufg. in ein geschlossenes Band einen Knoten zu machen. 3. Aufl. Wien 1881. 103—104. — Buis, L., La science de l'espace. Bruxelles 1881. 104—105. — Zuckermann, Materialien zur Entwickelung der altjüdischen Zeitrechnung im Talmud. Breslau 1882. 106—107. — Majer, L., Proklos über die Definitionen bei Euclid. I. Stuttgart 1881. 107—108. — Archimedis opera omnia c. comm. Eutocii ed. J. L. Heiberg. I—III. Lpzg. 1880/81. 108—110. — Weissenborn, H., Die Uebersetzungen des Euklid durch Campono und Zamberti. Halle 1882. 110—111. — Favaro, A., Intorno ad una nuova edizione delle opere di Galilei. Venezia 1881. 111—112. — Reinhardt, C., Magister Joh. Sam. Doerffel, ein Beitr. z. Gesch. d. Astronomie. Plauen i. V. 1881. 112—114. — Rodel, L., Les prétendus problèmes d'Algèbre du manuel de calculateur égyptien (pap. Rhind) Paris 1882. 117. — Beyda, H. Fr. Th., Die imaginären Gröfsen und ihre Auflösung. Bonn 1881. 132—133. — Heger, R., Differential- und Integral-Rechnung. Aus-

gleichsrechnung. Breslau 1881. 133—136. — In memoriam Dominici Chelini. cur. L. Cremona et E. Beltrami. Mediolani 1881. 136—139. — Henrici, J. u. P. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie I. Lpzg. 1881. 139—140. — Goetting, R., Die Functionen Cos. und Sin. beliebiger Argumente. Berlin 1881. 140—141. — Bremiker, C., Logarithm.-trigonometr. Tafeln mit 6 Decimalst. 8. Aufl. Berlin 1881. 142. — Pryde, J., Mathematical Tables. London 1880. 142—143 — Wittstein, Th., das mathemat. Gesetz der Sterblichkeit. Hannover 1881. 143—144. — Günther, S., Parabolische Logarithmen und parabol. Trigonometrie. Lpzg. 1882. 183—186. — Lasswitz, K., Die Lehre von den Elementen während des Ueberganges von der scholast. Physik zur Corpusculartheorie. Gotha 1882. 186—187. — Bergold, E., Arithmetik und Algebra nebst einer Gesch. dieser Disciplinen. Karlsruhe 1881. 187—188. — Schroeder, Th. E., Lehrbuch der Planimetrie. Nürnberg 1882. 188—189. — Schubert, H., Illustriertes Hilfsbuch der Flächen- und Körperberechnung. Berlin 1881. 189—190. — Amthor, A., Ueber einige Arten der Aussteuerversicherung insbes. die Militärdienstvers. Dresden 1882. 190—192. — Hunrath, L., Aufgaben zum Rechnen mit Systemzahlen. Hadersleben 1882. 192—193. — Abendroth, W., Anfangsgründe der analyt. Geometrie der Ebene. Lpz. 1882. 193—194. — Muir, Th., A treatise on the theorie of determinants. London 1882. 194—197. — Hochheim, A., Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. I. Lpzg. 1882. 219—220. — Mathem. Abhandlungsregister 1881. 148—160; 232—240.

XXVIII. Campori, G., Carteggio Galileano inedito con note ed appendice. Modena 1881. 24—30. — Suchsland, E., Geometrie und ebene Trigonometrie. Stolp i. P. 1881. 37—38. — Schloemilch, O., Uebungsbuch zum Studium der höh. Analysis. II. 3. Aufl. Lpzg. 1882. 38. — Henrici, J. u. P. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie. II. Lpzg. 1882. 68—69. — Nehlz, Chr., Ueber graphische Rectification von Kreisbogen. Hamburg 1882. 69—70. — Manilius, Transporteur und Mafsstab zum Gebr. beim Unterr. in Planimetrie und Trigonometrie. Coburg 1882. 70. — Veronese, G., Dei principali metodi in geometria ed in ispecial modo del metodo analitico. Verona e Padova 1882. 70—71. — Schmidt, A., Elemente der darstellenden Geometrie. Wiesbaden 1882. 71—72. — Staudacher, H., Elementares Lehrbuch der algeb. Analysis. München 1882. 72—73. — Pasch, M., Einleit. in die Diff.- und Integralrechnung. Lpzg. 1882. 73—76. — Koppe, K., Die Arithmetik und Algebra. 12. Aufl. von W. Dahl. Essen 1882. 76—77. — Kaiser, H., Die Anfangsgründe der Determinanten in Theorie und Anwend. Wiesbaden 1882. 77. — Günther, S., Peter und Philipp Apian, zwei deutsche Mathem. und Kartographen. Prag 1882. 77—78. — Heiberg, J. L., Litteraturgeschichtl. Studien über Euklid. Lpzg. 1882. 100—102. — Böhme, A., Perioden der Decimalbrüche. Berlin 1882. 147. — Becker, E., Logarith.-trigonometr. Handbuch auf 5 Decimalst. Lpzg. 1882. 198—199. — Schubert, H., Sammlung von arithm. und algebr. Fragen und Aufgab. I. Potsdam 1883. 199—200. — Grube, Fr., Zur Geschichte des Problems der Anziehung der Ellipsoide. Schleswig 1883. 200—201. — Mathem. Abhandlungsregister 1882. 151—168; 240—256.

XXIX. Marie, M., Histoire des sciences mathém. et physique I. II. Paris 1883. 43—45. — Hunrath, K., Ueber das Ausziehen der Quadratwurzeln bei Griechen und Indern. Hadersleben 1883. 45—47. — Detlefsen, D., Die Mafse der Erdteile bei Plinius. Glückstadt 1883. 47—48. — Prowe, L., Nicolaus

Coppernicus. I, 1. 2. Berlin 1883. 48—50. — Favaro, A., Galileo Galilei e lo studio di Padova. I. II. Firenze 1883, 50—51. — Boncompagni, B., Intorno alla vita ed alle lavori di Ant. Carlo Marcellino Poullet-Delisle. Roma 1883. 51—52. — Boncompagni, B., Atti di nascita e di morte di Pietro Simone Marchese di Laplace. Roma 1883. 52—53 — Nachreiner, V., Beitrag zur Theorie der best. Integrale und zur Attraktionstheorie. Neustadt a. H. 1883. 67—68. — Beau O., Untersuch. auf dem Gebiete der trigonom. Reihen und der Fourier'schen Integr. Lpzg. 1883. 110—112. — Pein, A., Aufgab. aus der sphärischen Astronomie. Bochum 1823. 112. — Henrici, J., Vierstellige logarith.-trigonom. Tafeln. Lpzg. 1882. 113. — Bremiker's logarith.-trigonometr. Tafeln mit 6 Decimalst., neu bearb. von Th. Albrecht. 10. Aufl. Berlin 1883. 113. — Rühlmann, M., Logarithm.-trigonometr. und andere für Rechner nützl. Tafeln. 9. Aufl. Lpzg. 1883. 114. — Schubert H., Sammlung von arithm. und algebr. Fragen und Aufgaben. II. Potsdam 1883. 114—115. — Haas, C., Theilbarkeitsregel für ein Zahlsystem mit belieb. ganzer posit. Basis. Wien 1883, 146. — Hunrath, L., Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Decimalbrüche. Kiel 1884. 176. — Marinelli, G., Die Erdkunde bei den Kirchenvätern. Deutsch von Neumann. Lpzg. 1884. 176—177. — v. Stein, L., Das Bildungswesen des Mittelalters. Scholastik, Universität, Humanismus. 2. Aufl. Stuttgart 1883. 177—179. — Brockmann, J. J., System der Chronologie. Stuttgart 1883. 179—180. — Schubring, G., Zur Erinnerung an die Gregorianische Kalenderreform (Oct. 1582). Halle a. S. 1883. 180. — Marie, M., Histoire des sciences mathém. et physiques III. Paris 1884. 180—183. — Giesel, G., Festschrift zur 50jähr. Gedächtnisfeier der Realschule I. Ordnung zu Leipzig. Lpzg. 1884. 184—185. — Die Basler Mathematiker Daniel Bernoulli und Leonhard Euler hundert Jahre nach ihrem Tode. Basel 1884. 185. — Riggenbach, A., Historische Studie üb. d. Entwickel. der Grundbegriffe der Wärmefortpflanzung. Basel 1884. 186. — Wundt, W., Logik. Eine Untersuch. üb. die Principien der Erkenntnis. II, 2. Stuttgart 1883. 196—198. — Perozzo, L., Neue Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Statistik. Deutsch von O. Elbe. Dresden 1883. 198—199. — Tomasinelli, Gi., Esercici sulle equazioni differenziale. Pisa 1883. 199—200. — Hoüel, J., Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire 2e éd. Paris 1883. 200—201. — Fuhrmann, W., Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Berlin 1884. 201—202. — J. Henrici und P. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie III. Lpzg. 1883. 230 — Hochheim, A., Aufgaben aus der analyt. Geometrie der Ebene II. Lpzg. 1883. 231. — Böcklen, O., Analytische Geometrie des Raumes. 2. Aufl. Stuttgart 1884. 231—233. — Schwering, K., Theorie und Anwendung der Liniencoordinaten in der analyt. Geometr. der Ebene. Lpzg. 1884. 233—236. — Mathem. Abhandlungsregister 1883. 149—168; 239—256.

XXX. Boncompagni, B., Lettre de Ch.-Fr. Gaufs an Dr. H.-G.-M. Olbers en date de Braunschweig den 3. Sept. 1805. Berlin 1883. 21—22. — Hankel, H., Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. 2. Aufl. von P. du Bois-Reymond. Tübingen 1885. 22—23. — Euler, L., Einleitung in die Analysis des Unendlichen I. Deutsch von H. Maser. Berlin 1884. 23—24. — Czuber, E., Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerthe. Lpzg. 1884. 24—27. — Serret, J. A., Lehrbuch der Diff.- und Integr.-Rechnung. Deutsch von A. Harnack. I. Lpzg. 1884. 28—29. — Reuschle, C.,

Graphisch-mechanische Methode zur Auflös. der numer. Gleichungen. Stuttgart 1884. 29—30. — Schobloch, J. A., Ueber Beta- und Gammafunctionen. Halle 1884. 30—31. — Hellweg, C., Ueber die quadr. und cubisch. Gleichungen mit bes. Berücksicht. des irreduciblen Falles. Erfurt 1884. 31—32. — Gallopin-Schaub, Ch., Théorie des approximations numériques. Genève 1884. 32. — Grünwald, V., Saggio di aritmetica non decimale. Verona 1884. 33. — Benoist, A., Tables de logarithmes à six décim. Paris. s. d. 33—34. — Greve, A., Fünfstellige logarithm. und trigonometr. Tafeln. Bielefeld und Lpzg. 1884. 34. — Hammer E., Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart 1885. 110—111. — Simon, M., Die Elemente der Arithmetik als Vorbereit. auf die Funktionentheorie. Strafsburg 1884. 111—112. — Schubert, H., System der Arithmet. und Algebr. Potsdam 1885. 112—113. — Kaiser, H., Die Determinanten. Wiesbaden 1885. 113. — Giesius, J., Neuer Unterricht in der Schnellrechenkunst. Döbeln 1884. 113—114. — Krimphoff, W., Beitrag zur analyt. Behandlung der Umhüllungscurven. Coesfeld 1885. 114—115. — Marie, M., Histoire des sciences mathém. et physiques. IV. V. Paris 1884. 115—116. — Gow, J., A schort history of Greek mathematics. Cambridge 1884. 127—128. — Dupuis, T., Le nombre géométrique de Platon. Paris 1881. Seconde interprétation. Paris 1883. Troisième mémoire. Paris 1885. 128—129. — Julius Klaproths Schreiben an Alex. v. Humboldt über die Erfindung des Compasses. Im Auszuge mitget. von A. Wittstein. Lpzg. 1885. 129—130. — Favaro, A., Gli scritti inediti di Leonardo da Vinci sec. gli ultimi studi. Venezia 1885. 130—131. — Wohlwill, E., Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes. Weimar 1884. 131—132. — Marie M., Histoire des sciences mathém. et physiques VI. Paris 1885. 132—133. — Hunrath, K., Algebraische Untersuchungen nach Tschirnbausens Methode. Hadersleben 1885. 133—134. — Nekrolog des Kgl. Würtemb. Oberstudienraths Dr. Ch. H. von Nagel. Tübingen 1884. 134. — Schubring, P., Der christl. Kalender alten und neuen Stils in tabellar. Form dargestellt. Erfurt 1884. 135. — Müller, F., Kalender-Tabellen. Berlin 1885. 136. — Hauck, G., Mein perspectivischer Apparat. Berlin 1884. 143—144. — Hauck, G., Die Grenze zwischen Malerei und Plastik und das Gesetz des Reliefs. Berlin 1885. 144—145. — Wie studiert man Mathem. und Physik? Von einem Lehr. der Mathem. Lpzg. 1885. 145—146. — Bibliotheca Mathematica herausgegeb. von G. Eneström. Stockholm 1884. 280. — di Pampero, A., Saggio di tavole dei logaritmi quadratici. Udine 1885. 280—281. — Mathem. Abhandlungsregister. 1884. 149—168; 284—300.

XXXI. Henrici, Die Erforschung der Schwere durch Galilei, Huygens, Newton als Grundlage der rationell. Kinematik u. Dynamik. Lpzg. 1885. 38. — Serret, J. A., Lehrbuch der Diff.- und Integr.-Rechnung. Deutsch von A. Harnack II, 1, 2. Lpzg. 1885. 77—78. — Autolici, de sphaera quae movetur liber, de ortibus et occasibus libri duo ed. Fr. Hultsch. Lpzg. 1885. 152—154. — Der liber trium fratrum de geometria herausg. von M Curtze. Halle 1885. 155—156. — Favaro A., Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero e di altri celebri astronomi. Bologna 1886. 156—157. — Klimpert, R., Kurzgefafste Geschichte der Arithm. und Algebra. Hannover 1885. 157. — Marie, M., Histoire des sciences mathém. et physiques VII. Paris 1885. 172. — Bohnenberger, J. G. F., Die Berechnung der trigonometr. Vermessungen mit Rücks. auf die sphäroidische Gestalt der Erde. Deutsch von E. Hammer. Stuttgart 1885. 173.

— Cauchy, A. L., Algebraische Analysis. Deutsch von C. Itzigsohn. Berlin 1885. 173—174. — Kaulich, E., Lehrb. der kaufmännischen Arithmetik. 4. Aufl. Prag 1885. 177—179. — Baerlocher, V., Zinseszins-, Renten-, Anleihen- und Obligationenrechnung. Zürich 1886. 179—181. — Reuschle, C., Graphisch-mechanischer Apparat zur Auflös. numer. Gleichungen. Stuttgart 1885. 181—182. — Stegemann, M., Grundrifs der Diff.- und Integr.-Rechnung II. 4. Aufl. von †††. Hannover 1886. 227—228. — Mathem. Abhandlungsregister 1885. 190—200; 231—248.

XXXII. Betti, E., Lehrbuch der Potentialtheorie und ihre Anwend. auf Elektricität und Magnetismus. Deutsch von W. Frz. Meyer. Stuttgart 1885. 16—17. — Giesel, J., Beiträge zur Analyt. Geometrie der Curven und Flächen 2. Grades. Schaffhausen 1877. Derselbe, Ueber die rechtwinkelig schneidenden Normalen einer Fläche 2. Grades. Ebd. 1885. 33—34. — Eckholm, N., C. v. L. Charlier, K. L. Hangström, Fyrställige logarithmisk-trigonometriska Handtabeller. Upsala s. a. 34—35. — Weierstrafs, K., Abhandlungen zur Funktionenlehre. Berlin 1886. 35— Viola, J., Mathem. Sophismen. 2. Aufl. Wien 1886. 35—36. — Liersemann, K. H., Maxima und Minima analyt.-geometr. beleuchtet. Einleitung. Breslau 1886. 36—37. — Beau, O., Analyt. Untersuch. im Gebiete der trigonom. Reihen und der Fourier'schen Integrale. 2. Aufl. Halle 1887. 37. — Simon, H., Die harmonische Reihe. Halle 1886. 37—38. — Reidt, Fr., Anleitung zum mathem. Unterricht an höh. Schulen. Berlin 1886. 38. — Euclidis opera omnia edid. J. L. Heiberg et H. Menge. Elemente ed. J. L. Heiberg I—IV. Lps. 1883/86. 57. — Bilfinger, G., Die Zeitmesser der antiken Völker. Stuttgart 1886. 57—58. — Giesing, J., Leben und Schriften Leonardo's da Pisa. Döbeln 1886. 58—59. — Tannery, P., Notices sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas. Paris 1886. 59—62. — Geometria Culmensis. Herausg. von H. Menthal. Lpzg. 1886. 62—63. — Günther, S., Die geometr. Näherungsconstr. Albrecht Dürer's. Ansbach 1886. 63. — Ungedruckte wissenschaftl. Correspondenz zwischen J. Kepler und Herwart v. Hohenburg. 1599. Herausg. von C. Anschütz. Prag 1886. 63—64. — Marie, M., Histoire des sciences mathém. et physiques VIII et IX. Paris 1886. 64—65. — Mach, E., Der relat. Unterrichtswerth des philolg. und der mathem.-naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer der höheren Schulen. Lpzg. und Prag 1886. 65—66. — Hochheim, A., Aufgaben aus der analyt. Geometrie der Ebene VII, 2. Lpzg. 1886. 116. — Grünwald, V., Dei sistemi numerici a base imaginaria. Brescia 1886. 116—117. — Legendre, A. M., Zahlentheorie. N. d. 3. A. Deutsch von H. Maser. Lpzg. 1886. 2. Bd. 117. — Carr, G. S., A synopsis of elementary results in pure mathematics. London und Cambridge 1886, 152—153. — Prytz, H., Tables d'Antilogarithmes. Copenhague s. d. 153—156. — Gravelius, Fünfstellige logarithmisch-trigonometr. Tafeln für die Decimaltheil. des Quadranten. Berlin 1886. 155—156. — Günther, S., Erdkunde und Mathematik in ihren gegenseitigen Beziehungen. München 1887. 156. — Wappler, Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert. Zwickau 1887. 156—157. — Marie, M., Histoire des sciences mathém. et physiques. X. Paris 1886. 157—158. — Favaro, A., Miscellanea Galileiana inedita. Venezia 1887. 174—176. — Tychonis Brahei et ad eum doct. viror. epistolae ab anno 1568 ad an. 1587 coll. et ed. F. R. Friis. Hauniae 1876/86. 176—177. — Berichtigung 209. — Rothlauf, B., Die Physik Platos. Eine Studie auf Grund seiner Werke. München 1887. 220—221. —

Harnack, A., Leibniz' Bedeutung in der Geschichte der Mathematik. Dresden 1887. 221—222. — Marie, M., Histoire des sciences mathém. et phys. XI. Paris 1887. 222—223. — Gaufs, C. F., Abhandl. zur Methode der kleinsten Quadrate. Deutsch herausg. von A. Börsch und P. Simon. Berlin 1887. 223—224. — Liersemann, K. H., Maxima u. Minima analyt.-geometr. beleuchtet. Breslau 1887. 224. — Mathemat. Abhandlungsregister 1886. 180—200; 229—240.

XXXIII. Autenheimer, Fr., Elementarbuch der Different.- und Integral-Rechnung. 3. Aufl., Weimar 1887. 22. — Stegemann, M., Grundriss der Differ.- und Integr.-Rechnung I. 5. Aufl. von L. Kiepert. Hannover 1888. 22—23. — Sickenberger, A., Die Determinanten in genet. Behandl. 2. Abdr. München 1887. 23. — Zillmer, A., Die mathem. Rechnungen bei Lebens- und Rentenversich. system. entwickelt. 2. Aufl. Berlin 1887. 23—26. — Jacobsen, J., Freundschaftl. Bewirthung meiner mathem. Brüder mit einem Tractament von 6 Gerichten etc. Flensburg 1887. 26—27. — Schmid, Th., Die Form, Anzieh. u. materielle Beschaffenh. der Erde. Linz 1887. 27. — Tannery, P., La géométrie grecque I. Paris 1887. 27—31. — Zangemeister, Entstehung der römischen Zahlzeichen. Berlin 1887. 98—99. — Scholien zur Sphaerik des Theodosios. Herausgeg. von Fr. Hultsch. Leipzig 1887. 100. — Weifsenborn, H., Gerbert. Beiträge zur Kenntnis der Mathem. des Mittelalters. Berlin 1888. 101—107. — Suter, H., Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters. Zürich 1887. 108—109. — Günther, S., Geschichte des mathem. Unterrichtes im deutschen Mittelalter bis 1525. Berlin 1887. 109—111. — Wohlwill, E., Joachim Jungius und die Erneuerung der atomistischen Lehre im 17. Jahrh. Hamburg 1887. 111—112. — Tannery, P., Pour l'histoire de la science Hellène. De Thalès à Empédocle. Paris 1887. 112—115. — Demme, C., Die Hypothesis in Platon's Menon. Dresden 1888. 115—116. — Manitius, K., Des Hypsikles Schrift Anaphorikos nach Ueberliefer. u. Inhalt kritisch behand. Dresden 1888. 188—189. — Euclidis opera omnia edidd. J. L. Heiberg et H. Menge V. Lps. 1888. 189—191. — Marie, M., Histoire des sciences mathém. et phys. XII. Paris 1888. 191—192. — Schumann, E., Prof. Dr. Joh. Friedr. Wilh. Gronau, 1830—1878. Danzig 1888. 192. — Favaro, A., Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei. Firenze 1888. 192—193. — Grube, F., Zur Gesch. des Problems der Ellipsoide II. Schleswig 1888. 193—194. — Loria, G., Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Torino 1887. 194—195. — Lagrange, J. L., Analyt. Mechanik. Deutsch von H. Servus. Berlin 1887. 195—196. — Vandermonde, N., Abhandl. aus der reinen Mathem. Deutsch von Itzigsohn. Berlin 1888. 196—197. — Gaufs, C. Fr., Allgem. Untersuch. über die unendl. Reihe $1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$ Aus dem Lat. übers. von H. Simon. Berlin 1888. 197. — Aldis, W. S., A Textbook of Algebra. Oxford 1887. 197—198. — Mansion, P., Résumé du cours d'analyse infinités. de l'université de Gand. Paris 1887. 211—213. — Teyxeira, F. G., Curso de analyse infinitesimal. Porto 1887. 213—215. — Schottens, H. G. L., Ueber Fufspunktcurven. Hersfeld 1887. 215. — Brunn, Herm., Ueber ovale und Eiflächen. München 1887. 216. — Baer, K., Parabol. Koordinaten in der Ebene und im Raume. Frkfrt. a. O. 1888. 216—217. — Solling, Die Quadratur des Zirkels. Hamburg 1887. Kerschbaum, Beweis, dafs es eine Quadratur des Kreises giebt. Coburg 1887.

Hamulka. Die Quadratur der Hyperbel. Graz 1888. 217—218. — Mathem. Abhandlungsregister 1887. 153—160; 224—240.

XXXIV. Neumann, Frz., Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen. Herausg. von C. Neumann. Leipzig 1887. 30—32. — Rosanger, F. S., Lehrbuch der polit. Arithmetik für höhere Handelschulen. Braunschweig 1888. 32—34. — Bleicher, H., Grundrifs der Theorie der Zinsrechnung. Berlin 1888. 34. — Redlich, A., Prakt. Anleit. zur algebr. Entwickelung der Lösung der Gleichungen der höheren Grade. Breslau 1888. 35. — Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. 5. Aufl. I, II. Lpzg. 1887 88. 35—36. — Wernicke, A., Goniometrie und Grundzüge der Trigonometrie. Braunschweig 1888. 36—37. — Müller, F., Kalenderkarten f. d. Jahre 1800—1999. Berlin 1888. 38. — Unger, Fr., Die Methodik der prakt. Arithmetik in histor. Entwickel. vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. Lpzg. 1888. 70—73. — Rothlauf, B., Die Physik Platons. II. München 1888. 73—74. — Künßberg, H., Der Astronom, Mathematiker und Geograph, Eudoxus von Knidos I. Dinkelsbühl 1888. 74—75. — Heiberg, J. L., Om schollierne til Euclids Elementer. Kjøbenhavn 1888. 75—76. — Favaro, A., Bonaventura Cavalieri nello studio di Bologna. Bologna 1888. 76—77. — Wohlwill, E., Joachim Jungius. Festrede. Hamburg u. Lpzg. 1888. 77—78. — Ball, W. W. R., A short account of the history of mathematics. London 1888. 103—105. — Loria, G., Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung. Deutsch von Fr. Schütte. Lpzg. 1888. 105. — Günther, S., Johannes Kepler und der tellurisch-kosmische Magnetismus. Wien und Olmütz 1888. 105—106. — Schubert, H., Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen. Hamburg 1889. 152. — Fuhrmann, A., Naturwissenschaftl. Anwend. der Differentialrechnung. Berlin 1888. 195—196. — Häbler, Th., Maxima und Minima symmetrischer Functionen. Grimma 1888. 196—197. — Lieblein, J., Sammlung von Aufgaben aus der algebr. Analysis. 2. Aufl. von W. Láska. Prag 1889. 197. — Schönemann, P., Ueber die gegenseit. mechan. Verwandl. gleicher Dreiecke und Parallelogramme mittelst unmittelbarer Construction. Soest 1888. 197—198. — Schmid, Th., Die Form, Anziehung und materielle Beschaffenheit der Erde. Forts. u. Schlufs. Linz 1888. 198. — Gaufs, C. Fr., Untersuchungen über höhere Arithmetik. Deutsch von H. Maser. Berlin 1889. 218—219. — Gaufs, C. Fr., Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen wirkenden Anziehungs- und Abstofsungskräfte. Lpzg. 1889. 219—220. — Mathem. Abhandlungsregister. 1888. 105—120; 227—240.

XXXV. Allman, G. J., Greek Geometry from Thales to Euklid. Dublin 1889. 4. — Ball, W. W. R., A history of the study of mathematics at Cambridge. Cambridge 1889. 5—6. — Hartfelder, K., Philipp Melanchthon als Praeceptor Germaniae. Berlin 1889. 6—8. — Reiff, R., Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889. 8—10. — Gore, H., A bibliography of geodesy. Washington 1889. 10. — Dollarius, J. E., Janus, Ein Datumzeiger für alle Jahrhunderte. Lpzg. o. J. 10—11. — Emmerich, A., der Brocard'sche Winkel des Dreiecks. Eine geschichtl. Studie. Mühlheim a. R. 1889. 34—35. — Schwering, K. Aufgabe und Anschauung besonders in der Stereometrie. Coesfeld 1889. 36. — Müller, R., Ueber die Kurven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional sind. Berlin 1889. 36. — Hahn, H., Eulers Methode der Parameter-

darstell. algebr. Kurven. Berlin 1889. 36—37. — Gandter u. Rudio, Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Lpzg. 1888. 37—38. — Drasch, H., Elemente der analyt. Geometr. der Geraden u. d. Kegelschn. Wien 1889. 59. — Clasen, B. J., Sur une nouvelle méth. de résolut. des équations linéaires. Paris 1889. 59—60. — Pein, Aufstellung von n Königinnen auf einem Schachbrett von n^2 Feldern derart, dafs keine von einer andern geschlag. werden kann. Lpzg. 1889. 60—61. — Tschebyscheff, P. L., Theorie der Congruenzen (Elemente der Zahlentheorie). Deutsch von H. Schapira. Berlin 1889. 61—62. — Meyer, W. Frz., Zur Lehre von Unendlichen. Tübingen 1889. 62—63. — Teyxeira, G., Corso de analyse infinitesimal. Calcolo integral I. Porto 1889. 63—64. — Wolf, A. W., Beiträge zur Theorie und Praxis der Invalidenversicherung. Lpzg. 1889. 64—66. — Borchardt, Br., Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre. Berlin 1889. 66—67. — Czuber, E., Zum Gesetz der grofsen Zahlen. Prag 1889. 67—68. — Stadthagen, H., Ueber die Genauigkeit logarithm. Rechnungen. Berlin 1888. 68—69. — Frischauf, J., Einleitung in die analyt. Geometrie. 3. Aufl. Graz 1889. 145—146. — Wertheim, G., Elemente der Zahlentheorie. Lpzg. 1887. 169—170. — Lübsen, H. B., Einleit. in die Infinitesimalrechnung. 7. Aufl. von R. Schurig. Lpzg. 1889. 170—171. — Abel, N. H. und E. Galois, Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen. Deutsch von H. Maser. Berlin 1889. 171—172. — Böcklen, H., Ueber die Berücksichtigung des Historischen beim Unterricht in der Geometrie. Tübingen 1889. 172—173. — Treutlein, P., Das geschichtl. Element im mathem. Unterricht der höheren Lehranstalten. Braunschweig 1890. 173. — Graf, J. H., Der Mathematiker Joh. Sam. König und das Princip der kleinsten Action. Bern 1889. 174. — Weyrauch, J. T., Robert Mayer, der Entdecker des Princips der Erhaltung der Energie. Stuttgart 1890. 174—175. — Lasswitz, K., Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. I. Hamburg 1890. 175—179. — Festschrift, herausgegeben von der Mathem. Gesellsch. in Hamburg anläfslich ihrer 200jährigen Jubelfeier 1890. Lpzg. 1890. 179—182. — Wolf, R., Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. I. Zürich 1890. 182—183. — Günther, S. Martin Behaim. Bamberg 1890. 183—184. — Lindner, P., Ueber begrenzte Ableitungen mit complexem Zeiger. Cöslin 1890. 197—198. — Brunn, H., Ueber Curven ohne Wendepunkte. München 1889. 201—202. — Birchard, J. J. and W. J. Robertson, The high school Algebra II. Toronto 1889. 202—203. — Lipinski, W., Tafeln der Hyperbelfunctionen und der Kreisfunctionen. Berlin 1890. 203—204. — Fuhrmann, W., Der Brocardsche Winkel. Königsberg i. Pr. 1889. 204—205. — Lasswitz, K., Geschichte der Atomistik II. Hamburg 1890. 205—206. — Mathemat. Abhandlungsregister 1889. 107—120; 224—240.

XXXVI. Joachimsthal, F., Anwend. der Diff.- u. Integr.-Rechnung auf die allgem. Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung. 3. Aufl. von L. Natani. Lpzg. 1870. 28—29. — Loria, G., Il periodo aureo della geometria greca. Saggio storicc. Torino 1890. 29—30. — Rudio, F., Das Problem von der Quadratur des Zirkels. Zürich 1890. 30—31. — Fink, K., Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik. Tübingen 1890. 75—77. — Künsberg, H., Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos. II. Dinkelsbühl 1890. 77—78. — Manitius, K., Des Geminos Isagoge nach Inhalt und Darstell. kritisch beleuchtet. Lpzg. 1890. 96—97. — Diophantus von Alexandria, Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonalzahlen übers. von

G. Wertheim. Lpzg. 1890. 97—98. — Schotten, H., Inhalt und **Methode** des planimetrischen Unterrichts. Eine vergl. Planimetrie. Lpzg. 1890. **98—100.** — Blater, J., Erleichterungstafeln für Jedermann zur Erziel. fehlerfreier Ausführ. von Multipl. und Division. Wien 1889. 154—155. — Fuhrmann, A., Naturwissenschaftl. Anwendungen der Integralrechnung. Berlin 1890. 156—157. — Lembcke, K., Einfache Versicherungsrechnung I, II. Parchim 1890. 156—157. — Ball, W. W. R., Elementary Algebra. Cambridge 1890. 157. — Geometry of religion. London s. a. 158. — Schröder, E., Ueber das Zeichen. Festrede. Karlsruhe 1890. 169—170. — Engel, Fr., Der Geschmack in der neuern Mathematik. Lpzg. 1890. 170—171. — Schultz, W., Die Harmonie in der Baukunst. I. Hannover-Linden. 1891. 172—175. — Breusing, A., Die nautischen Instrumente bis zur Erfind. des Spiegelsextanten. Bremen 1890. 175. — v. Braunmühl, A., Christoph Scheiner als Mathem., Physiker und Astronom. Bamberg 1891. 175—176. — Mathem. Abhandlungsregister 1890. 110—120; 227—240.

XXXVII. Studnička, F. J., Johannes Marcus Marci a Cronland, sein Leben und sein gelehrtes Wirken. Prag 1891. 39. — Bueler, G., Verzeichnis der Programmbeilagen der schweizer. Mittelschulen. Frauenfeld 1890. 54. — Adam, J., The nuptial number of Plato: its solution and significance. London 1891. 54—55. — Kluge, G., De Euclidis elementor. libris qui feruntur XIV et XV. Lps. 1891. 55—56. — Simon, M., Grundzüge des jüdischen Kalenders. Berlin 1891. 56. — Staigmüller, H., Dürer als Mathematiker. Stuttgart 1891. 56—57. — Loria, G., Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. Torino 1891. 57—58. — Rudio, F., Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Lpzg. 1891. 67—68. — Emmerich, A., Die Brocardschen Gebilde u. ihre Bezieh. zu den verwandten merkwürd. Punkten und Kreisen des Dreiecks. Berlin 1891. 68—69. — Hobson, E. W., A treatise on plane Trigonometry. Cambridge 1891. 69—70. — Fine, H. B., The number system of Algebra treated theoretically and historically. Boston a. N. York 1891. 70—71. — Robel, E., Die Sirenen. Ein Beitr. zur Entwickelungsgesch. der Akustik. Berlin 1891. 71. — Schüller, W. J., Arithmetik und Algebra f. höhere Schulen. Lpzg. 1891. 75—76. — Schüler, W., Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades (Diophant. Gleichungen) I. Stuttgart 1891. 76—77. — Netoliczka, E., Bilder aus der Gesch. der Physik. Fortges. von A. Wachlowski. Wien u. Lpzg. 1891. 77—78. — Favaro, A., Nuove studi Galileiani. Venezia 1891. 87—91. — Villicus, Frz., Die Geschichte der Rechenk. vom Alterth. bis zum XVIII. Jahrh. 2. Aufl. Wien 1891. 92. — Hagen, J. G., Synopsis der höheren Mathematik. I. Berlin 1891. 151—152. — Deter, Chr. G. J., Repertorium der Differ.- und Integral-Rechnung. 2. Aufl. Berlin 1892. 152—153. — Ullrich, E., Das Rechnen mit Duodecimalzahlen. Heidelberg 1891. 153—154. — Henrici, J., und P. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie I. 2. Aufl. Lpzg. 1891. 154. — Schlottke, J., Analyt. Geometr. der Ebene. Dresden 1891. 154—155. — Himstedt, A., Ueber Singularitäten ebener Curven. Löbau i. WPr. 1891. 155. — Pauly, N., Die Decade und die Ziffernschrift. Danzig 1892. 210. — Köpper, Fr. Th., Notiz über die Zahlwörter im Abacus des Boethius. Petersburg 1892. 210—211. — Weissenborn, H., Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Berlin 1892. 211—213. — Rudio, F., Ueber den Antheil der mathem. Wissenschaften an der Cultur der Renaissance. Hamburg 1892. 213. — Galilei, Galileo, Dialog über die beiden hauptsächl. Weltsysteme, das Ptole-

mäische und das Kopernikanische, übers. von E. Straufs. Lpzg. 1892. 213—215. — Loria, G., Nicolo Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce. Genova 1892. 215—216. — Brückner, M., Das Ottojanische Problem. Eine mathem.-hist. Studie. Zwickau 1892. 216—217. — Mathem. Abhandlungsregister 1891. 109—120; 228—240.

XXXVIII. Uhlich, E., Reihensummation auf geometr. Wege. Häbler, Th., Die Ableitung der ebenen Trigonometrie aus drei Grundgleichungen. Grimma 1891. 38. — Gerland, S., Geschichte der Physik. Lpzg. 1892. 62. — Graf, J. H., Das Leben u. Wirken des Physikers u. Astronomen Joh. Jac. Huber aus Basel (1733—1798). Bern 1892. 63. — Müller, F., Zeittafeln zur Gesch. der math. Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500. Lpzg. 1892. 63—64. — Rudio, F., Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandl. über Kreismessung. Lpzg. 1892. 64—65. — Burkhardt, H., Bernhard Riemann. Vortrag. Göttingen 1892. 66. — Riemann, B., Gesammelte Werke und wissenschaftl. Nachlafs. Herausgeg. von Dedekind u. Weber. 2. Aufl. Lpzg. 1892. 66. — Kleinstück, O., Zeitgleichungstafeln. Jena 1892. 66—67. — Teyxeira, F. G., Curso de analyse infinitesimal. Calculo integral II. Porto 1892. 67—68. — Padé, H., Premières leçons d'algèbre élémentaire. Paris 1892. 68—69. — Müller, E. R., Vierst. logarithm. Tafeln der natürl. u. trigonometr. Zahlen. Stuttgart o. J. 69. — Kobald, E., Ueber die Versicherung der Bergwerksbruderladen u. ähnl. Kasseneinricht. I. Leoben 1892. 70. — Kiefer, A., Ueber zwei specielle Brennlinien des Kreises. Frauenfeld 1892. 71. — Baer, K., Die Vertheil. der Electricität auf der Fufspunktfl. einer Kugel. Frkfrt. a. O. 1892. 71—72. — Kamp, J., Die Finanzlage der Gothaischen Staats-Diener-Wittwen-Societät am 31. Dec. 1890. Dresden 1893. 137—141. — Per il terzo Centenario della inaugurazione dell' Insegnamento di Galileo Galilei nello studio di Padova. Firenze 1892. Omaggi di Galileo Galilei per il terzo Centenario. Padova 1892. 197—198. — Algorismus Prosaicus Magistri Christani anno fere 1400 scriptus. Nunc pr. ed. F. J. Studnička. Pragae 1893. 198—199. — Hultsch, Fr., Die Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes. Göttingen 1893. 223—224. — Apollonii Pergaei quae graece exstant cum comment. ed. J. L. Heiberg I. II. Lps. 1891/93. 224—225. — Boncompagni, B., Catalogo di Lavori di Enrico Narducci. Roma 1893. 225. — Mathem. Abhandlungsregister 1892. 149—160; 228—240.

XXXIX. Krumbacher, K., Woher stammt das Wort Ziffer (Chiffre)? Paris 1892, u. Nochmals das Wort Ziffer. Lpzg. 1893. 16. — Wertheim, G., Die Arithmetik des Elia Misrachi. Frkft. a. M. 1893. 16—17. — Koppe, M., Die Behandl. der Logarithmen u. der Sinus im Unterricht. Berlin 1893. 18—19. — Müller, F., Carl Heinrich Schellbach. Gedächtnisrede. Berlin 1893. 19—20. — Mansion, P., Notice sur les travaux scientifiques de Louis-Philippe Gilbert. Paris 1893. 20—21. — Saalschütz, L., Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen. Berlin 1893. 21—22. — Erler, W., Einleit. in die analyt. Geometrie u. in die Lehre von den Kegelschnitten. 2. Aufl. Berlin 1893. 22—23. — Simon, M., Leitfaden d. analyt. Geometrie d. Ebene. Berlin 1892. 23—24. — Tannery, P., Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne. Paris 1893. 181—182. — Tannery, P., La correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri étudiée pour l'histoire des Mathématiques. Paris 1893. 183—184. — Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro I. Modena 1893. 185—186. — Weifsenborn, H., Die Berechnung des Kreisumfangs bei Archimedes und Leo-

nardo Pisano. Berlin 1894. 186—187. — Obenrauch, F. J., Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft. Brünn 1893. 187—188. — Schotten, H., Inhalt und Methode des planimetr. Unterrichtes II. Lpzg. 1893. 188—190. — Mathemat. Abhandlungsregister 1893. 113—120; 232—240.

XL. Peano, G., Notions de logique mathématique. Turin 1894. 51—52. — Burale-Forti, C., Logica matematica. Milano 1894. 52. — Vivanti, G., Il concetto d'Infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Mantova 1894. 52—53. — Günther, S., Abriss der Geschichte der Mathem. und der Naturwissenschaften im Alterthume. 2. Aufl. München 1893. 53. — Korteweg, J. D., Het Bloeitijperk der wiskundige wetenschappen in Nederland. Amsterdam 1894. 53—54. — Berthold, G., Der Magister Joh. Fabricius und die Sonnenflecken. Lpzg. 1894. 54. — Becker, H., Die geometr. Entwickelung des Infinitesimalbegriffes im Exhaustionsbeweis bei Archimedes. Insterburg 1894. 54—55. — Les méchaniques ou l'élévateur de Héron d'Alexandrie publ. sur la vers. arab. de Costâ ibn Lûqâ par le Baron Carra de Vaux. Paris 1894. 55—56. — Bierens de Haan, D., Bouwstoffen voor de geschiedenis der uis- en naturkundige wetenschappen in de Nederlanden. Amsterdam 1893. 56—57. — René Descartes, Die Geometrie. Deutsch von L. Schlesinger. Berlin 1894. 57—58. — Riessen, Ein ungedrucktes Rechenbuch aus d. Jahre 1676. Glückstadt 1893/94. 58. — Graf, J. H., Prof. Dr. Rudolff Wolf 1816—1893. Bern 1894. 59. — Rudio, F., Erinnerungen an Moritz Abraham Stern. Zürich 1894. 60—61. — Robel, E., Die Sirenen II. Berlin 1894. 61. — Klussmann, R., Systemat. Verzeichn. der Abhandl., welche in den Schulschriften sämmtl. am Programmentausch theilnehm. Lehranstalt. erschienen sind. II. Lpzg. 1893. 61—62. — Rohrbach, C., Vierstell. logarithm.-trigonometr. Tafeln. Gotha 1893. 62. — Kobald, E., Ueber das Versicherungswesen der Bergwerksbruderladen etc. II. Leoben 1893. 62—63. — Hagen, J. G., Synopsis der höheren Mathematik. II. Berlin 1894. 63—64. — Tannabaur, J., Berechnung von Renten und Lebensversicherungen. Wien 1893. Derselbe, Zinseszins- und Rententafeln. Wien 1893. 64. — Annuaire du Bureau des Longitudes. Paris 1893 et 1894. 64—65. — Fitz-Patrick, J., et G. Chevrel, Exercices d'Arithmétiques. Paris 1893. 65—66. — Lucas, Ed., Récréations mathématiques. III, IV. Paris 1893 et 1894. 66—67. — Hullmann, K., Die Wissenschaft und ihre Sprache. Lpzg. 1894. 101. — Wundt, W., Logik. Eine Untersuch. d. Principien d. Erkenntniss und d. Methode der wissenschaftl. Forschung. II Bde. II. Bd. 1. Abth. 2. Abschn. 2. Aufl. Stuttgart 1894. 101 bis 102. — Fort und Schlömilch, Lehrbuch der analyt. Geometrie. I. 6. Aufl. von R. Heger. Lpzg. 1893. 102. — Ganter, H., und F. Rudio, Die Elemente der analyt. Geometr. der Ebene. II. Aufl. Lpzg. 1894. 102—103. — Stegemann, M., Grundriss der Diff.- und Integral-Rechnung II. 5. Aufl. von L. Kiepert. Hannover 1894. 103—104. — Smith, H. J. S., Collected mathematical papers edid. by J. W. L. Glaisher. Oxford 1894. 2 vol. 104—106. — Herschel, Cl., Frontinus and his Two books on the water supply of the city of Rome A. D. 97. Ithaca N. Y. 1894. 106. — Obenrauch, Fr. J., Monge, der Begründer der darstell. Geometrie. Forts. Brünn 1894. 106. — Haas, K., Ueber einige Apparate zur Demonstr. der Präcession und ihrer Folgen. Wien 1894. 130. — Hipparchi in Arati et Eudoxi Phaenomena commentariorum libri III. rec. C. Manitius. Lps. 1894. 130. — Boll, F., Studien über Claudius Ptolemaeus. Lpzg. 1894. 131—132. — Jamblichi in Nicomachi arithmeticam introductionem liber ed. H. Pistelli.

Lps. 1894. 132. — Abhandlungen über Variationsrechnung. 2 Thle. Herausgeg. von P. Stäckel. Lpzg. 1894. 132—133. — Eggenberger, J., Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems, der Gammafunction und des Laplaceschen Integrals. Bern 1893. 133—134. — Euclidis opera omnia edid. J. L. Heiberg et H. Menge. Vol. VII. Euclidis optica ed. J. L. Heiberg. Lps 1895. 134 bis 135. — Die Arithmetik des Magister Georgius de Hungaria aus d. Jahre 1499. Herausgeg. von C. von Szily und A. Heller. Budapest und Berlin 1894. 135 bis 136. — Rudel, K., Georg Philipp Harsdörffer als math. und naturphilos. Schriftsteller. Nürnberg 1894. 136—137. — Weyer, G. D. E., Ueber die parabolische Spirale. Kiel und Lpzg. 1894. 137. — Anmerkungen und Zusätze zur Entwerf. der Land- und Himmelskarten von J. H. Lambert (1772). Ueber Kartenprojection. Von Lagrange (1779) und Gaufs (1822). Herausgeg. von A. Wangerin. Lpzg. 1894. 137—138. — Schenkel, H., Kritisch-histor. Untersuch. über die Theorie der Gammafunctionen und der Eulerschen Integrale. Usteri-Zürich 1894. 138—139. — Fink, K., Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot, sein Leben und seine Werke. Tübingen 1894. 139. — Festschrift zur Feier des 25jährigen Bestehens der Gesellschaft ehemal. Studier. der eidgen. und polytechn. Schule zu Zürich. Zürich 1894. 139—140. — Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia II. Modena 1895. 218—219. — Wohlwill, E., Galilei betreffende Handschriften der Hamburger Stadtbibliothek. Hamburg 1895. 219—220. — Cajori, Fl., A History of mathematics. New-York and London 1896. 220—221. — Robel, E., Die Sirenen III. Berlin 1896. 221—222. — Annuaire du Bureau des Longitudes. Paris 1895. 222. — Comte, Aug., La géometrie analytique, nouv. ed. précédée de la geométrie de Descartes. Paris 1894. 222—223. — Mathem. Abhandlungsregister 1894. 109—120; 226—240.

XLI. Niewenglowski, B., Cours de Géometrie analytique. I, II. Paris 1894/95. 26—28. — Pascal, E., Lezioni di calcolo infinitesimale I, II. Milano 1895. 28—29. — Maupin, G., Questions d'algèbre. Paris 1895. 29—30. — Münder, F., Die eiförmigen Curven. Bern 1894. 30. — Hrabák, J., Praktische Hilfstabellen für Logarithm. und andere Zahlenrechnungen. 3. Aufl. Lpzg. 1893. 30—31. — Autenheimer, F., Elementarbuch der Differ.- und Integr.-Rechnung. 4. Aufl. Weimar 1895. 31—32. — Dölp, H., Aufgaben zur Differ.- und Integr.-Rechnung. 6. Aufl. Giessen 1895. 32. — Kiepert, L., Grundriss der Differ.- und Integr.-Rechnung I. 7. Aufl. Hannover 1895. 32—33. — Haas, A., Anwendung der Differentialrechn. auf d. ebenen Curven. Stuttgart 1894. 33. — Sturm, A., Das Delische Problem. Linz 1895. 76—77. — Obenrauch, J., Monge, Der Begr. der darstell. Geometrie als Wissenschaft. Schluss. Brünn 1895. 77—78. — Diophanti Alexandrini Opera omnia c. graec. comm. ed. P. Tannery. I, II. Lps. 1893/95. 101—104. — Musici scriptores Graeci recogn. Carol. Janus. Lps. 1895. 104—105. — Engel, F., und P. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gaufs. Eine Urkundensammlung. Lpzg. 1895. 105 bis 106. — J. C. Poggendorffs Biograph.-literar. Handwörterbuch z. Gesch. der exact. Wissenschaften III. (die Jahre 1858—1883 umf.). Herausg. von B. W. Feddersen und A. J. von Oettingen. 1. Lief. Lpzg. 1896. 181—182. — Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik im Alterth. und Mittelalter. Kopenhagen 1896. 182 bis 183. — Ball, W. W. R., A primer of the history of mathematics. London 1895. 183—184. — Boscha, J., Christian Huygens, Rede am 200. Gedächtnisst. seines Todes gehalten. Uebers. von Th. W. Engelmann. Lpzg. 1895. 184—185. —

Rosenberger, F., Isaak Newton und seine physikalischen Principien. Lgzg. 1895. 185—186. — Günther, S., Erd- und Himmelsgloben, ihre Gesch. und Construction nach Matteo Fiorini. Lpzg. 1896. 186—187. — Green, G., Ein Versuch, die mathem. Analysis auf d. Theorie der Elektricität u. d. Magnetismus anzuwenden (1828). Herausg. von A. J. v. Oettingen u. A. Wangerin. Lpzg. 1895. 187. — Beman, W. W. and D. E. Smith, Plane and solid geometry. Boston U. S. A. 1895. 187—188. — Schlömilch, O., Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis. 4. Aufl. Braunschweig 1895. 188—189. — Nernst, W., u. A. Schönflies, Einführ. in die mathem. Behandl. der Naturwissenschaften. München u. Lpzg. 1895. 189—190. — Pascal, E., Esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale. Milano 1895. 190. — Steiner, J., Die geometr. Constructionen, ausgef. mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises (1833). Herausg. von A. v. Oettingen. Lpzg. 1895. 216. — Mathem. Abhandlungsregister 1895. 110 bis 120; 219—232.

XLII. Wolf, R., Taschenbuch für Mathem., Geodäsie und Astronomie. 6. Aufl. von A. Wolfer. Zürich 1895. 9. — Schmidt, Th., Das Dualitätsgesetz. Steyer 1895. 9. — Euler, L., Zwei Abhandl. über sphärische Trigonometrie (1753 u. 1779). Uebers. von E. Hammer. Lpzg. 1896. 36—37. — Abel, N. H., Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + -$. (1826). Herausg. von A. Wangerin. Lpzg. 1895. 37. — Schimpf, E., Eine Theorie der Konvergenz unendl. Reihen. Bochum 1895. 37—38. — Wellisch, S., Das 2000jährige Problem der Trisektion des Winkels. Wien 1896. 38. — Eisenlohr, A., Ein altbabylonischer Felderplan. Lpzg. 1896. 41. — v. Jacobs, H., Das Volk der Siebener-Zähler. Berlin 1896. 42. — Ruska, J., Das Quadriuium aus Severus Bar Šakkû's Buch der Dialoge. Lpzg. 1896. 42—43. — Heath, F. L., Apollonius of Perga Treatise on conic section edited in modern notation. Cambridge 1896. 43—44. — Sereni Antinoensis Opuscula ed. J. L. Heiberg. Lps. 1896. 44. — Faye, N., Sur l'origine du monde. Théorics cosmogoniques des anciens et des modernes. Paris 1896. 44—45. — Kheil, C. P., Ueber einige ältere Bearbeitungen des Buchhaltungstraktes des Luca Pacioli. Prag 1896. 46. — Müller, Chr. F., Henricus Grammateus u. s. Algorismus de integris. Zwickau 1896. 46—47. — Günther, S. Jacob Ziegler, ein bayerischer Geograph und Mathemat. Ansbach u. Lpzg. 1896. 47. — Carli, A., et A. Favaro, Bibliografia Galileiana (1568—1895). Roma 1896. 47. — Fischer, E., Ueber die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz. Lpzg. 1896. 48—49. — Boger, J., Le mathématicien France-Comtois Franç. Jos. Servois. Bésançon 1895. 49—50. — Günther, S., Kepler u. Galilei. Berlin 1896. 56. — Volkmann, P., Franz Naumann (11. Sept. 1798 bis 23. Mai 1895). Ein Beitr. z. Gesch. deutsch. Wissensch. Lpzg. 1896. 50—51. — Graf, J. H., Ludwig Schläfli (1814—1895). Bern 1896. 51—52. — Mansion, P., Notice sur les travaux mathémat. de Eug.-Charles Catalan. Bruxelles 1896. 52. — Annuaire du Bureau des Longitudes. Paris 1896. 52—53. — Neppi-Modona, A., e T. Vannini, Questioni e formole di geometria analitica. Palermo 1896. 53. — Niewenglowski, A., Cours de géométrie analytique III. Paris 1896. 53—54. — Loria, G., Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche 2e ed. Torino 1896. 54—55. — Euclidis data cum comment. Marini et scholiis antiquis ed. H. Menge. Lps. 1896. 194. — Sturm, A., Das Delische Problem. Forts. Linz 1896. 195. — Wertheim, G., Die Arithmetik des Elia Misrachi.

Ein Beitr. z. Gesch. d. Mathem. 2. Aufl. Braunschweig 1896. 195—196. — Favaro, A., Intorno alla vita ed ai lavori di Tito Livio Burattini. Venezia 1896. 196—197. — Dickstein, S., Hoëne Wroński. Lego życici prace w. Krakowce 1896. 197. — Festschrift der naturforsch. Gesellsch in Zürich. 1746—1896. Zürich 1896. 197—198. — Henrici, J. u. P. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie II. 2. Aufl. Lpzg. 1897. 198. — Schubert, H., Arithmetik u. Algebra. Lpzg. 1896. Derselbe, Beispielsamml. zur Arithmet. u. Algebra. Daselbst 1896. 198. — Die Grundlage der modernen Werthlehre: Daniel Bernoulli, Versuch einer neuen Theorie der Werthbestimm. von Glücksfällen. Aus d. Latein. von A. Pringsheim. Lpzg. 1896. 199. — Jacobi, C. G. J., Ueber die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten und über Functionaldeterminanten. 1841. Herausg. von P. Stäckel. Lpzg. 1896. 199. — Mathem. Abhandlungsregister 1898. 96 bis 112; 211—224.

XLIII. Bibliotheca mathematica. Zeitschr. für Gesch. der Mathem. Herausg. von G. Eneström. Generalregister für Band I—X. 1887—1896. Stockholm 1897. 48. — Villicus, F., Die Geschichte der Rechenkunst vom Alterth. bis zum XVIII. Jahrh. 3. Aufl. Wien 1897. 49. — Troisième centenaire de la naissance de Descartes. Paris 1896. 49—50. — Amsperger, W., Christian Wolffs Verhältnis zu Leibniz. Weimar 1897. 50—51. — Graf, J. H., Nicolaus Blauner, d. erste Prof. der Mathem. an der Bernischen Akademie. Bern 1897. 51. — Wessel, C., Essai sur la représentation analytique de la direction. Copenhague 1897. 51—52. — Hesse, L. O., Gesammelte Werke. München 1897. 52—53. — Steiner, J., Systemat. Entwickelung d. Abhängigkeit geometr. Gestalten von einander. Lpzg. 1896. 53. — Kiepert, L., Grundrifs der Different.- und Integral-Rechnung I. 8. Aufl.; II. 6. Aufl. Hannover 1897. 53—54. — Serret, J. A., Lehrbuch der Different.- und Integral-Rechnung bearb. von A. Harnack. 2. Aufl. von G. Bohlmann. I. Lpzg. 1897. 54—55. — Schubert, H., Fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithm. und trigonometr. Rechnungen. Lpzg. 1897. 55—56. — Poggendorffs Biograph.-litterarisches Handwörterbuch zur Gesch. der exacten Wissensch. III. (die Jahre 1858—1883). Herausg. von Dr. B. W. Feddersen und A. J. v. Oettingen. Lpzg. 1896/98. 98—99. — Sturm, A., Das Delische Problem (Schlufs). Linz 1897. 99. — Jaeger, O., Grundzüge der Gesch. der Naturwissenschaften. Stuttgart 1897. 150—151. — Obenrauch, J., Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie. Brünn 1897. 151—152. — Laisant, C. A., La mathématique. Philosophie. Enseignement. Paris 1898. 203—204. — Laub, H., An elementary course of infinitesimal calculus. Cambridge 1897. 204—205. — Beman, W. W., Higher Arithmetic. Boston und London 1897. 205—206. — Ball, W. W. R., Récréation et problèmes mathém. des temps anc. et mod. 3e. ed. trad. p. J. Fitz-Patrick. Paris 1898. 206. — Schubert, H., Mathematische Mufsestunden. Leipzig 1898. 206—207. — Haussner, R., Tafeln für das Goldbachsche Gesetz. Halle 1897. 207. — Hammer, E., Lehrbuch der ebenen und sphär. Trigonometrie. Stuttgart 1897. 207—208. — Goldschmidt, L., Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hamburg u. Lpzg. 1897. 208—209. — Wolfgangi Bolyai de Bolya Tentamen etc. Ed. II. ed. S. König et M. Réthy. Budapestini 1897. 209—210. — Galois, E., Oeuvres mathématiques. publ. p. Emil Picard. Paris 1897. 210—211. — Graf, J. H., Der Mathematiker Jacob Steiner von Utzentorf. Bern 1897. 211. — Mathem. Abhandlungsregister 1897. 103—120; 215—224.

XLIV. Heath, T. L., The works of Archimedes. Cambridge 1897. 7—8. — Petri Philomeni de Dacia in Algorism. vulgar. Iohannis de Sacrobosco commentarius ed. M. Curtze. Havniae 1897. 8—9. — Jordan, W., Opus Palatinum. Sinus- und Cosinus-Tafeln von 10" zu 10". Hannover und Leipzig. 1897. 9—10. — Schwab, F., P. Aegyd Everard von Reitenau, 1605—1675. Salzburg 1898. 10—11. — Speck, G., Critique de l'enseignement des mathématiques. Lausanne 1898. 11. — Simon, M., Analyt. Geometrie der Ebene. Lpzg. 1897. 11—13. — Vasilieff, A., P. L. Tchébychef et son oeuvre scientifique. Turin 1898. 62. — Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia volumen I. Syntaxis mathematica ed. J. L. Heiberg. p. I. Lpzg. 1898. 62—63. — Encyklopädie der mathemathischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. Herausg. von H. Burkhardt und W. Frz. Meyer. I, 1. 1. Heft. Lpzg. 1898. 75—76. — v. Budislavljcvić, E., Grundzüge der Determinanten-Theorie in der project. Geometrie. Analyt. Geometr. Wien und Lpzg. 1898. 76—77. — Mikuta, A., Grundzüge der Diff.- und Integr.-Rechnung. Wien und Lpzg. 1898. 77—78. — Schur, Fr., Lehrbuch der analyt. Geometrie. Lpzg. 1898. 78—79. — Simon, M., Analyt. Geom. des Raumes. Lpzg. 1898. 79—80. — Fort, O. und O. Schlömilch, Lehrbuch der analyt. Geometrie. II. 6. Aufl. von R. Heger. Lpzg. 1898. 80. — Salmon-Fiedler, Analyt. Geometr. des Raumes I. 4. Aufl. Lpzg. 1898. 80—81. — Wundt, W., Die geometrisch-optischen Täuschungen. Lpzg. 1898. 86—87. — Baer, K., Über das logarithm. Potential einer Pascalischen Schnecke. Kiel 1897. 87. — Baer, K., die Kugelfunction als Lösung einer Differenzengleich. Kiel 1898. 87—88. — Mathem. Abhandlungsregister 1898, I. 92—100.

C. Aus **„Archiv der Mathematik und Physik"** von J. A. Grunert.

Theil XIX. 1852: Einige Sätze zur Theorie der hyperbolischen Functionen 88—96.

Theil XX. 1853: Ueber Leitlinien. 249—259.

D. Aus **„Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche"** pubbl. da B. Boncompagni.

Tomo V: Euclide e il suo secolo. Saggio storico-matematico. Traduzione di G. B. Biadego. 1—64.

Tomo IX: Die Rechenkunst im sechszehnten Jahrhundert von A. Kuckuck. Separatabdr. Berlin 1874. Traduzione del Dr. Alfonso Sparagna. Articolo bibliografico. 183—187. — Goffredo Friedlein. Necrologia. Traduz. del Dr. A. Sparagna. 531—535. — Sulla nazionalità del Copernico. Traduz. del Dr. A. Sparagna. 701—716.

Tomo XI: I sei Cartelli di matematica disfida, primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di Ludovico Ferrari, coi sei controcartelli in risposte di Nicolò Tartaglia etc. pubbl. da Enrico Giordani etc. — Milano 1876. Articolo biliograf. Traduzione del Prof. Ant. Favaro. 177—196. — Il carteggio fra Lagrange ed Euler. Traduz. del prof. A. Favaro. 197—216.

E. Aus **„Repertorium der litterarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik"**, herausgegeben von L. Koenigsberger und G. Zeuner.

Bd. 1: Selbstanzeige von: Die roemischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmefskunst. Leipzig 1875. 117—128.

F. Aus „Allgemeine Deutsche Biographie".

Bd. I. 1875: Karl Adams. 47—48. — Gerardus Adriaens oder Drunaeus. 122. — Johann Thomas Ahrens. 163. — Franz von Aiguillon oder Aguillon oder Aquilonius. 166. — David Algoewer. 342. — Joseph Amuel. 418. — Johannes Arduser. 513. — Peter Friedrich Arndt. 553. — Arthur Arneth. 554—555. — Ernst Ferdinand August. 683—684.

Bd. II. 1875: Dominicus Beck. 212—213. — Johann Isaak Berghaus. 184. — Jacob Bernoulli I. 470—473. — Johann Bernoulli I. 473—476. — Nicolaus Bernoulli I. 476—477. — Nikolaus Bernoulli II. 477—478. — Daniel Bernoulli. 478—480. — Johann Bernoulli II. 480—482. — Johann Bernoulli III. 482. — Jacob Bernoulli II. 482—483. — Tobias Beutel 487—488.

Bd. III. 1876: Georg Heinrich Borz. 183. — Benjamin Bramer. 234. — Johann Georg Brand. 236. — Georg Friedrich Brandes. 240—241. — Franz Brasser. 259. — Isaak Bruckner. 419. — Friedrich Johann Bock. 494. — Jobst Burgi (Justus Byrgius, Joist Burgh, Just Borgen). 604—606. — Abel Burga (Bürga). 620—621. — Heizo Buscher. 643. — Friedrich Gottlob von Busse. 649—650. — Karl Herbert Ignatius Buzengeiger. 678. — Johann Wilhelm von Camerer. 727.

Bd. IV. 1876: Giovanni Francesco Mauro Melchior Salvemini genannt Castillioneus oder Castilhon. 67—69. — Ludolph van Ceulen oder van Keulen oder van Collen. 93. — Adam Mathias Chmel. 130. — Jacob Christmann. 222. — Wilhelm Ludwig Christmann. 223—224. — Christlieb von Clausberg. 285. — Heinrich Wilhelm Clemm. 321—322. — Adam Andreas Cnollen. 354. — Johann Konrad Creiling. 583—584. — August Leopold Crelle. 589—590. — Peter Crüger. 625. — Joseph Melchior Danzer. 755. — Johann Martin Zacharias Dase. 750. — Heinrich Wilhelm Feodor Deana. 790.

Bd. V. 1877: Franz Eduard Desberger. 68—69. — Wilhelm Adolf Diesterweg. 153. — Peter Gustav Lejeune-Dirichlet. 251—252. — Enno Heeren Dickson. 252—253. — Johann Gabriel Doppelmayr. 344—345. — Karl Ereiher Drais von Sauerbronn. 373. — Cornelius Drebbel. 384. — Justus Heinrich Dresler. 397. — Johann Baptist Eberenz. 532. — Johann Paul Eberhard. 569. — Philipp Eckebrecht. 609. — Christian Leonhard Philipp Eckhardt. 617. — Moritz Eilmann. 758. — Johann Caspar Eisenschmidt. 773—774. — Ferdinand Gotthold Max Eisenstein. 774—775.

Bd. VI. 1877: Hieronymus Christoph Wilhelm Eschenbach. 338—339. — Leonhard Euler. 422—430. — Johann Albert Euler. 430. — Karl Euler. 430. — Christoph Euler. 430—431. — Anton Felkel. 612. — Carl Wilhelm Feuerbach. 747.

Bd. VII. 1878: Thomas Finck (Finkius). 13—14. — Ernst Gottfried Fischer. 62—63. — Gotthold August Fischer. 68. — Wilhelm August Förstemann. 162 — Traugott Samuel Franke. 265—266. — Johann Gottlieb Friedlein. 398—399.

Bd. VIII. 1878: Johann Nikolaus Frobes genannt Frobesius. 129—130. — J. C. Gartz. 384—385. — Karl Friedrich Gaufs. 430—445. — Cornelius Gemma-Frisius. 555. — Rainer Gemma-Frisius. 555—556.

Bd. IX. 1879: Christian Goldbach. 330—331. — Gustav Adolf Goepel. 370. — Karl Heinrich Gräffe. 572—574. — Grammateus (Heinrich Schreyber). 578. — Hermann Grafsmann. 595—598. — Justus Günther Grafsmann. 598—599. — Gregorius a Sancti Vincentio. 631—633.

Bd. X. 1879: Johann August Grunert. 50—51. — Johann Philipp Gruson

(Grüson). 65—66. — Christoph Gudermann. 87—88. — Hermann Haedenkamp. 310. — Elkan Markus Hahn. 358. — Hermann Hankel. 516—519. – Joseph Hantschl. 549—550. — Siegmund Ferdinand Hartmann. 703.

Bd. XI. 1880: Karl Friedrich Hauber. 38—39. — Johann Karl Friedrich Hauff. 48. — Johann Christoph Heilbronner. 313.

Bd. XII. 1880: Johann Jacob Hentsch. 11. — Jacob Hermann. 181—182. — Ludwig Otto Hesse. 306—307. — Karl Ferdinand Hindenburg. 456—457. — Meyer Hirsch. 467—468. — Johann Josef Ignatz von Hoffmann. 604—605. — Georg Jonathan von Holland. 748—749.

Bd. XIII. 1881: Daniel Huber. 228—229. — Christian Huygens. 480—46. — Simon Jacob v. Coburg. 559. — Karl Friedrich Andreas Jacobi. 593.

Bd. XIV. 1881: Ferdinand Joachimsthal. 96—97. — Jordanus Nemorarius. 501—502. — Ernst Friedrich Junge. 705. — Johannes Junge.. 705.

Bd. XV. 1882: Abraham Gotthelf Kaestner. 439—441.

Bd. XX. 1884: Ludwig Imanuel Magnus. 91—92. — Paul Maké de Kerek Gude. 152. — Konrad Gottlieb Marquardt. 417. — Johann Mathias Matzko. 602.

Bd. XXI. 1885: Meinzo von Constanz. 240. — Albert Ludwig Friedrich Meister. 251—252. — Mathias Metternich. 527.

Bd. XXII. 1885: August Ferdinand Möbius. 38—43. — Leopold Mefsbrugger. 404—405. — Franz Moth. 406—407. — Anton Müller (1799—1860). 514. — Johann Heinrich Traugott Müller (1797—1862). 629—631.

Band XXIII. 1886: Karl Dietrich von Münchow. 8. — Friedrich Wilhelm August Muchard 62—63. — Christian Heinrich von Nagel. 214. — Johann Christian Nelkenbrecher. 417—418. — Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann. 445. — Anton Nokk. 757.

Band XXIV. 1886: Martin Ohm. 203—204. — Ludwig Oettinger. 568—569.

Band XXV. 1887: Johann Friedrich Pfaff. 592—593. — Johann Wilhelm Andreas Pfaff. 593—594. — Christoph Friedrich von Pfleiderer. 678.

Band XXVI. 1888: Johann Friedrich Polack. 381. — Friedrich Theodor Poselger. 455—456. — Moritz von Prasse. 510. — Leopold Prowe. 671.

Band XXVII. 1888: Joseph Ludwig Raabe. 66. — Johann Heinrich Rehn. 174—175. — Reimarus Ursus (Nicolaus). 179—180.

Band XXVIII. 1889: Karl Gustav Reuschle. 298. — Georg Friedrich Bernhard Riemann. 555—559. — Adam Riese. 576—577.

Band XXIX. 1889: Johann Georg Rosenhain. 209. — Heinrich August Rothe. 349—350. — Christoff Rudolff. 571—572.

Band XXX. 1890: Kasper Sagner. 173. — Johann Michael Joseph Salomon. 281—282. — Michael Scheffelt. 676.

Band XXXII. 1891: Franz van Schooten d. Aelt. 328. — Franz van Schooten d. Jüng. 328—329.

Band XXXIII. 1891: Franz Ferdinand Schweins. 364. — Daniel Schwenter. 413—414. — Ludwig August Seeber. 565—566.

Band XXXIV. 1892: Franz Seidewitz. 92. — Gustav Skřivan. 450. — René François de Sluse. 469—470. — Rudolf Snel van Roijen (Snellius). 502; Willebrord Snel van Roijen (Snellius). 502—503. — Friedrich Wilhelm Daniel Snell. 506. — Karl Snell. 507. — Ludwig Adolf Sohnke. 546.

Band XXXV. 1893: Friedrich Wilhelm Spehr. 96. — Simon Spitzer. 223. —

Konrad Dietrich Martin Stahl. 402—403. — Simon Stampfer. 435. — Jacob Steiner. 700—703.

Band XXXVI. 1893: Simon Stevin. 158—160. — Michael Stifel. 208—216. — Johann Friedrich Stockhausen. 292—293. — Georg Wilhelm Staudt. 528. — Emil Straufs. 532. — Jacob Struve. 687.

Band XXXVII. 1894: Andreas Taquet. 340—341. — Johann Dietrich Adolf Tellkampf. 558. — Bernhard Friedrich Thibaut. 745—746.

Band XXXVIII. 1894: Heinrich August Töpfer. 445.

Band XXXIX. 1895: Hermann Umpfenbach. 278. — Wilhelm Unverzagt. 321—322. — Benjamin Ursinus. 365. — Georg Freiherr von Vega. 523—525. — Ferdinand Verbiest. 612—613.

Band XL. 1896: Adrian Vlack. 86. — Andreas Völler. 247—248.

Band XLI. 1896: Johann Christoph Weingärtner. 503—504.

Band XLII. 1897: Johannes Widmann von Eger. 355.

Band XLIII. 1898: Benjamin Witzschel. 677.

Band XLIV. 1898: Franz Woepcke. 209—210. — Gustav Friedrich Wucherer. 261—263.

G. Aus **„Rendiconti dell' Istituto Lombardo di Scienze e Lettere"** Mailand Hoepli.

Vol. IX, anno 1876: Studi greco-indiani (Traduzione italiana sul MS. originale, di G. Schiaparelli) 818 - 842. (Siehe oben „Zeitschrift für Mathem. u. Physik. 22. Bd. 1877.)

H. Aus **„Jenaer Litteraturzeitung"** herausgegeben von Kletke.

Jahrg. 1877. Nr. 25: Günther, S., Studien zur Geschichte der mathem. und physik. Geographie 1, 2. Halle 1877. 388—389. — Nr. 28: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. I. Leipzig 1877. 434—435.

Jahrg. 1878. Nr. 8: Gerhardt, C. J., Geschichte der Mathem. in Deutschland. München 1877. 112—113. — Nr. 14: Günther, S., Studien zur Geschichte der Mathem. und physik. Geographie 3. Halle 1878. 203—204. — Nr. 25: Hochheim, Kâfî fîl Hisâb des Abu Bekr Muhammed Ben Abu Husein Alkarkhî. I. Halle 1878. 375—376. — Nr. 33: Matthiefsen, L., Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. 480—481. — Nr. 46: Curtze, M., Inedita Copernicana. Leipzig 1878. 653—654. — Nr. 47: Günther, S., Studien 4. u. 5. Halle 1878. 662—663.

Jahrg. 1879. Nr. 20: Abhandl. zur Gesch. der Mathem. II. Leipzig 1879. 271—273. — Nr. 27: Hochheim, Kâfî fîl Hisâb. II. Halle 1879. 399—400.

I. Aus **„Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der Mathematik"** herausg. von G. Eneström.

Neue Folge 2, 1888: Ahmed und sein Buch über die Proportionen 7—9.

Neue Folge 11, 1897: Réponse à la question 40. (Betrifft Bürmann) 31—32.

K. Aus **„Comptes rendus de l'Académie des Sciences"**. Paris.

T. LI. 1860: Sur l'age de Zenodore 630—633.

L. Aus **„Neue Heidelberger Jahrbücher"**. Heidelberg. 8°.

I (1891): Verzeichnis der Vorträge, die M. Cantor im Historisch-philosophischen Vereine zu Heidelberg in den Jahren 1863—1890 gehalten hat. 8. —

Albrecht Dürer als Schriftsteller. Vortrag, gehalten im Hist.-philos. Vereine zu Heidelberg am 12. Febr. 1888. 17—31.

II (1892): Zeit und Zeitrechnung. Vortrag, gehalten im Hist.-philos. Vereine zu Heidelberg am Donnerstag, den 3. Dezember 1891. 190—211.

V (1895): Zahlensymbolik. Vortrag, gehalten in Heidelberg am 18. Dezember 1894. 25—45.

M. Aus „**Gegenwart**".

XII, 1877: Die Aktenfälschung im Prozesse gegen Galileo Galilei. 11 S.

N. Aus „**Beilage zur Allgemeinen Zeitung**" (München).

Stand mir nicht zur Disposition.

O. Aus „**Litterarisches Centralblatt**".

Stand mir nicht zur Disposition.

P. Aus „**National-Zeitung**" Berlin.

Stand mir nicht zur Disposition.

Q. Aus „**Verhandlungen des Naturwissensch.-Medicin. Vereins zu Heidelberg**".

I, 1857—59: Mathematik des Pythagoras. 1 S. — Zahlzeichen der Araber. 2 S. — Die Kenntnisse der Griechen in der Zahlentheorie.

R. Aus dem „**Bulletin des Sciences mathématiques**". 2e série.

T. XIX, mars 1895: M. Zeuthen et sa Géométrie supérieure de l'Antiquité.

S. Aus „**Nord und Süd**". Eine deutsche Monatsschrift.

Bd. XVI: Sir Isaac Newton. 106—117; 201—217.

Bd. XLV: Vier berühmte Astrologen. 81—91.

Bd. LXIX: Kardinal Nikolaus von Cusa. Ein Geistesbild aus dem XV. Jahrhundert. 188—202.

T. Aus „**Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anläfsl. ihres 200jähr. Jubelfestes 1890**".

Ueber einige Konstruktionen von Lionardo da Vinci. 8—15.

U. Aus „**Hermes**", Zeitschrift für klassische Philologie.

1881: „Über das neue Fragmentum Mathematicum Bobiense". 640—642.

V. Aus dem „**Archiv der Gesellschaft für ältere deutsche Gerichtskunde**".

Bd. V: Ein Schreiben Mainzos von Constanz an Hermann den Lahmen (mit E. Dümmler). 202—206. 2 Tafeln.

W. Aus den „**Preussischen Jahrbüchern**".

Bd. XXXII, 1873: Blaise Pascal. 212—237.

X. Aus „**Nouvelles Annales de Mathématiques**".

XIV, 1855: Théorème sur les déterminants Cramériens. 1 S. — Le théorème de Wheatstone. 1 S.

XX, 1861: Note historique sur l'extraction abrégée de la racine carrée. 15.

Y. Aus „**Sybels Historischer Zeitschrift**".

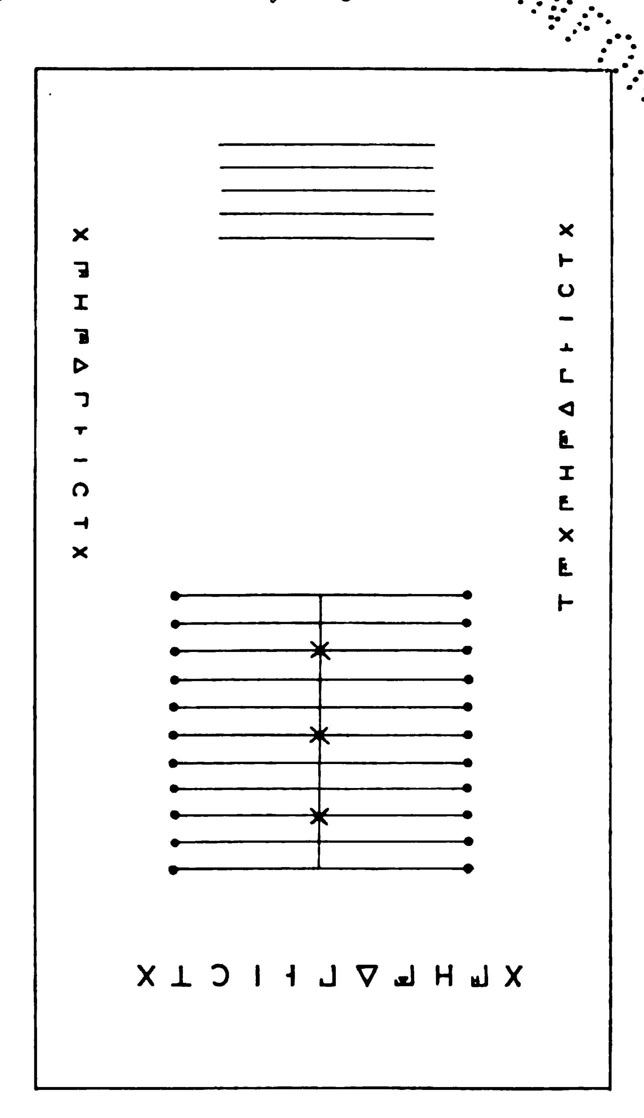
X. War Leibniz ein Plagiator? 63 S.

Z. Aus „**Westermanns Monatsheften**".

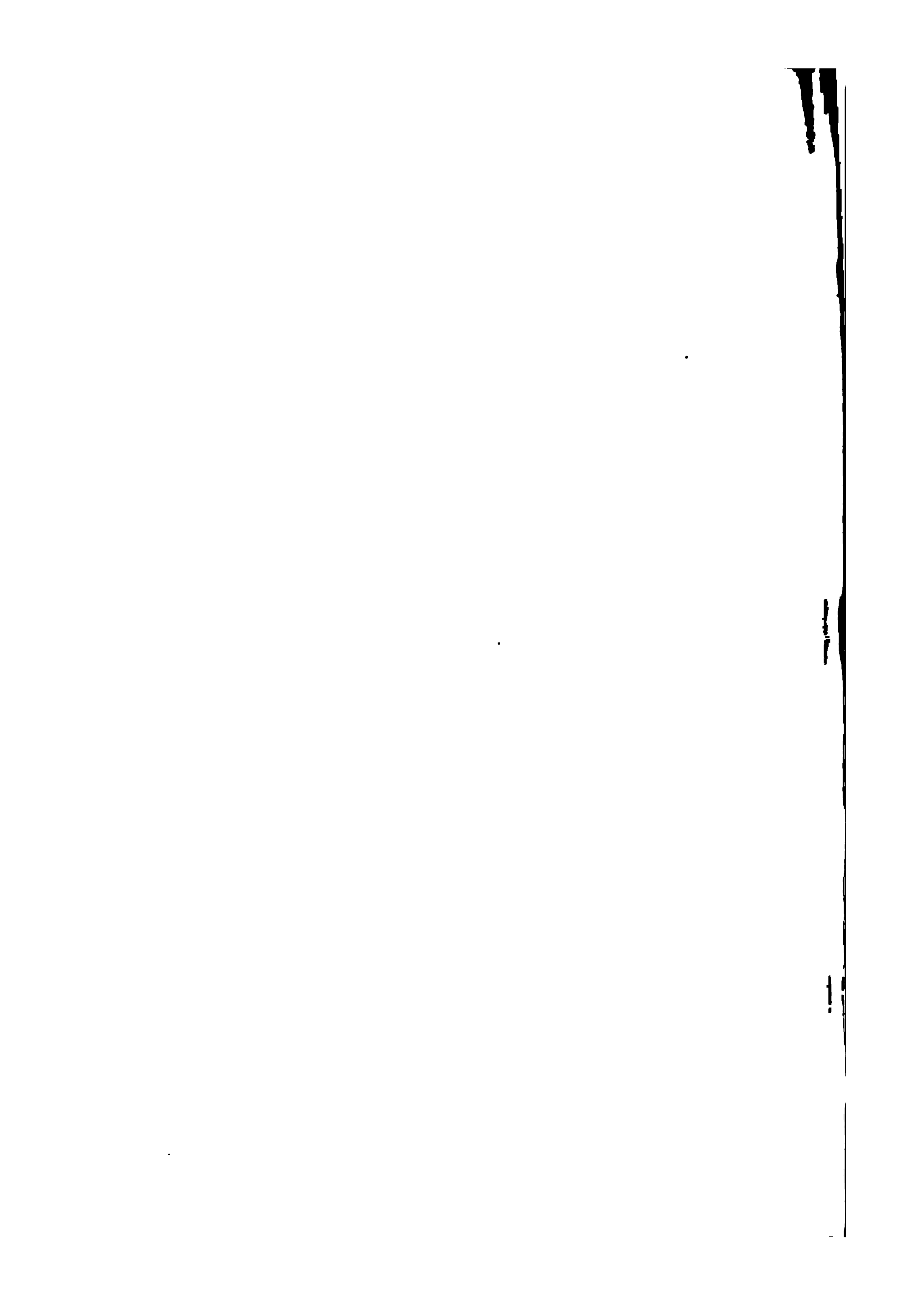
XII, 1878: Lionardo da Vinci. 12 S.

Namenverzeichnis.





Die Rechentafel von der Insel Salamis nach Rangabé.



	DATE DUE		

